

Chuyên đề 2.

PHƯƠNG PHÁP QUY nạp TOÁN HỌC VÀ NHỊ THỨC NEWTON

Chuyên đề này có hai nội dung trọng tâm.

Đầu tiên, chúng ta sẽ đi tìm hiểu về phương pháp quy nạp toán học, một công cụ quan trọng và hiệu quả của toán học. Chúng ta làm quen và thực hành sử dụng phương pháp này để chứng minh nhiều loại mệnh đề toán học khác nhau.

Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu sâu hơn và đầy đủ hơn về công thức nhị thức Newton và tam giác Pascal, cũng như thực hành và vận dụng chúng trong giải toán.



Sau chuyên đề này, bạn có thể:

- Sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh nhiều mệnh đề toán học khác nhau.
- Sử dụng công thức nhị thức Newton và tam giác Pascal để khai triển các biểu thức dạng $(a + b)^n$; vận dụng công thức khai triển giải một số bài toán liên quan.

Bài 1. Phương pháp quy nạp toán học

Từ khoá: Quy nạp toán học: Giả thiết quy nạp.

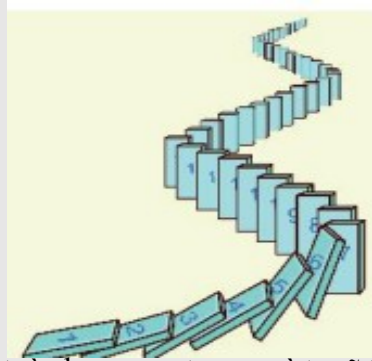


Trong một trò chơi domino, các quân domino được xếp theo thứ tự từ quân đầu tiên đến quân cuối cùng. Biết rằng xảy ra hai điều sau:

- 1) Quân domino đầu tiên đổ;
- (2) Nếu quân thứ k đổ thì quân thứ $k + 1$ đổ.

Có thể kết luận rằng tất cả các quân domino đều đổ không? Hãy giải thích.

Trò chơi domino như trên là hình ảnh mô phỏng của một nguyên lý toán học quan trọng mà ta sẽ tìm hiểu trong bài này.



1. Phương pháp quy nạp toán học

Bằng cách tô màu trên lưới ô vuông như hình dưới đây.

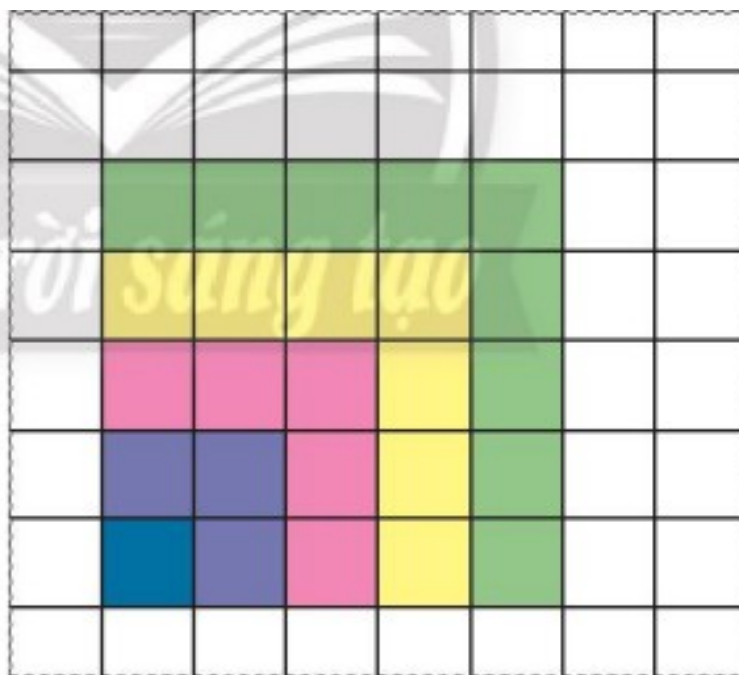
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 = 1^2$$



Hình 1

một học sinh phát hiện ra công thức sau:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

a) Hãy chỉ ra công thức (1) đúng với $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Từ việc tô màu trên lưới ô vuông như Hình 1, bạn học sinh khẳng định rằng công thức (1) chắc chắn đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. Khẳng định như vậy đã thuyết phục chưa? Tại sao?

Với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$, công thức (1) là một mệnh đề toán học (mệnh đề) tại mỗi mệnh đề này phụ thuộc số tự nhiên $n \geq 1$.

Mỗi lần tô thêm một hàng và cột những ô vuông, bạn học sinh đã kiểm nghiệm công thức (1) thêm một trường hợp của n . Tuy nhiên, bởi tập hợp $\mathbb{N}^*$ là vô hạn nên cách làm đó không thể chứng tỏ công thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Để đạt được điều này, ta cần dùng suy luận.

Nguyên lý quy nạp toán học cho ta một phương pháp suy luận mạnh mẽ và hiệu quả để chứng minh nhiều mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên

Nguyên lý quy nạp toán học

Giả sử với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$, $P(n)$ là một mệnh đề, Giả sử hai điều kiện sau thoả mãn:

- 1) $P(1)$ đúng,
- 2) Với mọi số tự nhiên $k \geq 1$, nếu $P(k)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng.

Khi đó, $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Để chứng minh một mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta cần thực hiện hai bước:

Bước 1. Chỉ ra mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả sử mệnh đề đúng với số tự nhiên $n = k \geq 1$ (gọi là **giả thiết quy nạp**), chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Từ đó, theo nguyên lý quy nạp toán học, ta kết luận mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$

Ví dụ 1

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh công thức (1) trong  đúng với $n \in \mathbb{N}^*$

Giải

Bước 1. Với $n = 1$, công thức (1) trở thành $1 = 1^2$.

Đây là mệnh đề đúng, Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là ta có

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= [1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1)] + (2k + 1) \\ &= k^2 + (2k + 1) \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Chú ý: Đôi khi, ta cần chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$, với n_0 là số tự nhiên nào đó: Khi đó, trong chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học, ở Bước 1 ta chỉ ra mệnh đề đúng với $n = n_0$, và ở Bước 2 ta giả thiết mệnh đề đúng với $n = k \geq n_0$.

Ví dụ 2

Chứng minh rằng bất đẳng thức $2^n > n^2$ ở đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 5$

Giải

Bước 1. Với $n = 5$, ta có $2^n = 2^5 = 32$ và $n^2 = 5^2 = 25$. Vì $32 > 25$ nên bất đẳng thức đúng với $n = 5$.

Bước 2. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 5$, nghĩa là có

$$2^k > k^2$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh

$$2^{k+1} > (k + 1)^2$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, với lưu ý $k \geq 5$, ta có

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &> 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 5k = k^2 + 2k + 3k \\ &> k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 5$.



Chứng minh rằng đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

$$2^{n+1} > n^2 + n + 2$$

2. Ứng dụng phương pháp quy nạp toán học

Phương pháp quy nạp toán học được sử dụng trong nhiều lĩnh vực toán học khác nhau (số học, đại số, hình học, giải tích, ...). Dưới đây, ta xét thêm một vài ứng dụng

Ví dụ 3

Chứng minh rằng $3^{2n+2} - 8n - 9$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Giải

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, xét mệnh đề $(3^{2n+2} - 8n - 9) : 64$. Ta cần chứng minh mệnh đề này đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bước 1. Với $n = 1$, ta có

$$3^{2n+2} - 8n - 9 = 3^4 - 8 - 9 = 81 - 8 - 9 = 64 : 64.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là có $(3^{2k+2} - 8k - 9) : 64$.

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh

$$3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 : 64$$

Ta có

$$3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 = 9 \cdot 3^{2(k+1)} - 8k - 17 = 9(3^{2(k+1)} - 8k - 9) : 64$$

Tổng này có số hạng đầu chia hết cho 64 (do giả thiết quy nạp) và số hạng thứ hai đương nhiên chia hết cho 64, nên nó chia hết cho 64, Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

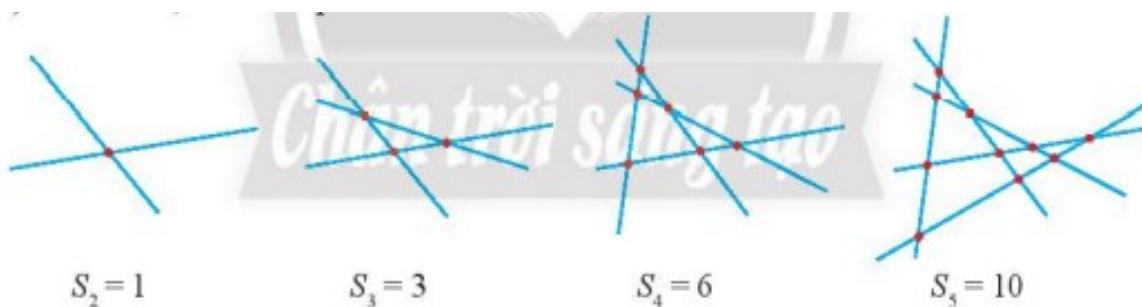
Ví dụ 4

Trong mặt phẳng, cho n ($n \geq 2$) đường thẳng, trong đó không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Gọi S_n , là số giao điểm của n đường thẳng này

- Tính S_2, S_3, S_4, S_5 ứng với trường hợp có 2, 3, 4, 5 đường thẳng
- Từ đó, dự đoán công thức tính S_n , và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

Giải

- Từ hình vẽ, ta có kết quả như sau.



- Ta có:

$$S_2 = 1,$$

$$S_3 = 3 = S_2 + 2 = 1 + 2;$$

$$S_4 = 6 = S_3 + 3 = 1 + 2 + 3,$$

$$S_5 = 10 = S_4 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4.$$

Từ đó, ta dự đoán rằng

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2} \quad (2)$$

với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Ta sẽ chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp toán học,

Bước 1. Với $n = 2$, ta có $S_2 = 1$ và $\frac{n(n-1)}{2} = 1$ nên công thức (2) đúng với $n=2$

Bước 2. Giả sử (2) đúng với $n = k \geq 2$ nghĩa là có $S_k = \frac{k(k-1)}{2}$. Ta chứng minh (2) đúng với mọi $n = k+1$, nghĩa là cần chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)k}{2}$$

Gọi đường thẳng thứ $k + 1$ là d . Theo giả thiết quy nạp, k đường thẳng đã cho cắt nhau tại

$S_k = \frac{k(k-1)}{2}$ điểm. Mặt khác, do không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy nên đường thẳng d cắt k đường thẳng đó tại k điểm khác nhau và khác với S_k điểm kia. Do đó, số giao điểm của $k + 1$ đường thẳng này là

$$S_{k+1} = S_k + k = \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{(k+1)k}{2}$$

Vậy công thức (2) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, công thức (2) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$



Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.



Chứng minh rằng đẳng thức sau đây đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$



5 Chứng minh rằng trong mặt phẳng, n đường thẳng khác nhau cùng đi qua một điểm chia mặt phẳng thành $2n$ phần ($n \in \mathbb{N}^*$.)



(Công thức lãi kép) Một khoản tiền A đồng (gọi là vốn) được gửi tiết kiệm có kì hạn ở một ngân hàng theo thể thức lãi kép (tiền lãi sau mỗi kì hạn nếu không rút ra thì được cộng vào vốn của kì kế tiếp). Giả sử lãi suất theo kì là r không đổi qua các kì hạn, người gửi không rút tiền vốn và lãi trong suốt các kì hạn đề cập sau đây. Gọi T_n là tổng số tiền vốn và lãi của người gửi sau kì hạn thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Tính T_1, T_2, T_3

b) Từ đó, dự đoán công thức tính T_n , và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

BÀI TẬP

1. Chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots = n(n+1) - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

b) $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

2. Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $5^{2n} - 1$ chia hết cho 24;

b) $n^3 + 5n$ chia hết cho 6

3. Chứng minh rằng nếu $x > -1$ thì $(1+x)^n \geq 1+nx$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^n$$

5. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}$$

6. Trong mặt phẳng, cho đa giác $A_1A_2A_3 \dots A_n$, có n cạnh ($n \geq 3$). Gọi S là tổng số đo các góc trong của đa giác.

a) Tính S_3, S_4, S_5 , tương ứng với trường hợp đa giác là tam giác, tứ giác, ngũ giác.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính S_n , và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

7. Hàng tháng, một người gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiết kiệm không đổi a đồng. Giả sử lãi suất hằng tháng là r không đổi và theo thể thức lãi kép (tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn của tháng kế tiếp). Gọi T_n ($n \geq 1$) là tổng tiền vốn và lãi của người đó có trong ngân hàng tại thời điểm ngay sau khi gửi vào khoản thứ $n + 1$.

a) Tính T_1, T_2, T_3

b) Dự đoán công thức tính T_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

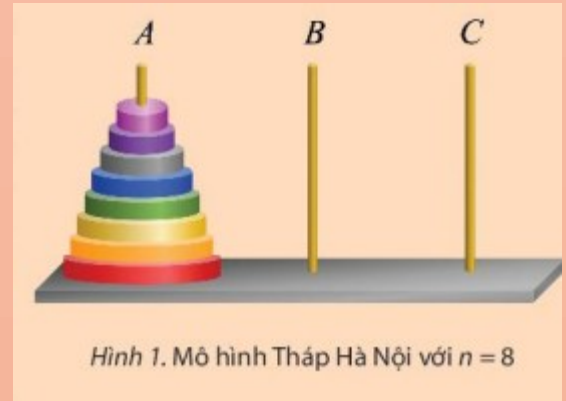
Gợi ý: Lưu ý công thức ở



Bạn có biết?

Bài toán Tháp Hà Nội

Bài toán Tháp Hà Nội là một trò chơi toán học được nhà toán học người Pháp Édouard Lucas (1842 - 1891) phát hiện vào năm 1883. Ngày nay bài toán trở nên nổi tiếng trên thế giới, đặc biệt trong lĩnh vực Khoa học máy tính. Tháp Hà Nội trong trò chơi này gồm ba cột A, B, C và n đĩa có đường kính khác nhau. Mỗi đĩa có lỗ ở giữa để có thể luồn vào các cột (xem Hình 1). Lúc đầu các đĩa đều ở cột A, theo thứ tự “nhỏ trên lớn dưới”. Mục đích của trò chơi là chuyển tất cả các đĩa từ cột A sang cột C (cột B chỉ đóng vai trò trung chuyển) sao cho thoả mãn hai điều kiện:



Hình 1. Mô hình Tháp Hà Nội với $n = 8$

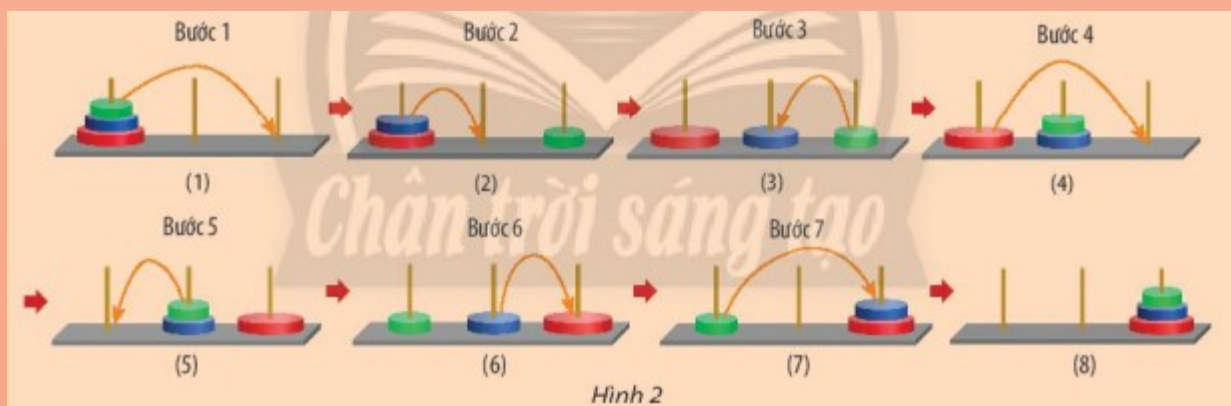
1. Mỗi bước chỉ được chuyển một đĩa
2. Các đĩa được chuyển qua lại giữa các cột, nhưng ở bất cứ thời điểm nào các đĩa trên mỗi cột đều “nhỏ trên lớn dưới”.

Bài toán đặt ra là:

Làm thế nào để chuyển các đĩa từ cột A sang cột C?

Số bước ít nhất bằng bao nhiêu?

Gọi S_n là số bước ít nhất để chuyển n đĩa từ cột A sang cột C ($n \in \mathbb{N}^*$). Có thể dễ dàng chỉ ra $S_1=1$, $S_2=3$. Với $n = 3$, ta thực hiện các bước như Hình 2 dưới đây và nhận được $S_3=7$



Hình 2

Giữa S_3 và S_2 , có mối liên hệ. Thật vậy, để chuyển từ trạng thái đầu tiên đến trạng thái (4) ta cần S_2 bước chuyển (Bước 1, 2, 3). Tiếp đó, thực hiện một bước (Bước 4) để chuyển trạng thái (4) sang trạng thái (5). Tiếp theo, thực hiện S_2 (Bước 5, 6, 7) để chuyển trạng thái (5) đến trạng thái (8). Từ đó, ta có $S_3=2S_2+1$.

Tổng quát hoá quá trình trên, ta có thể tìm được mối liên hệ giữa S_n và S_{n-1} ($n \geq 2$)

Từ đó, có thể dự đoán công thức tổng quát:

$$S_n = 2^n - 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

và chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bạn hãy thử thực hiện điều này nhé

Các bạn có thể cùng chơi trò chơi thú vị và bổ ích này với các vật dụng sẵn có xung quanh như đồng xu, quyển sách, . thay thế cho các đĩa ở trên.