HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 QUẢNG NGÃI 2023-2024

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. *(4,0 điểm)*

1) Tìm số nguyên tố p sao cho p+10 và p+14 là các số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x,y của phương trình $x^2 + xy - 2x - 3y - 4 = 0$

3) Cho ba số $a,b,c \in \mathbb{Z}$ thoả mãn $a + b + c = 2022^{2023}$. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

Bài 2. *(4,0 điểm)*

1) Cho biểu thức: $M = \left(1 - \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x + 1}\right)$ với $x \geq 0$

Rút gọn biểu thức M và tính giá trị của biểu thức M khi $x = 2023 - 2\sqrt{2022}$.

2) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{y}{y+1} + \dfrac{z}{z+1}$

Bài 3. *(4,0 điểm)*

1) Giải phương trình $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + x + \dfrac{1}{y}\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) = 4 \\ x^3 + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{1}{y} = 4 \end{cases}$

Bài 4. *(7,0 điểm)*

1) Một học sinh có tấm bìa hình vuông ABCD cạnh 20 cm. Em muốn cắt tấm bia này thành bốn hình tam giác vuông bằng nhau và phần còn lại là hình vuông MNPQ thỏa mãn M,N,P,Q lần lượt thuộc các cạnh AB,BC,CD,DA. Hãy xác định vị trí các điểm M,N,P,Q để diện tích hình vuông MNPQ là nhỏ nhất.

2) Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Điểm M di động trên đoạn OA (M khác A), vẽ đường tròn tâm K đường kính MB. Gọi I là trung điểm của đoạn MA, đường thẳng đi qua Ivuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại C và D. Đường thẳng CB cắt đường tròn (K) tại P.

a) Chứng minh rằng ba điểm P,M,D thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng PI là tiếp tuyến của đường tròn (K).

c) Tìm vị trí của M trên đoạn OA để diện tích tam giác IPK lớn nhất.

Bài 5. *(1,0 điểm)*

Người ta làm một cái hộp hình vuông để đựng được 5 cái bánh hình tròn có đường kính 6cm, sao cho không có bất kì hai cái bánh nào được chồng lên nhau. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của cái hộp.

ĐÁP ÁN

Bài 1. *(4,0 điểm)*

1) Tìm số nguyên tố p sao cho p+10 và p+14 là các số nguyên tố.

* Với p=2 thì p+ 10 = 12 là hợp số.
* Với p=3 thì p+10 = 13 và p+14 = 17 là các số nguyên tố.
* Với p>3 mà p là số nguyên tố nên p có dạng: p=3k + 1 hoặc p=3k+2 $(k \in \mathbb{N}^*)$

-Nếup=3k+1 thì $p+14=3(k+5)\vdots 3$ là hợp số.

- Nếu p=3k + 2 thì $p+10=3(k+4)\vdots 3$ là hợp số.

Vậy p=3 thì p + 10 và p + 14 là các số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x,y của phương trình $x^2+xy-2x-3y-4=0$

Ta có: $x^2+xy-2x-3y-4=0$

$\Leftrightarrow x^2-3x+xy-3y+x-3=1$

$\Leftrightarrow x(x-3)+y(x-3)+x-3=1$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+y+1)=1$

Ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} x-3=1 \\ x+y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} x-3=-1 \\ x+y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

Vậy nghiệm nguyên của pt là (x;y)=(4;-4),(2;-4)

3) Cho ba số $a,b,c \in \mathbb{Z}$ thoả mãn $a+b+c=2022^{2023}$. Chứng minh $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

Ta có: $a^3+b^3+c^3=(a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)+(a+b+c)$

$a^3-a=(a-1)a(a+1)\vdots 6$ (tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6).

Tương tự ở $b^3-b\vdots 6, c^3-c\vdots 6$ và có $2022\vdots 6\Rightarrow a+b+c=2022^{2023}\vdots 6$

Vậy $a^3+b^3+c^3\vdots 6$

Bài 2. *(4,0 điểm)*

1) Cho biểu thức: $M=\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x+1}\right)$ với $x\geq 0$

Rút gọn biểu thức M và tính giá trị của biểu thức M khi $x=2023-2\sqrt{2022}$.

Với điều kiện $x\geq 0$

Ta có: $M=\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x+1}\right)$

$=\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x+1}:\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{(x+1)(1+\sqrt{x})}\right)$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{x+1}:\dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(1+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2(x+1)(1+\sqrt{x})}{(x+1)(\sqrt{x}-1)^2}=1+\sqrt{x}$

Khi $x=2023-2\sqrt{2022}=(\sqrt{2022}-1)^2$

Thì $M=1+\sqrt{(\sqrt{2022}-1)^2}=\sqrt{2022}$

2) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}+\dfrac{z}{z+1}$

Ta có : $\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1};\dfrac{y}{y+1}=1-\dfrac{1}{y+1};\dfrac{z}{z+1}=z-\dfrac{1}{z+1}$

$P=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}+\dfrac{z}{z+1}=3-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}\right)(*)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM với 3 số dương $a;b;c;\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}$ ta có

$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$

Nhân từng vế hai bđt ta được

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$

Dấu "=" xảy ra khi a=b=c

Áp dụng bđt trên vào (*) ta được

$P \le 3 - \frac{9}{x+1+y+1+z+1} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+1=y+1=z+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$

Vậy $\max P = \frac{3}{4}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Bài 3. *(4,0 điểm)*

1) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

ĐK: $x \ge -1$

Ta có: $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{(x+3)(x+1)} \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2x)(\sqrt{x+1}-1)=0$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x+\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{y}\right)=4 \\ x^3+\frac{x}{y^2}+\frac{x^2}{y}+\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}=2x \ (1) \\ \sqrt{x+1}=1 \quad (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 0 \\ 4x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ (x-1)(4x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1(TM)$

$(2) \Leftrightarrow x=0(TM)$

Vậy $S=\{0;1\}$

Đk: $y \ne 0$

Hệ tương đương với $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2} + x + \dfrac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{x}{y}(x + \dfrac{1}{y}) = 4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x + \dfrac{1}{y} \\ v = \dfrac{x}{y} \end{cases}$

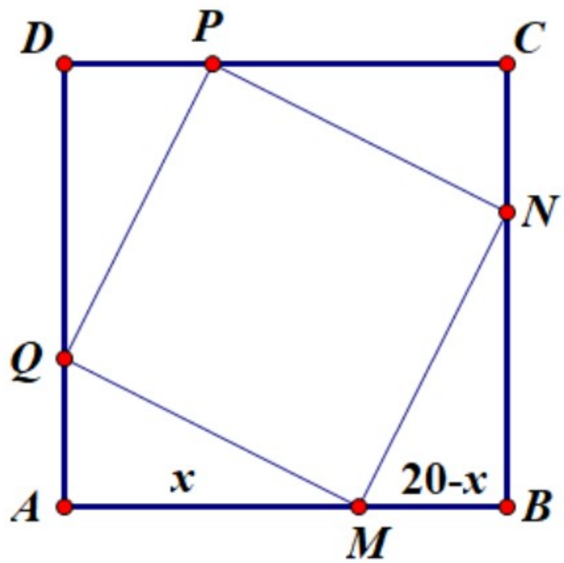
1) Một học sinh có tấm bìa hình vuông ABCD cạnh 20 cm. Em muốn cắt tấm bìa này thành bốn hình tam giác vuông bằng nhau và phần còn lại là hình vuông MNPQ thỏa mãn M,N,P,Q lần lượt thuộc các cạnh AB,BC,CD,DA. Hãy xác định vị trí các điểm M,N,P,Q để diện tích hình vuông MNPQ là nhỏ nhất.

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u^2 + u - 2v = 4 \\ u^3 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 4u + 4 = 0 \\ u^2 + u - 4 = 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (1;1).

Bài 4. *(7,0 điểm)*



Lấy các điểm $M \in AB; N \in BC; P \in CD; Q \in DA$ sao cho

$AM = BN = CP = DQ$

$\Rightarrow BM = CN = DP = AQ \Rightarrow \Delta BMN = \Delta CNP = \Delta DPQ = \Delta AQM\,(c.g.c)$

$\Rightarrow MN = NP = PQ = QM$ và $\widehat{NMB} = \widehat{MQA} \Rightarrow \widehat{NMB} + \widehat{QMA} = 90^o$

Do đó tứ giác MNPQ là hình vuông.

Diện tích MNPQ nhỏ nhất khi diện tích các tam giác vuông là lớn nhất

Đặt AM=x thì MB=AQ=20-x

$S_{AMQ} = \frac{1}{2}.AQ.AM$ lớn nhất khi AQ.AM lớn nhất.

Mà AQ+ AM = 20 (cm) không đổi nên AQ.AM lớn nhất khi AQ=AM hay x=20−x ⇔ x=10

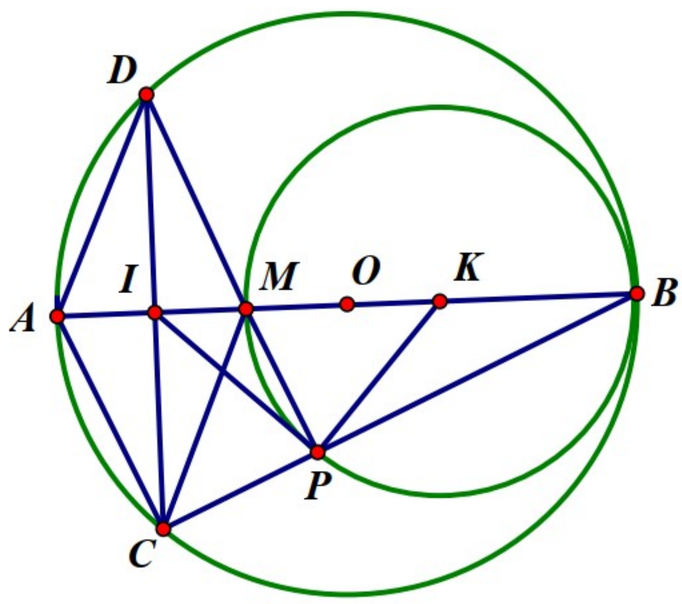
Vậy chọn M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA ta được diện tích hình vuông MNPQ nhỏ nhất.

2) Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Điểm M di động trên đoạn OA (M khác A), vẽ đường tròn tâm K đường kính MB. Gọi I là trung điểm của đoạn MA, đường thẳng đi qua I vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại C và D. Đường thẳng CB cắt đường tròn (K) tại P.

a) Chứng minh rằng ba điểm P,M,D thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng PI là tiếp tuyến của đường tròn (K).

c) Tìm vị trí của M trên đoạn OA để diện tích tam giác IPK lớn nhất.



a) Ta có:
$\widehat{MPB} = \widehat{ACB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) .
Từ đó PM //AC .(1)
Đường kính $AB \perp CD$ nên I là trung điểm của CD.

Mà I là trung điểm của AM nên tứ giác ADMC là hình bình hành. Vậy DM// AC.(2).
Từ (1) và (2) suy ra P,M,D thẳng hàng.

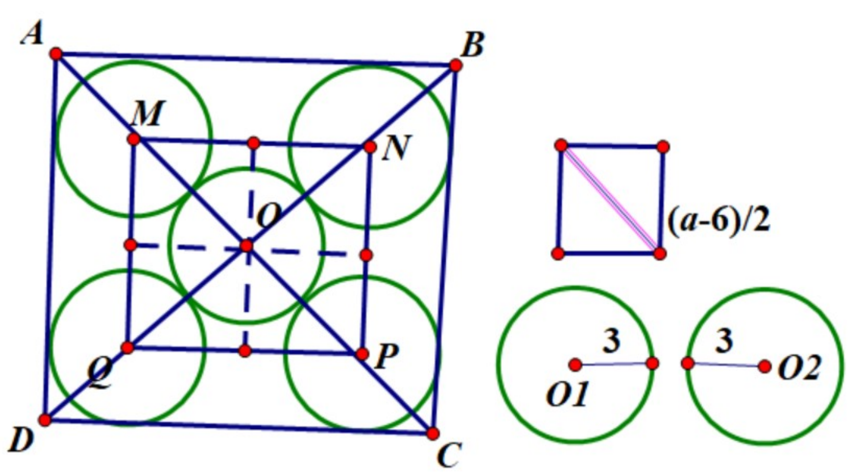
b) Ta có $\widehat{CBA} = \widehat{CDP}$ (cùng phụ với $\widehat{DCB}$).
Do tam giác PKB cân tại K nên $\widehat{CBA} = \widehat{KPB}$
Ta lại có $\widehat{CDP} = \widehat{IPD}$ (do tam giác IPD cân tại A)
Suy ra $\widehat{IPD} = \widehat{KPB}$ mà $\widehat{DPB} = 1v$, suy ra $\widehat{IPK} = 90^o$ nên $IP \perp KP$. Hay PI là tiếp tuyến của (K).

c) Vì $KM = \frac{1}{2}MB$ và $IM = \frac{1}{2}AM$ nên $IK = \frac{1}{2}AB = R$
Áp dụng định lý Pytago có $PI^2 + PK^2 = IK^2 = R^2$. (không đổi) .

Mặt khác $4S^2 = PI^2.PK^2$ (S là diện tích của tam giác IKP).
Do đó $\max(4S^2) \Leftrightarrow \max S$ khi $PI = PK = R\sqrt{\frac{1}{2}}$
mà $BM = 2PK \Rightarrow BM = \sqrt{2}R$
Vậy M cách B một khoảng bằng $\sqrt{2}R$ thì diện tích tam giác IPK lớn nhất.

Bài 5. *(1,0 điểm)*

Người ta làm một cái hộp hình vuông để đựng được 5 cái bánh hình tròn có đường kính 6cm, sao cho không có bất kì hai cái bánh nào được chồng lên nhau. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của cái hộp.



Giả sử đây cái hộp bánh là hình vuông ABCD

Gọi O là tâm hình vuông ABCD cạnh là a>6 chứa 5 cái bánh hình tròn bán kính bằng 3cm sao cho không có bất kì hai cái bánh nào trong chúng có điểm trong chung.

Suy ra tâm của năm hình tròn này nằm trong hoặc trên cạnh hình vuông MNPQ tâm O có cạnh là (a −6) ($M \in OA; N \in OB; MN // AB$ và MN cách AB một khoảng 3cm). Các đường trung bình của hình vuông MNPQ chia hình vuông này thành 4 hinh vuông nhỏ bằng nhau.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một hình vuông nhỏ chứa ít nhất hai trong năm tâm của 5 cái bánh hình tròn nói trên, chẳng hạn đó là O_1 và O_2.

Do 5 cái bánh hình tròn này không có hai cái bánh nào có điểm trong chung nên $O_1O_2 \geq 6$ (1)

Mặt khác O_1O_2 cũng nằm trong hoặc trên cạnh hình vuông nhỏ có cạnh là $\frac{a-6}{2}$ nên $O_1O_2 \leq OM = \frac{a-6}{2}.\sqrt{2} \quad (2)$

(trong đó $\frac{a-6}{2}.\sqrt{2}$ là đường chéo hình vuông nhỏ)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{a-6}{2}.\sqrt{2} \geq 6 \Leftrightarrow a \geq 6\sqrt{2} + 6$

Vậy cạnh nhỏ nhất của hộp bánh hình vuông ABCD là $6\sqrt{2} + 6$ (cm)