ĐỀ THI OLYMPIC CẤP HUYỆN

MÔN TOÁN 8

NĂM HỌC 2016-2017

Bài 1. Phân tích thành nhân tử:

a) $a^3 + 2a^2 - 13a + 10$

b) $(a^2 + 4b^2 - 5)^2 - 16(ab + 1)^2$

Bài 2. Cho 3 số tự nhiên a, b, c. Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 3 thì $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ chia hết cho 6

Bài 3. a) Cho $a - b = 1$. Chứng minh $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

b) Cho $6a - 5b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $4a^2 + 25b^2$

Bài 4. Đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 và thỏa mãn $f(1) = 5; f(2) = 11; f(3) = 21$. Tính $f(-1) + f(5)$

Bài 5. Cho tam giác vuông cân $ABC(AB = AC)$. M là trung điểm của AC, trên BM lấy điểm N sao cho $NM = MA; CN$ cắt AB tại E. Chứng minh :

a) Tam giác BNE đồng dạng với tam giác BAN

b) $\frac{NC}{AN} = \frac{NB}{AB} + 1$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Ta nhận thấy $a=1, a=2$ là nghiệm của đa thức nên:

$$a^3+2a^2-13a+10=(a-1)(a-2)(a+5)$$

b)

$$(a^2+4b^2-5)^2-16(ab+1)^2=(a^2+4b^2-5+4ab+4)(a^2+4b^2-5-4ab-4)$$

$$=\left[(a+2b)^2-1\right]\left[(a-2b)^2-9\right]$$

$$=(a+2b+1)(a+2b-1)(a-2b-3)(a-2b+3)$$

Bài 2.

$A=a+b+c \vdots 3 \Rightarrow 2A \vdots 6; B=a^3+b^3+c^3+3a^2+3b^2+3c^2$

$C=B+2A=a^3+3a^2+2a+b^3+3b^2+2b+c^3+3c^2+2c$

$=a(a+1)(a+2)+b(b+1)(b+2)+c(c+1)(c+2)$

$a(a+1)(a+2), b(b+1)(b+2) \quad , c(c+1)(c+2)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 $\Rightarrow C \vdots 6 \Rightarrow B \vdots 6$

Bài 3.

a) Từ $a-b=1 \Rightarrow a=1+b \Rightarrow a^2=1+2b+b^2$, thay vào đẳng thức cần chứng minh ta có: $1+2b+2b^2 \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 4b^2+4b+1 \geq 0 \Rightarrow (2b+1)^2 \geq 0$. BĐT này luôn đúng . Vậy $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow (2b+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$

b) Đặt $x=2a, y=-5b$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$(3x+y)^2 \leq (x^2+y^2)(9+1) \Rightarrow x^2+y^2 \geq \frac{1}{10}$ hay $4a^2+25b^2 \geq \frac{1}{10}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{1}{y} \Leftrightarrow 3y=x \Leftrightarrow -15b=2a \Leftrightarrow 6a=-45b \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{1}{50} \\ a=\frac{3}{20} \end{cases}$

Bài 4.

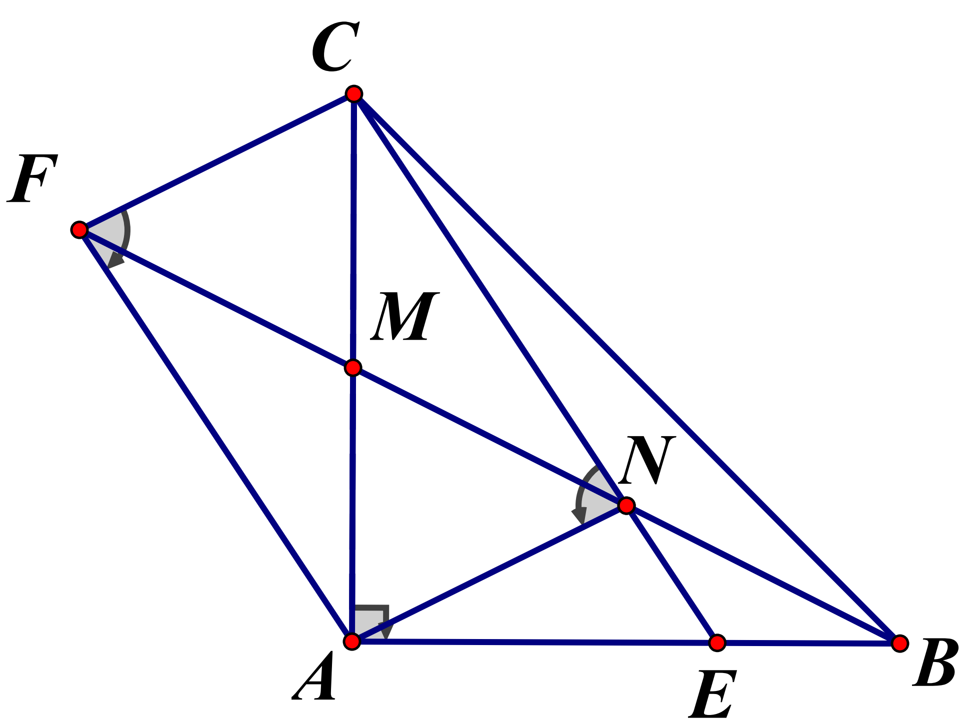
Nhận xét $g(x)=2x^2+3$ thỏa mãn $g(1)=5; g(2)=11; g(3)=21$

$Q(x)=f(x)-g(x)$ là đa thức bậc 4 có 3 nghiệm $x=1; x=2; x=5$

Vậy $Q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$; ta có:

$$f(-1)=Q(-1)+2(-1)^2+3=29+24a$$
$$f(5)=Q(5)+2.5^2+3=173-24a$$
$$\Rightarrow f(-1)+f(5)=202$$

Bài 5.



a) ΔANC vuông tại N (vì $AM=MC=MN$)

$\widehat{CNM}+\widehat{MNA}=90^0$ & $\widehat{BAN}+\widehat{NAC}=90^0$

Mà $\widehat{MNA}=\widehat{NAC}\Rightarrow\widehat{CNM}=\widehat{BAN}$

Mặt khác $\widehat{CNM}=\widehat{BNE}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow\widehat{BNE}=\widehat{BAN}\Rightarrow\Delta BNE\sim\Delta BAN$

b) Trên tia đối tia MN lấy điểm F sao cho $FM=MN$

Tứ giác $ANCF$ là hình chữ nhật (vì có 2 đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

$\Rightarrow CE//AF\Rightarrow\widehat{AFB}=\widehat{ENB}$ (đồng vị) $\Rightarrow\Delta BAN\sim\Delta BFA$

$\Rightarrow\frac{FA}{AN}=\frac{BF}{BA}\Rightarrow\frac{NC}{AN}=\frac{AB+NB}{AB}\Rightarrow\frac{NC}{AN}=\frac{NB}{AB}+1(dfcm)$