

Bài 1. (3,5 điểm)

a) Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$$

b) Rút gọn biểu thức:

Bài 2. (4,5 điểm).

a) Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m /$ giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

b) Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Bài 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$

Bài 4. (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, DC

a) Chứng minh $APQR$ là hình thang cân

b) Biết $AB = 6cm, AC = 8cm$. Tính độ dài của AR

Bài 5. (2,5 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng qua B cắt cạnh CD tại M, cắt đường chéo AC tại N và cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh:

$$\frac{1}{BN} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{BK}$$

Bài 6. (1,0 điểm)

Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3)=1$ nên chia hết cho 6

$18n : 6$, suy ra điều phải chứng minh

b)

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1} &= \frac{x^2 + x^2a + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - x^2a - a + a^2 + a^2x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 + x^2a + a^2x^2 + 1 + a + a^2}{x^2 - x^2a + a^2x^2 + 1 - a + a^2} = \frac{x^2(1 + a + a^2) + (1 + a + a^2)}{x^2(1 - a + a^2) + (1 - a + a^2)} \\ &= \frac{(x^2 + 1)(1 + a + a^2)}{(x^2 + 1)(1 - a + a^2)} = \frac{1 + a + a^2}{1 - a + a^2} \end{aligned}$$

Bài 2.

a) Gọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x - 1$

Thời gian đi

$$\begin{aligned} \frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} &= 2 + 4 + 6 + \dots + 2x \\ &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + x) = x(x + 1) \end{aligned}$$

Thời gian dừng:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (x - 1) = \frac{(x - 1 + 1)(x - 1)}{2} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x - 1)}{2} + x(x + 1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = \frac{-31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Khoảng cách AB là $10 \cdot (10 + 1) \cdot 2 = 220 \text{ (m)}$

b)

$$a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25$$

$$b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100$$

$$\Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 125$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5^3 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018}$$

Bài 3.

a) $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

Đặt $x^2 - x + 1 = X$ có

$$X^2 + X - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4X - 3X - 12 = 0 \Leftrightarrow X(X + 4) - 3(X + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 3)(X + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -4 \end{cases}$$

$$X = -4 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$X = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

b)

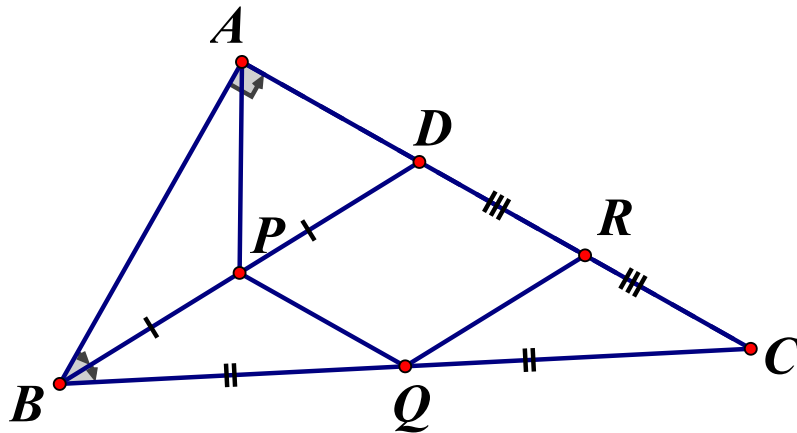
$$P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$$

$$= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 2018$$

$$= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 2018 \geq -2018$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -2018 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Bài 4.



- a) PQ là đường trung bình tam giác BDC , suy ra $PQ \parallel AR$ nên $APQR$ là hình thang.

$$AQ = \frac{1}{2} BC \quad (\text{trung tuyến tam giác vuông } ABC)$$

$$PR = \frac{1}{2} BC \quad (\text{đường trung bình tam giác } DBC)$$

Suy ra $AQ = PR \Rightarrow APQR$ là hình thang cân

- b) Tính được $BC = 10\text{cm}$

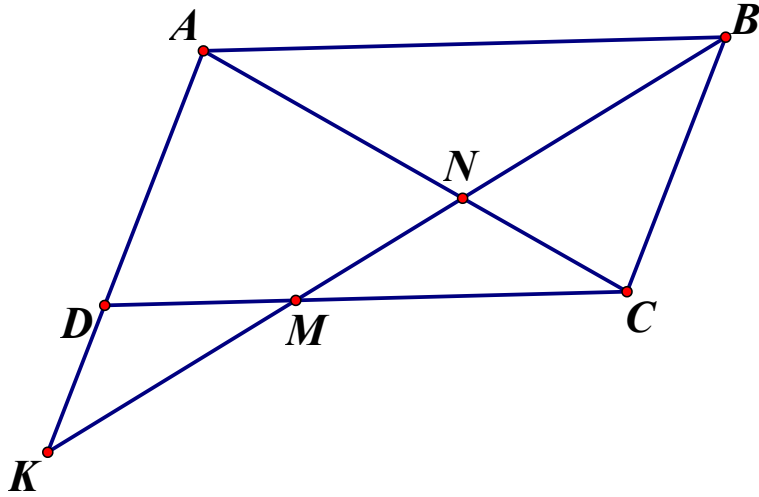
Tính chất đường phân giác trong của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{BA}{BC + BC}$$

Thay số tính đúng $AD = 3\text{cm}, DC = 5\text{cm}, DR = 2,5\text{cm}$

Kết quả $AR = 5,5\text{cm}$

Bài 5.



$AB \parallel AC$ (hai cạnh đối diện hình bình hành). Theo định lý Talet có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AN} = \frac{MN}{NB} \Rightarrow \frac{MC + AB}{AB} = \frac{MN + NB}{BN} = \frac{BM}{BN} \quad (1)$$

$$\frac{KM}{BK} = \frac{KD}{KA} = \frac{MD}{AB} \Rightarrow \frac{BK - KM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = \frac{AB + MC}{AB} - \frac{AB - MD}{AB} = \frac{MC + MD}{AB}$$

Từ (1) và (2) $\frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = 1$
 Mà $MC + MD = CD = AB$ nên $\frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = 1$ (Điều phải chứng minh)

Bài 6.

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)$$

$$= [(a+b)^2 - c^2] [(a-b)^2 - c^2]$$

$$= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.