NDTuanMAT@yahoo.com.vn
Trường ĐH KHTN TP.HCM

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN thi Học sinh giỏi Quốc gia THPT

NĂM HỌC 2006 - 2007

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV Trường ĐHSP Hà Nội)

LTS. *Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn toán THPT năm học 2006-2007 được tiến hành vào ngày 8/2/2007. Hình thức thi năm nay có thay đổi so với các năm trước. Trong buổi thi, mỗi thí sinh phải giải 7 bài toán trong thời gian là 180 phút. Điểm tối đa cho bài thi là 20 điểm. Sau đây là đáp án các bài toán thi.*

Câu 1. (2 *điểm*)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x}=2\\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y}=6.\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x>0, y>0$; $y+3x\neq 0$.

Hệ PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases}1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\\ 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=1 & (1)\\ -\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=\dfrac{12}{y+3x} & (2)\end{cases}$$

Nhân (1) và (2) theo vế ta được

$$\frac{9}{y}-\frac{1}{x}=\frac{12}{y+3x}\Leftrightarrow y^2+6xy-27x^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=3x\\ y=-9x.\end{array}\right.$$

Do $x>0, y>0$, nên $y=3x$.

Thế vào PT (1), ta được $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{3x}}=1$ suy ra $x=4+2\sqrt{3}$; $y=12+6\sqrt{3}$.

Câu 2. (3 *điểm*)

Cho x, y là các số nguyên, $x\neq -1$ và $y\neq -1$ sao cho $\dfrac{x^4-1}{y+1}+\dfrac{y^4-1}{x+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $x^4y^{44}-1$ chia hết cho $x+1$.

Lời giải. Ta chứng minh y^4-1 chia hết cho $x+1$.

Đặt $\dfrac{x^4-1}{y+1}=\dfrac{a}{b}$; $\dfrac{y^4-1}{x+1}=\dfrac{c}{d}$,

trong đó $a, b, c, d\in\mathbb{Z}$

$(a,b)=1$; $(c,d)=1$; $b>0, d>0$.

Từ giả thiết, ta có $\dfrac{ad+bc}{bd}$ nguyên, suy ra $d\,\vdots\, b$ và $b\,\vdots\, d$ nên $b=d$. Mặt khác, do $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}$ nguyên ; $(a, b) = 1$ và $(c, d) = 1$, nên $b = d = 1$.

Vậy y^4-1 chia hết cho $x+1$.

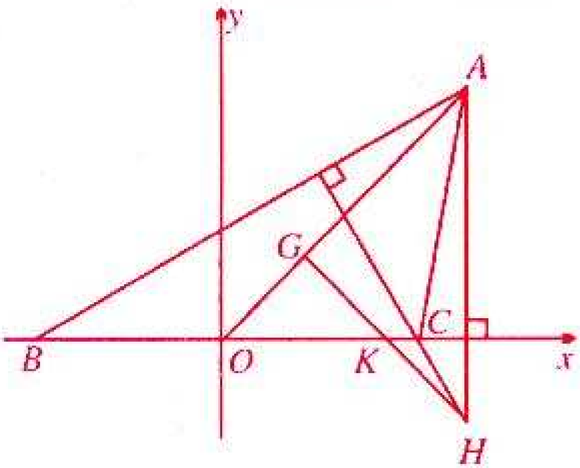
Từ đó $x^4y^{44}-1=x^4(y^{44}-1)+x^4-1$ chia hết cho $x+1$ (do $y^{44}-1$ chia hết cho y^4-1 nên nó chia hết cho $x+1$ và x^4-1 chia hết cho $x+1$).

Câu 3. (3 *điểm*)

Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi. Gọi H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm A, biết rằng trung điểm K của HG thuộc đường thẳng BC.

Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy với O là trung điểm BC và trục Ox là đường thẳng BC (hình vẽ).



Đặt $BC = 2a > 0$. Khi đó các đỉnh B, C có tọa độ là $B(-a\ ;\ 0)$; $C(a\ ;\ 0)$. Giả sử $A(x_0\ ;\ y_0)(y_0 \neq 0)$. Khi đó toạ độ trực tâm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 \\ (x+a)(a-x_0) - y_0 y = 0 \end{cases}$

suy ra $H\left(x_0; \dfrac{a^2 - x_0^2}{y_0}\right)$.

Tọa độ trọng tâm G là $G\left(\dfrac{x_0}{3}; \dfrac{y_0}{3}\right)$.

Tọa độ trung điểm K của HG là

$$K\left(\frac{2x_0}{3}; \frac{3a^2 - 3x_0^2 + y_0^2}{6y_0}\right).$$

K thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi

$3a^2 - 3x_0^2 + y_0^2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{3a^2} = 1$ (với $y_0 \neq 0$).

Vậy quỹ tích A là hyperbol có PT $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{3a^2} = 1$ trừ đi hai điểm B, C.

Câu 4. (*3 điểm*)

Cho một đa giác đều 2007 đỉnh. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất thoả mãn tính chất: Trong mỗi cách chọn k đỉnh của đa giác luôn tồn tại 4 đỉnh tạo thành một tứ giác lồi mà 3 trong số 4 cạnh của nó là 3 cạnh của đa giác đã cho.

Lời giải.

Gọi các đỉnh của đa giác đều đã cho là A_1, A_2, ..., A_{2007}.

Chú ý rằng tứ giác (tạo nên từ 4 trong số các đỉnh của đa giác) có 3 cạnh là 3 cạnh của đa giác khi và chỉ khi 4 đỉnh của tứ giác đó là 4 đỉnh liên tiếp của đa giác.

Gọi A là tập các đỉnh: $\{A_1, A_2, A_3, A_5, A_6, A_7, \ldots, A_{2005}, A_{2006}\}$ (bỏ đi các đỉnh A_{4i}, $i = 1, \ldots, 501$ và A_{2007}). Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập A. Hiển nhiên $|A| = 1505$ và trong A không chứa 4 đỉnh liên tiếp nào của đa giác. Dễ thấy, mọi tập con của A đều không chứa 4 đỉnh liên tiếp của đa giác. Vậy $k \geq 1506$. Ta sẽ chứng minh mọi cách chọn 1506 đỉnh tùy ý của đa giác thì sẽ tồn tại 4 đỉnh liên tiếp của đa giác trong 1506 đỉnh đó. Thật vậy, giả sử T là một tập gồm 1506 đỉnh tuỳ ý của đa giác. Phân hoạch tập các đỉnh của đa giác thành các tập hợp

$B_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$;

$B_2 = \{A_5, A_6, A_7, A_8\}$;

. . . .

$B_{501} = \{A_{2001}, A_{2002}, A_{2003}, A_{2004}\}$;

$B_{502} = \{A_{2005}, A_{2006}, A_{2007}\}$.

Giả sử T không chứa 4 đỉnh liên tiếp của đa giác. Lúc đó với mỗi $i = 1, \ldots, 501$, tập B_i không thuộc T, tức là mỗi tập B_i đó sẽ có ít nhất một đỉnh không thuộc T. Khi đó $|T| \leq 3 \times 502 = 1506$. Do $|T| = 1506$ nên $B_{502} \subset T$ và mỗi tập B_i ($i = 1, \ldots, 501$) có đúng 3 phần tử thuộc T.

Ta có $A_{2005}, A_{2006}, A_{2007} \in T$ suy ra $A_1 \notin T$
$\Rightarrow A_2, A_3, A_4 \in T \Rightarrow A_5 \notin T \Rightarrow A_6, A_7, A_8 \in T \ldots$
$\Rightarrow A_{2002}, A_{2003}, A_{2004} \in T$.

Khi đó 4 đỉnh liên tiếp $A_{2002}, A_{2003}, A_{2004}, A_{2005}$ thuộc T, mâu thuẫn.

Vậy $k = 1506$.

Lưu ý. *Có thể giải ngắn gọn hơn bằng cách xét* $2007 - 1506 = 501$ *điểm còn lại chia đường tròn ngoại tiếp đa giác đều đã cho không quá* 501 *cung, và phải có một cung trong chúng chứa không ít hơn* $\dfrac{1506}{501} > 3$ *đỉnh liên tiếp.*

(Kì sau đăng tiếp)

(Kì sau đăng tiếp)

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN thi Học sinh giỏi Quốc gia THPT

NĂM HỌC 2006 - 2007

(Tiếp theo kì trước)

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV Trường ĐHSP Hà Nội)

Câu 5. (*3 điểm*)

Cho b là một số thực dương. Hãy xác định tất cả các hàm số f xác định trên tập các số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thoả mãn phương trình

$$f(x+y)=f(x).3^{b^y+f(y)-1}+b^x(3^{b^y+f(y)-1}-b^y),$$
$\forall x, y\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$f(x+y)+b^{x+y}=(f(x)+b^x)3^{b^y+f(y)-1}$$
$$\forall x, y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Đặt $g(x)=f(x)+b^x$. Khi đó (1) có dạng

$$g(x+y)=g(x)3^{g(y)-1}\quad \forall x, y\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Thay $y=0$ vào PT (2) ta được

$$g(x)=g(x)3^{g(0)-1}\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R} \\ g(0)=1. \end{array}\right.$$

• Với $g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ thì $f(x)=-b^x$.

• Với $g(0)=1$, thế $x=0$ vào PT (2) ta được

$$g(y)=g(0)3^{g(y)-1} \Leftrightarrow g(y)=3^{g(y)-1}$$
$$\Leftrightarrow 3^{g(y)-1}-g(y)=0 \quad \forall y\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

Xét hàm số $h(t)=3^{t-1}-t$ có $h'(t)=3^{t-1}\ln 3-1$.
$h'(t)=0 \Leftrightarrow t=\log_3(\log_3 e)+1<1$.

Ta có bảng biến thiên sau, với
$a=\log_3 e-\log_3(\log_3 e)-1<0$.

t	$-\infty$		$\log_3(\log_3 e)+1$		1		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(t)$	$+\infty$	↘	a	↗	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy PT $h(t)=0$ có hai nghiệm $t_1=1$ và $t_2=c$, với $0<c<1$ $\left(\text{vì } h(0)=\dfrac{1}{3}\right)$. Tức là $g(y)=3^{g(y)-1}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(y)=1 \\ g(y)=c,\ 0<c<1. \end{array}\right. \forall y\in\mathbb{R} \qquad (4)$$

Giả sử tồn tại $y_0\in\mathbb{R}$ sao cho $g(y_0)=c$. Khi đó

$$1=g(0)=g(y_0-y_0)=g(-y_0).3^{g(y_0)-1}=c.g(-y_0).$$

Suy ra $g(-y_0)=\dfrac{1}{c}\neq c$, mâu thuẫn với (4). Vậy $g(y)=1\ \ \forall y\in\mathbb{R}$, suy ra $f(x)=1-b^x$.

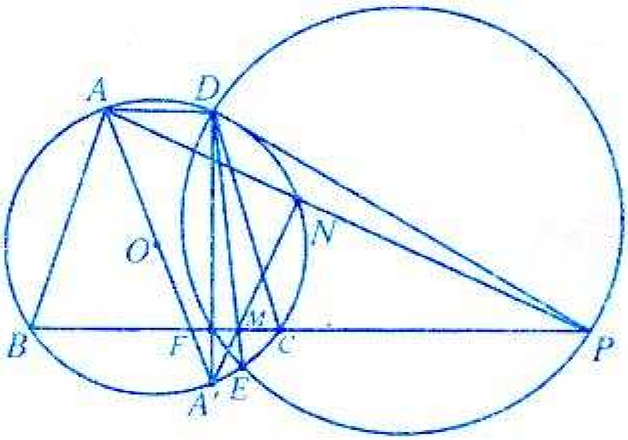
Vậy có hai hàm số thỏa mãn đề bài là
$f(x)=-b^x$ và $f(x)=1-b^x$.

Câu 6. (*3 điểm*)

Cho hình thang ABCD có đáy lớn BC và nội tiếp đường tròn (O) tâm O. Gọi P là một điểm thay đổi trên đường thẳng BC và nằm ngoài đoạn BC sao cho PA không là tiếp tuyến của đường tròn (O). Đường tròn đường kính PD cắt (O) tại E (E khác D). Gọi M là giao điểm của BC với DE, N là giao điểm khác A của PA với (O). Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua tâm O. Ta chứng minh N, M, A' thẳng hàng, từ đó suy ra MN đi qua A' cố định.



Thật vậy, trước tiên ta có DE là trục đẳng phương của đường tròn (O) và đường tròn (γ_1) đường kính PD. Để ý $\widehat{PNA'} = 90^\circ$ nên NA' là trục đẳng phương của đường tròn (O) và đường tròn (γ_2) đường kính PA'.

Giả sử DA' cắt BC tại F, do $\widehat{ADA'} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PFA'} = 90^\circ$ nên BC là trục đẳng phương của (γ_1) và (γ_2). Vì các trục đẳng phương đồng quy tại tâm đẳng phương, suy ra DE, BC và NA' đồng quy tại điểm M, vậy M, N, A' thẳng hàng.

Câu 7. (*3 điểm*)

Cho số thực $a > 2$.

Đặt $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \dots + x + 1$ $(n = 1, 2, \dots)$. Chứng minh rằng với mỗi n phương trình $f_n(x) = a$ có đúng một nghiệm $x_n \in (0; +\infty)$ và dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Lời giải

Với mỗi n, đặt $g_n(x) = f_n(x) - a$; khi đó $g_n(x)$ là hàm liên tục, tăng trên $[0; +\infty)$. Ta có $g_n(0) = 1 - a < 0$; $g_n(1) = a^{10} + n + 1 - a > 0$, nên $g_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_n trên $(0; +\infty)$.

Để chứng minh tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, ta chứng minh dãy (x_n) $(n = 1, 2, \dots)$ tăng và bị chặn.

Ta có

$$g_n\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a^{10}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+10} + \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}}{\frac{1}{a}} - a$$

$$= a\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}\left(a^9\left(1 - \frac{1}{a}\right)^9 - 1\right)$$

$$= a\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}\left((a-1)^9 - 1\right) > 0.$$

Suy ra $x_n < 1 - \dfrac{1}{a}$, $n = 1, 2, \dots$

Mặt khác, từ

$g_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+10} + x_n^n + \dots + 1 - a = 0$, suy ra

$x_n g_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + \dots + x_n - ax_n = 0$

$\Rightarrow g_{n+1}(x_n) = x_n g_n(x_n) + 1 + ax_n - a = ax_n + 1 - a < 0$,

do $x_n < 1 - \dfrac{1}{a}$.

Vì g_{n+1} là hàm tăng và $0 = g_{n+1}(x_{n+1}) > g_{n+1}(x_n)$ nên $x_n < x_{n+1}$. Vậy dãy (x_n) $(n = 1, 2, \dots)$ tăng và bị chặn, nên tồn tại $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Nhận xét. *Có thể chứng minh $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1 - \dfrac{1}{a}$ bằng cách đánh giá bất đẳng thức*

$$1 - \frac{1}{a} - a\left((a-1)^9 - 1\right)\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1} < x_n < 1 - \frac{1}{a}.$$

Thật vậy, ta có

$$a = a^{10}x_n^{n+10} + x_n^n + \dots + x_n + 1$$

$$< a^{10}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+10} + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^n + \dots + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + x_n + 1.$$

Suy ra

$$a < a^{10}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+10} + a\left(\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}\right) + x_n + 1,$$

kéo theo

$$x_n > 1 - \frac{1}{a} - a\left((a-1)^9 - 1\right)\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}$$