SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN GIA LÂM

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024
MÔN THI: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi có 1 trang)

Câu 1: (5,0 điểm)

a) Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $abc=1$ và $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số a,b,c bằng 1.

b) Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng $A=2^{3n+1}+2^{3n-1}+1$ là hợp số.

Bài 2: (5,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x\sqrt{3-2x}=3x^2-6x+4$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ x^2+8y^2=12 \end{cases}$.

Bài 3: (2,0 điểm)

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của: $P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}$.

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC đồng quy tại H

a) Chứng minh rằng: $\cos^2\widehat{BAC}+\cos^2\widehat{CBA}+\cos^2\widehat{ACB}<1$.

b) P là điểm thuộc cung nhỏ AC của đường tròn (O). Gọi M, I lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC và HP. Chứng minh rằng MI vuông góc với AP.

Bài 5: (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2-p-2}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên

b) Cho 5 số thực không âm a,b,c,d,e có tổng bằng 1 . Xếp 5 số này trên một đường tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một cách xếp sao cho hai số bất kì cạnh nhau có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{9}$.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

1) Ta có

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=ab+bc+ca$$
$$\Leftrightarrow abc-1+a+b+c-ab-bc-ca=0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0$$

Vậy có ít nhất một số bằng 1.

2) Ta có:

$2A=2^{3n+2}+2^{3n}+2=5.8^n+2$

Do $8\equiv 1(\bmod 7)\Rightarrow 8^n\equiv 1(\bmod 7)\Rightarrow A\equiv 5+2\equiv 0(\bmod 7)\Rightarrow A\vdots 7$

Mặt khác ta chứng minh được $A>0$ nên A là hợp số.

Câu 2:

1) Do vế phải của phương trình luôn dương nên $x>0$.

$VP=3(x-1)^2+1\geq 1,\quad VT=\sqrt{x\cdot x(3-2x)}\leq\frac{x+x+3-2x}{3}=1$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

2) Thay phương trình (2) vào phương trình (1) được:

$x^3+2xy^3+y\left(x^2+8y^2\right)=0\Leftrightarrow (x+2y)\left(x^2-xy+4y^2\right)=0\Leftrightarrow x=-2y$.

Thay $x=-2y$ vào phương trình (2) ta được: $4y^2+8y^2=12$ nên $y=\pm 1$.

Vậy hệ có nghiệm $(x,y)=(1;-2),(-1;2)$.

Câu 3:

Ta có:

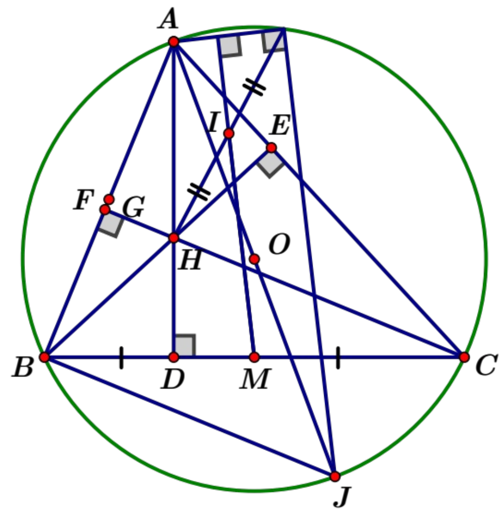
$$\sqrt{a^2-ab+b^2}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{3(a-b)^2}{4}}\geq\frac{a+b}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\leq\frac{2}{a+b}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right);\quad\frac{1}{\sqrt{c^2-ac+a^2}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow P\leq\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]=3$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 4:



Chứng minh:

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 BAC$$

.

Chứng minh tương tự ta được:

$$\cos^2 BAC + \cos^2 ACB + \cos^2 BAC = \frac{S_{AEF} + S_{BFD} + S_{CED}}{S_{ABC}} < 1$$

a) Dựng đường kính AK. Dẫn đến $\angle APK = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn đường kính). Dẫn đến KP vuông góc AP. Sau đó chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành. M là trung điểm của HK. Suy ra MI là đường trung bình của tam giác HPK. Thành ra MI song song với PK. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5:

a) Từ giả thiết suy ra tồn tại số tự nhiên a sao cho $\dfrac{p^2 - p - 2}{2} = a^3$, hay là $p(p-1) = 2(a+1)\left(a^2 - a + 1\right)$. Nếu $p = 2$ thì $a = 0$ thoả mãn. Nếu $p > 2$ thì p lẻ.

Từ giả thiết suy ra p là ước của $(a+1)$ hoặc p là ước của $\left(a^2 - a + 1\right)$. Giờ xét từng trường hợp. Nếu p là ước của $(a+1)$ thì do $a < p$ nên $a + 1 = p$ thay vào phương trình $p(p-1) = 2(a+1)\left(a^2 - a + 1\right)$ ta được phương trình $2a^2 - 3a + 2 = 0$, vô nghiệm.

Nếu p là ước của $a^2 - a + 1$ thì ta có thể chọn được số nguyên dương k sao cho $a^2 - a + 1 = kp$. Cũng thay trở lại phương trình $p(p-1) = 2(a+1)\left(a^2 - a + 1\right)$ cho ta $p - 1 = 2(a+1)k$, hay $p = 2(a+1)k + 1$.

Bây giờ thay vào phương trình $a^2 - a + 1 = kp$ cho ta

$$a^2 - \left(2k^2 + 1\right)a + 1 - 2k^2 - k = 0$$

.

Coi đây là một phương trình bậc hai ẩn a, tính biệt thức cho ta

$$\Delta = 4k^2 + 12k^2 + 4k - 3$$

.

Ta cần tìm k sao cho Δ là một số chính phương viết theo k.

Chú ý bất đẳng thức: $\left(2k^2 + 2\right)^2 < 4k^4 + 12k^2 + 4k - 3 < \left(2k^2 + 4\right)^2$.

Từ đó, $4k^4 + 12k^2 + 4k - 3 = \left(2k^2 + 3\right)^2$. Do đó, $k = 3$ và dẫn đến $p = 127$.

Vậy $p=2, p=127$.

b) Giả sử năm số đó là $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 0$.Ta phải có $b+c \leq \frac{2}{3}$ vì nếu ngược lại $b+c > \frac{2}{3}$ thì ta có $2a > b+c > \frac{2}{3}$ dẫn đến $a > \frac{1}{3}$. Cái này dẫn đến điều vô lý $a+b+c > 1$. Vậy nên $bc \leq \frac{1}{4}(b+c)^2 = \frac{1}{9}$. Mặt khác $1 = a+b+c+d+e \geq a+3d+e \geq a+3d \geq 2\sqrt{a \cdot 3d}$. Thành ra, $ad \leq \frac{1}{12}$. Dẫn đến $ae \leq ad \leq \frac{1}{12} < \frac{1}{9}$. Ta có thể xếp các số a,d,c,b,e trên đường tròn theo thứ tự thuận kim đồng hồ. Ta có $ad < \frac{1}{9}, dc < ad < \frac{1}{9}, bc \leq \frac{1}{9}, be \leq bc \leq \frac{1}{9}$, ea $\leq ad \leq \frac{1}{9}$. Số $\frac{1}{9}$ là số nhỏ nhất có thể.