

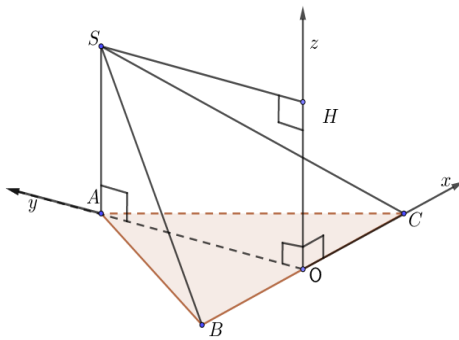
CHỦ ĐỀ 3

ỨNG DỤNG MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

I. Gắn tọa độ đối với hình chóp

1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

Đáy là tam giác đều

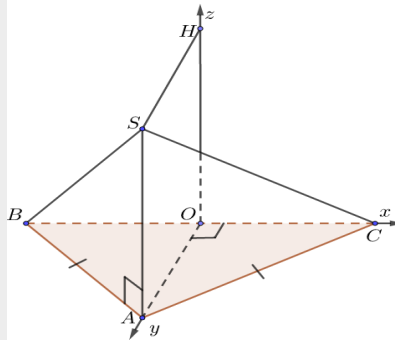


▪ Gọi O là trung điểm BC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = a = 1$.

▪ Tọa độ các điểm là:

$$O(0;0;0), A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right), C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$$

Đáy là tam giác cân tại A

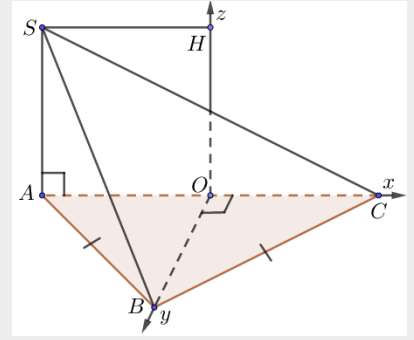


▪ Gọi O là trung điểm BC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

▪ Tọa độ các điểm là:

$$O(0;0;0), A(0;OA;0), B(-OB;0;0), C(OC;0;0), S\left(0;OA;\frac{a}{2}\right)$$

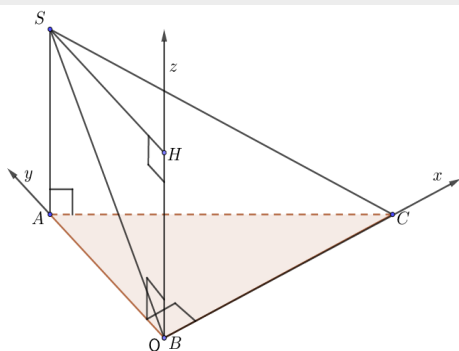
Đáy là tam giác cân tại B



▪ Gọi O là trung điểm AC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

▪ Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\frac{a}{2}\right)$.

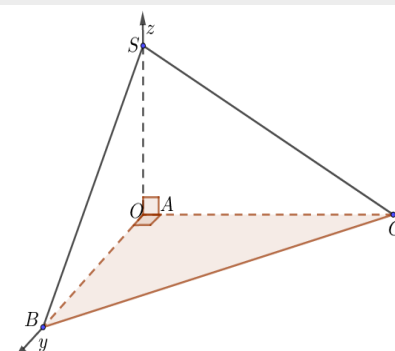
Đáy là tam giác vuông tại B



▪ Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

▪ Tọa độ các điểm: $B \equiv O(0;0;0)$, $A(0;AB;0)$, $C(BC;0;0)$, $S\left(0;AB;\frac{a}{2}\right)$.

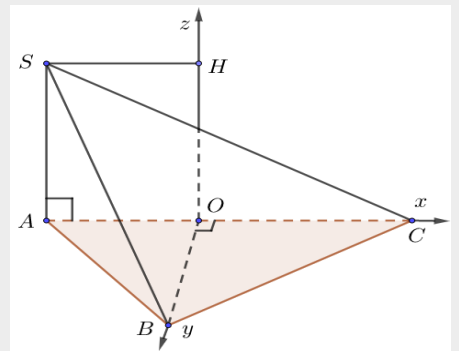
Đáy là tam giác vuông tại A



▪ Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

▪ Tọa độ các điểm: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

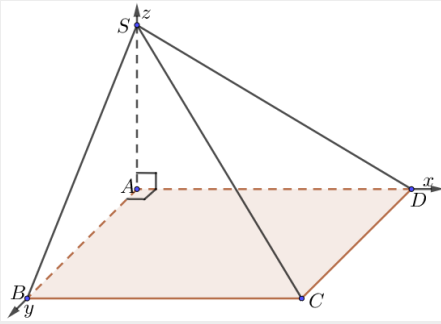
Đáy là tam giác thường



▪ Dựng đường cao BO của $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

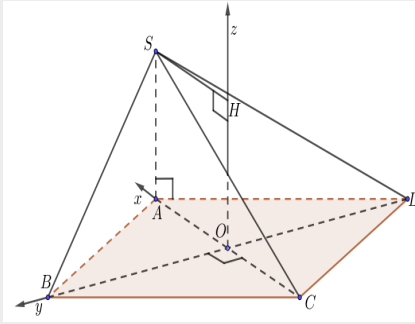
▪ Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\frac{a}{2}\right)$.

Đáy hình vuông, hình chữ nhật



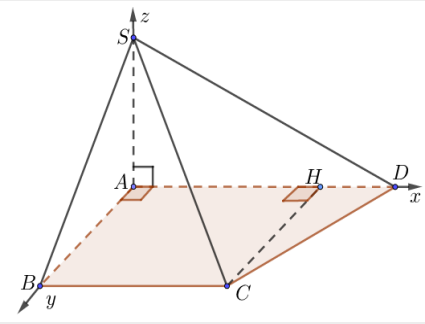
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $A \equiv O(0; 0; 0)$,
 $B(0; AB; 0)$,
 $C(AD; AB; 0)$, $D(AD; 0; 0)$, $S(0; 0; SA)$

Đáy là hình thoi



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $O(0; 0; 0)$,
 $A(OA; 0; 0)$,
 $B(0; OB; 0)$, $C(-OC; 0; 0)$
 $D(0; -OD; 0)$, $S\left(OA; 0; \frac{SA}{2}\right)$

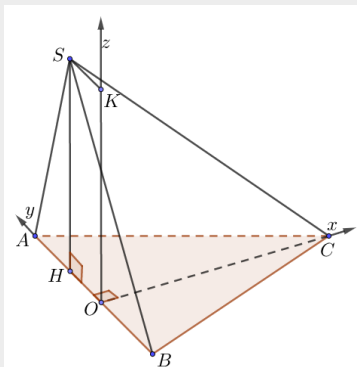
Đáy là hình thang vuông



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $A \equiv O(0; 0; 0)$,
 $B(0; AB; 0)$, $C(AH; AB; 0)$,
 $D(AD; 0; 0)$, $S(0; 0; SA)$.

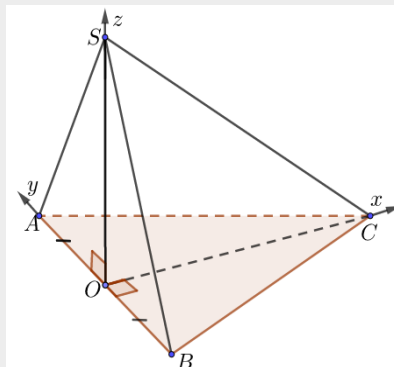
2. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



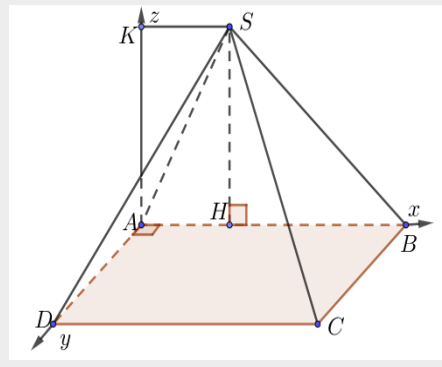
- Vẽ đường cao CO trong ΔABC . Chọn hệ trục như hình, $a = 1$.
- Ta có:
 $O(0; 0; 0)$, $A(0; OA; 0)$, $B(0; -OB; 0)$,
 $C(OC; 0; 0)$, $S\left(0; OH; \frac{SK}{SH}\right)$

Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình, $a = 1$.
- Ta có: $O(0; 0; 0)$, $A(0; OA; 0)$,
 $B(0; -OB; 0)$, $C(OC; 0; 0)$, $S(0; 0; SO)$

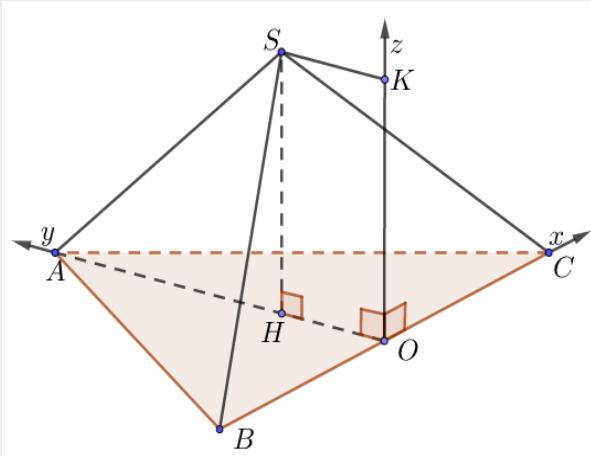
Đáy là hình vuông-hình chữ nhật



- Dựng hệ trục như hình, chọn $a = 1$.
- Ta có:
 $A \equiv O(0; 0; 0)$, $B(AB; 0; 0)$, $C(AB; AD; 0)$,
 $D(0; AD; 0)$, $S\left(AH; 0; \frac{SK}{SH}\right)$

3. Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều



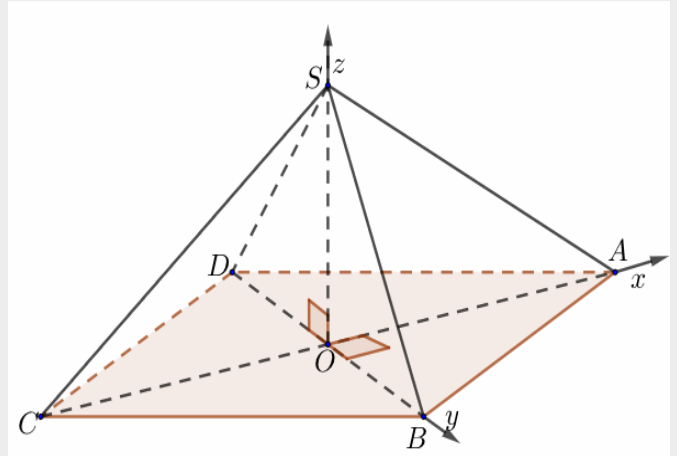
Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và $a = 1$.

Tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(-\frac{BC}{2}; 0; 0\right),$$

$$C\left(\frac{BC}{2}; 0; 0\right), S\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; SK\right)$$

Hình chóp tứ giác đều



Chọn hệ trục như hình với $a = 1$.

Tọa độ điểm:

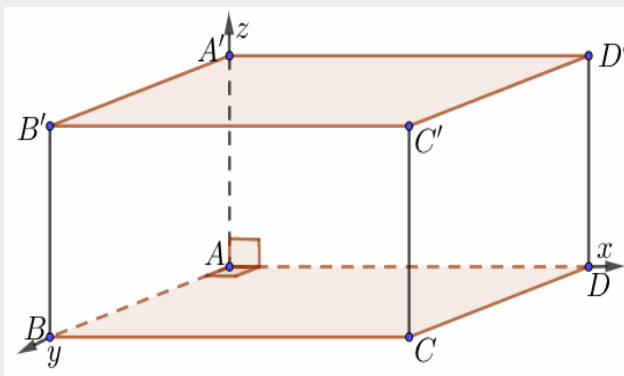
$$O(0;0;0), A\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0\right),$$

$$C\left(-\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; -\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0\right); S(0;0;SO)$$

II. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

1. Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



Dựng hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0),$$

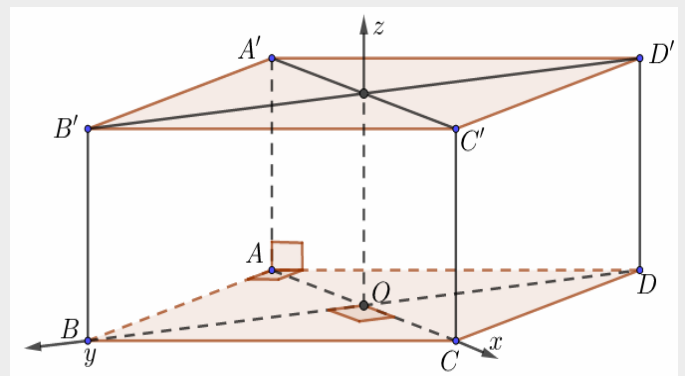
$$B(0;AB;0), C(AD;AB;0),$$

$$D(AD;0;0),$$

$$A'(0;0;AA'),$$

$$B'(0;AB;AA'), C'(AD;AB;AA'), D'(AD;0;AA').$$

Lăng trụ đứng đáy là hình thoi



Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình với

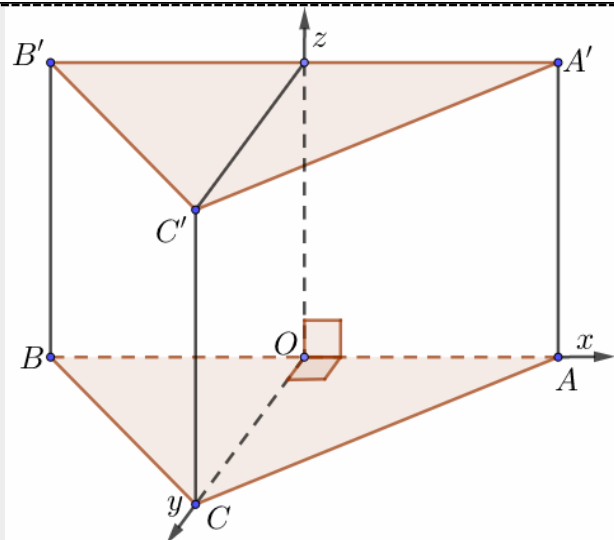
$$O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0;OB;0), C(OC;0;0),$$

$$D(0;-OD;0), A'(-OA;0;AA'), B'(0;OB;AA'),$$

$$C'(OC;0;AA'), D'(0;-OD;AA')$$

Lăng trụ tam giác đều

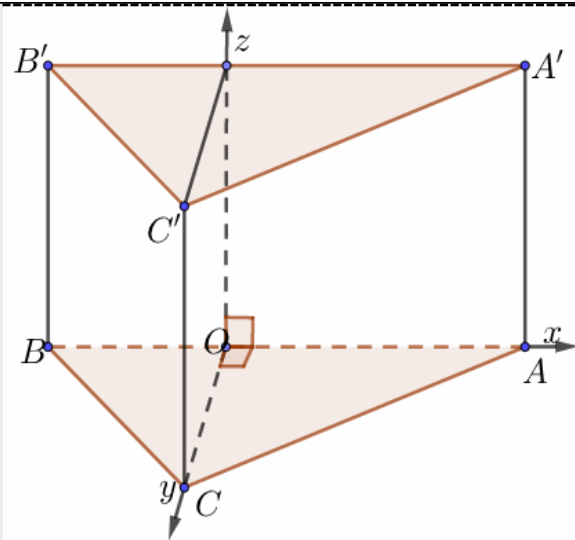
Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường



Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Ta có:

$$O(0;0;0), A\left(\frac{AB}{2};0;0\right), B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right), C(0;OC;0),$$

$$A'(OA;0;AA'), B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right), C'(0;OC;CC').$$



Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$.

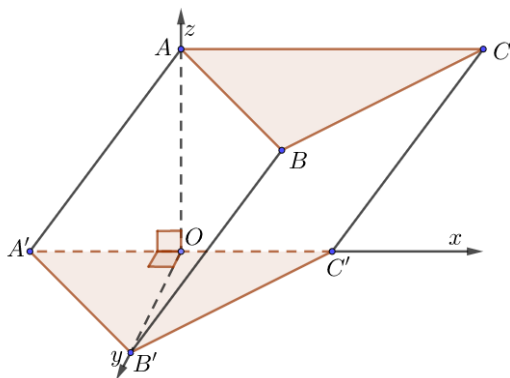
Tọa độ điểm là:

$$O(0;0;0), A(OA;0;0), B(-OB;0;0), C(0;OC;0),$$

$$A'(OA;0;AA'), B'(-OB;0;BB'), C'(0;OC;CC').$$

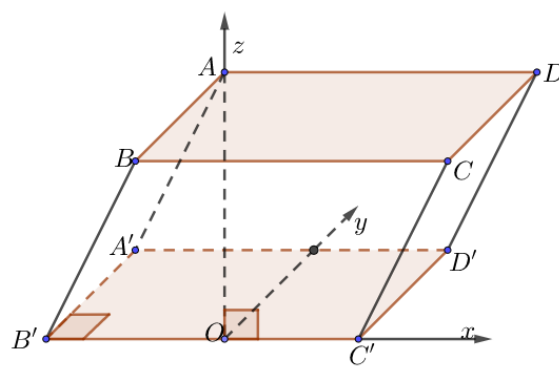
2. Lăng trụ xiên:

Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A .
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'}$.

Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A .
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'} = \vec{DD'}$.

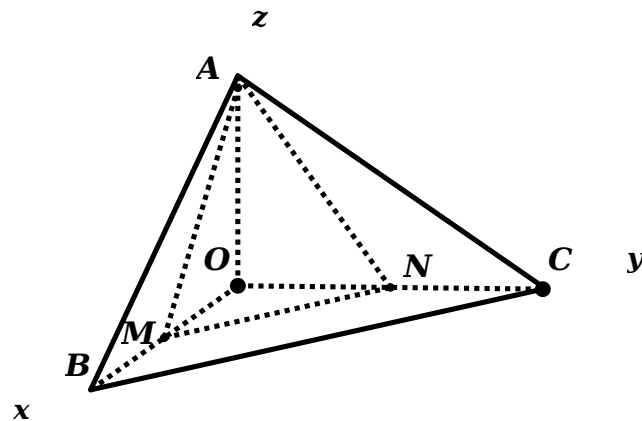
Câu 1. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=5, OB=2, OC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

- A. $\frac{20}{3\sqrt{129}}$. B. $\frac{20}{\sqrt{129}}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $O(0;0;0)$, $A \in Oz, B \in Ox, C \in Oy$ sao cho $AO=5, OB=2, OC=4$
 $\Rightarrow A(0;0;5), B(2;0;0), C(0;4;0)$.

Khi đó: G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$

M là trung điểm OB nên $M(1;0;0)$

N là trung điểm OC nên $N(0;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng (AMN) là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1$ hay $10x + 5y + 2z - 10 = 0$

Vậy khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

$$d(G, (AMN)) = \frac{\left| \frac{20}{3} + \frac{20}{3} + \frac{10}{3} - 10 \right|}{\sqrt{100 + 25 + 4}} = \frac{20}{3\sqrt{129}}.$$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , E là trung điểm của SD , $AB=2a$, $AD=DC=a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACE) .

A. $\frac{2a}{3}$.

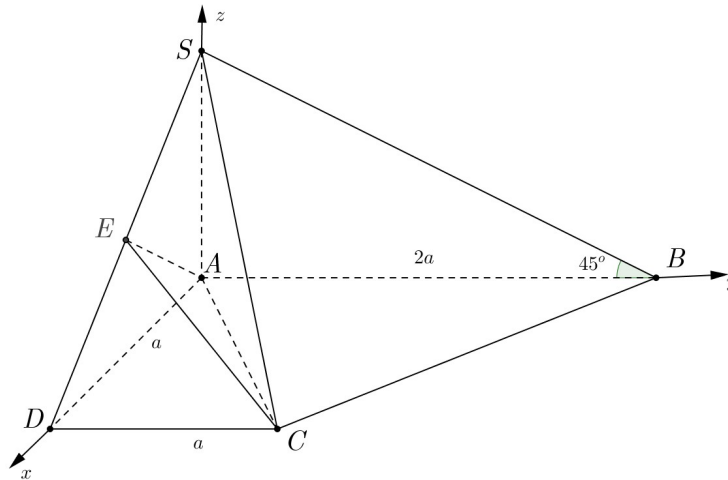
B. $\frac{4a}{3}$.

C. a .

D. $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $AB \Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\angle SBA = 45^\circ$.

Tam giác SAB vuông cân tại $A \Rightarrow SA = 2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S(0;0;2a)$,

$E\left(\frac{a}{2};0;a\right)$.

$\vec{AC} = (a;a;0)$, $\vec{AE} = \left(\frac{a}{2};0;a\right) \Rightarrow \vec{AC} \wedge \vec{AE} = \begin{pmatrix} a^2 \\ -a^2 \\ -\frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (ACE) có vectơ pháp tuyến $n = (2;-2;-1) \Rightarrow (ACE): 2x - 2y - z = 0$.

Vậy $d(B, (ACE)) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 2a - 0|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{4a}{3}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM) .

A. $d(B, (CDM)) = 2$.

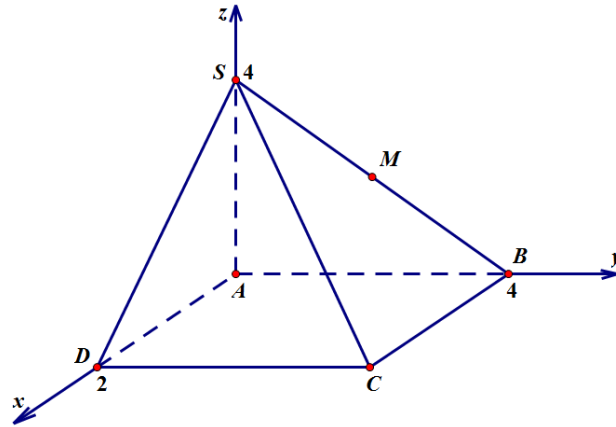
B. $d(B, (CDM)) = 2\sqrt{2}$.

C. $d(B, (CDM)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $d(B, (CDM)) = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2; 4; 0)$$

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên

M là trung điểm của $SB \Rightarrow M(0; 2; 2)$

Viết phương trình mặt phẳng (CDM) :

$$\overrightarrow{CD} = (0; -4; 0) \quad \overrightarrow{CM} = (-2; -2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CM} = (-8; 0; -8)$$

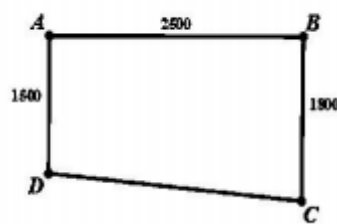
(CDM) có một véc tơ pháp tuyến $n = (1; 0; 1)$

Suy ra (CDM) có phương trình: $x + z - 2 = 0$

$$d(B; (CDM)) = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

Vậy

Câu 4. Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D , như hình vẽ.



Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25 \text{ m}$, $AD = 15 \text{ m}$, $BC = 18 \text{ m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm , $a \text{ cm}$, 6 cm tương ứng. Giá trị của a là số nào sau đây?

A. $15,7 \text{ cm}$

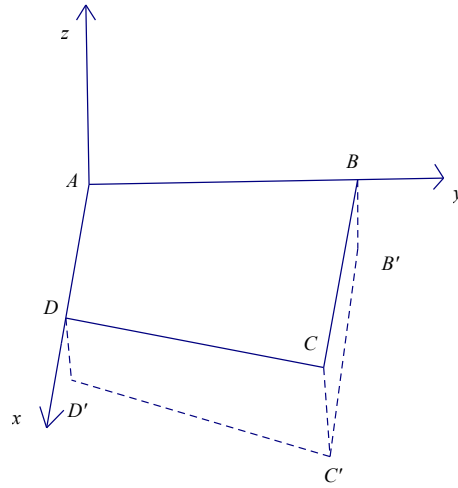
B. $17,2 \text{ cm}$

C. $18,1 \text{ cm}$

D. $17,5 \text{ cm}$

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AD$; tia $Oy \equiv AB$.

Khi đó, $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B , C , D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm , $a\text{ cm}$, 6 cm

tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$; $D'(1500;0;-6)$.

Theo bài ra có bốn điểm A ; B' ; C' ; D' đồng phẳng.

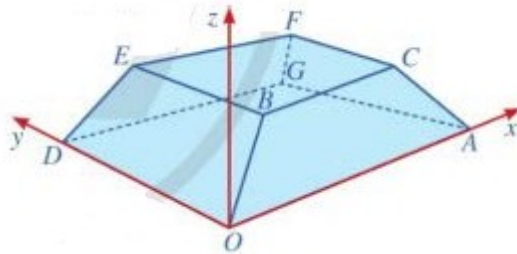
Phương trình mặt phẳng $(AB'D')$: $x + y + 250z = 0$.

Do $C'(1800; 2500; -a) \in (AB'D')$ nên có: $1800 + 2500 - 250a = 0 \Leftrightarrow a = 17,2$.

Vậy $a = 17,2\text{ cm}$.

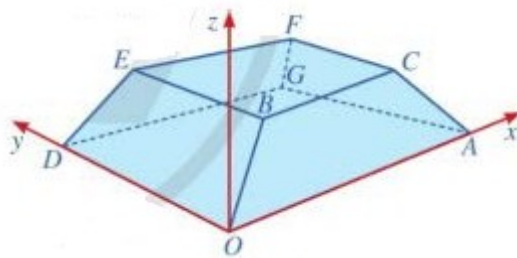
PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 5. Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cắt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100m$, chiều rộng $OD=60m$ và tọa độ điểm $B(10;10;8)$



- Lập phương trình mặt phẳng $(OACB)$.
- Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$.

Lời giải



- Lập phương trình mặt phẳng $(OACB)$.

Gắn hình chóp cắt $OAGD.BCFE$ vào hệ trục $Oxyz$, ta có:

$$O(0;0;0), A(100;0;0), G(100;60;0), D(0;60;0), B(10;10;8)$$

$$\overrightarrow{OA} = (100;0;0), \overrightarrow{OB} = (10;10;8)$$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(OACB)$ là $\vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0; -100; 1000) = -100(0; 1; -10)$

Phương trình mặt phẳng $(OACB)$ đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (0; 1; -10)$ là:
 $y - 10z = 0$

- Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$.

$$\overrightarrow{OD} = (0;60;0), \overrightarrow{OB} = (10;10;8)$$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(OBED)$ là $\vec{n} = [\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}] = (480; 0; -600) = 120(4; 0; -5)$

Phương trình mặt phẳng $(OBED)$ đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (4; 0; -5)$ là:
 $4x - 5z = 0$

Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ là: $d(G, (OBED)) = \frac{|4 \cdot 100 - 5 \cdot 0|}{\sqrt{16 + 25}} = \frac{400\sqrt{41}}{41} \approx 62,5m$

Câu 6. Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và có tâm của mặt đáy trên lần lượt là

$$A(3; 2; 3), B(6; 3; 3), C(9; 4; 2), D\left(6; 0; \frac{5}{2}\right)$$



- Hỏi ba cột bê tông A, B và C có được xây thẳng hàng không?
- Bốn điểm A, B, C và D có đồng phẳng không?
- Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

Câu 7. Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Ba bức tường $(P), (Q), (R)$ (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình: $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + 2z - 3 = 0$, $(R): 2x + 4y - 4z - 19 = 0$.



- Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường $(P), (Q), (R)$ của tòa nhà.
- Tính khoảng giữa hai bức tường (P) và (R) của tòa nhà.

Lời giải

a) Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường $(P), (Q), (R)$ của tòa nhà.

$(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ có vector pháp tuyến là $n_P = (1; 2; -2)$

$(Q): 2x + y + 2z - 3 = 0$ có vector pháp tuyến là $n_Q = (2; 1; 2)$

$(R): 2x + 4y - 4z - 19 = 0$ có vector pháp tuyến là $n_R = (2; 4; -4)$

Ta có $n_R = (2; 4; -4) = 2(1; 2; -2) \Rightarrow n_R = 2n_P$ nên hai bức tường (P) và (R) song song nhau

$n_P \cdot n_Q = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 0 \Rightarrow n_P \perp n_Q$ nên bức tường (Q) vuông góc với hai bức tường (P) và (R) ,

b) Tính khoảng giữa hai bức tường (P) và (R) của tòa nhà.

Chọn điểm $M(-1; 0; 0) \in (P)$

Do hai bức tường (P) và (R) song song nhau nên:

$$d((P), (R)) = d(M, (R)) = \frac{|2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 19|}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{21}{6} = 3,5m$$

Câu 8. Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Ba bức

tường $(P), (Q), (R), (T)$ (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình: $(P): 2x - y - z + 1 = 0$,

$(Q): x + 3y - z - 2 = 0$ $(R): 4x - 2y - 2z + 9 = 0$ $(T): 2x + 6y - 2z + 15 = 0$



a) Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường $(P), (Q), (R), (T)$ của tòa nhà.

b) Tính khoảng giữa hai bức tường (Q) và (T) của tòa nhà.

c) Tính chiều rộng bức tường (Q) của tòa nhà.

Lời giải

a) Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường $(P), (Q), (R), (T)$ của tòa nhà.

$(P): 2x - y - z + 1 = 0$ có vector pháp tuyến là $n_P = (2; -1; -1)$

$(Q): x + 3y - z - 2 = 0$ có vector pháp tuyến là $n_Q = (1; 3; -1)$

$(R): 4x - 2y - 2z + 9 = 0$ có vector pháp tuyến là $n_R = (4; -2; -2)$

$(T): 2x + 6y - 2z + 15 = 0$ có vector pháp tuyến là $n_T = (2; 6; -2)$

Ta có:

$n_R = (4; -2; -2) = 2(2; -1; -1) \Rightarrow n_R = 2n_P$ nên hai bức tường (P) và (R) song song nhau

$n_T = (2; 6; -2) = 2(1; 3; -1) \Rightarrow n_T = 2n_Q$ nên hai bức tường (T) và (Q) song song nhau

$n_P \cdot n_Q = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow n_P \perp n_Q$ nên bức tường (Q) vuông góc với hai bức tường (P) và (R)

$n_R \cdot n_Q = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow n_R \perp n_Q$ nên bức tường (R) vuông góc với hai bức tường (Q) và (T)

b) Tính khoảng giữa hai bức tường (Q) và (T) của tòa nhà.

Chọn điểm $M(2; 0; 0) \in (Q)$

Do hai bức tường (Q) và (T) song song nhau nên:

$$d((Q), (T)) = d(M, (T)) = \frac{|2 \cdot 2 + 6 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 15|}{\sqrt{4 + 36 + 4}} = \frac{19}{\sqrt{44}} \approx 2,9m$$

c) Tính chiều rộng bức tường (Q) của tòa nhà.

Do hai bức tường (P) và (R) song song nhau nên chiều rộng bức tường (Q) là khoảng cách giữa hai bức tường (P) và (R) .

Chọn điểm $N(0; 0; 1) \in (P)$

Do hai bức tường (P) và (R) song song nhau nên:

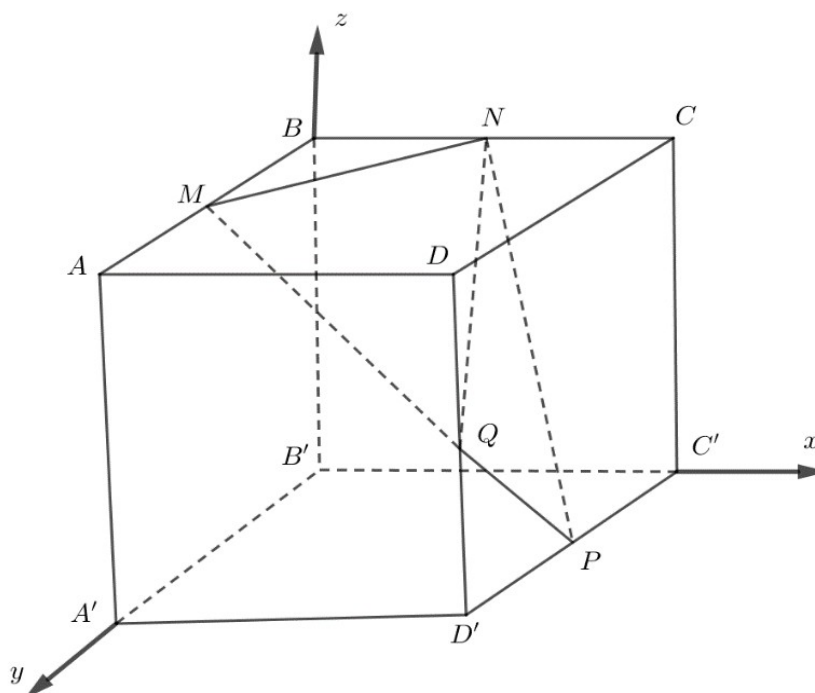
$$d((P), (R)) = d(N, (R)) = \frac{|4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 9|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{6}} \approx 2,9m$$

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D', DD'$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, xác định tọa độ các điểm M, N, P, Q .

a) Lập phương trình mặt phẳng $(A'BC')$.

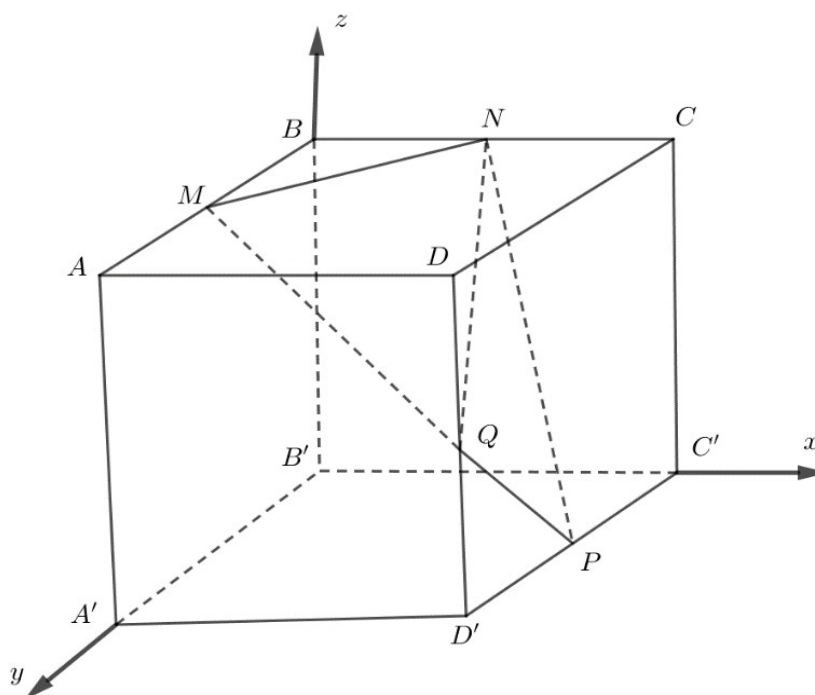
b) Tính khoảng cách từ điểm Q đến mặt phẳng (MNP) .

c) Tính khoảng giữa hai mặt phẳng $(A'BC')$ và mặt phẳng (ACD') .



Lời giải

Thiết lập hệ tọa độ O_{xyz} như hình vẽ, gốc $O \equiv B'$.



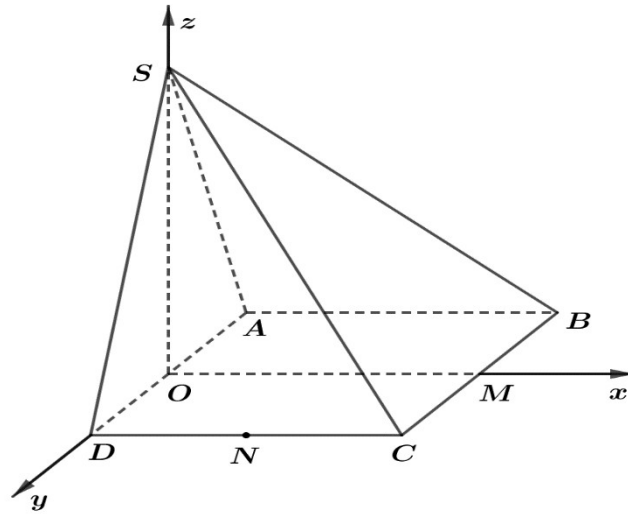
Khi đó: $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$, $N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, $P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

a) Lập phương trình mặt phẳng $(A'BC')$.

b) Tính khoảng cách từ điểm Q đến mặt phẳng (MNP) .

c) Tính khoảng giữa hai mặt phẳng $(A'BC')$ và mặt phẳng (ACD') .

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



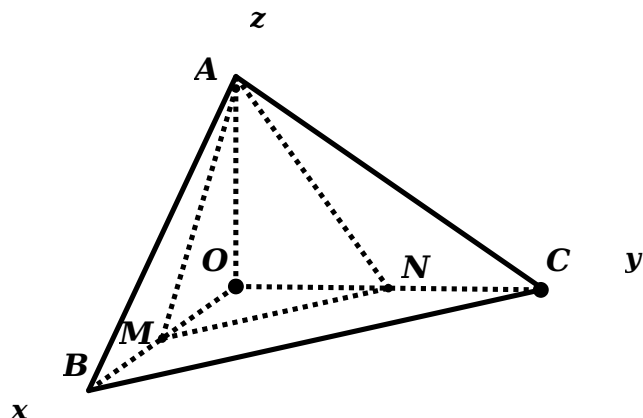
- Lập phương trình mặt phẳng (SOM) .
- Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
- Gọi Q là trung điểm SD . Tính khoảng giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ONQ) .

Lời giải

$$S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right).$$

- Lập phương trình mặt phẳng (SOM) .
- Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
- Gọi Q là trung điểm SD . Tính khoảng giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ONQ) .

Câu 11. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=5, OB=2, OC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và AMN . Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.

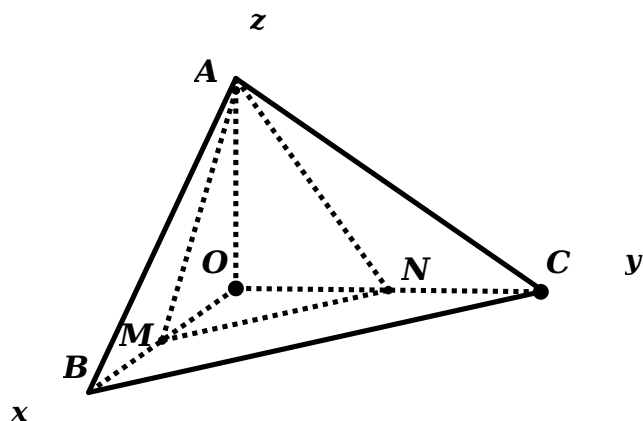


a) Lập phương trình mặt phẳng (ABC) .

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SMN) .

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $O(0;0;0)$, $A \in Oz$, $B \in Ox$, $C \in Oy$ sao cho $AO = 5$, $OB = 2$, $OC = 4$
 $\Rightarrow A(0;0;5)$, $B(2;0;0)$, $C(0;4;0)$.

Khi đó: G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$

M là trung điểm OB nên $M(1;0;0)$

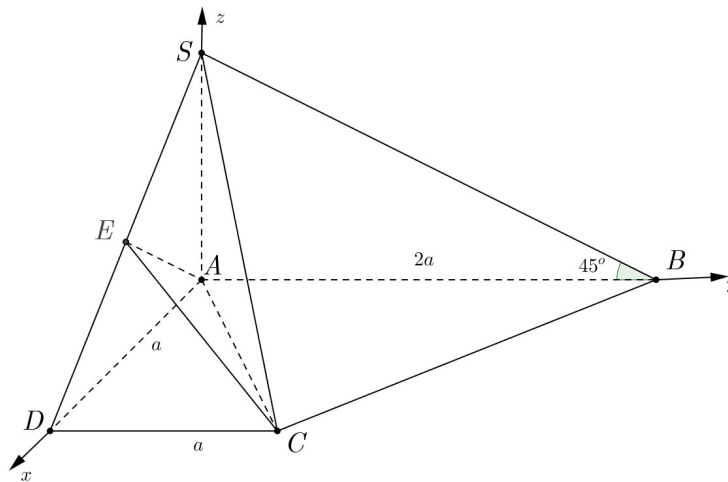
N là trung điểm OC nên $N(0;2;0)$.

K là trọng tâm tam giác AMN nên $K\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

a) Lập phương trình mặt phẳng (ABC) .

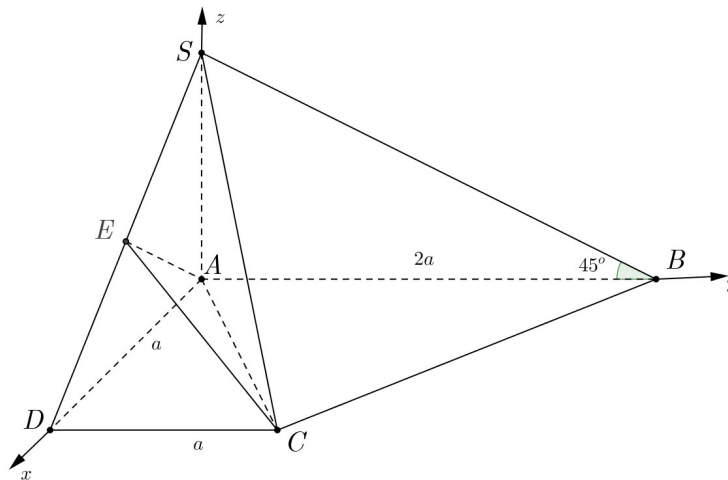
b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SMN) .

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , E là trung điểm của SD , $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE . Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



- Lập phương trình mặt phẳng (SAC) .
- Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AEC) .

Lời giải



Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $AB \Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\angle SBA = 45^\circ$.

Tam giác SAB vuông cân tại $A \Rightarrow SA = 2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S(0;0;2a)$,
 $E\left(\frac{a}{2};0;a\right)$.

- Lập phương trình mặt phẳng (SAC) .
- Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AEC) .

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $S(-1;6;2)$, $A(0;0;6)$, $B(0;3;0)$, $C(-2;0;0)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$. Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm S , B , H .

Lời giải

Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm S , B , H là $x+5y-7z-15=0$

Phương trình Mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow -3x+2y+z-6=0$.

H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$ nên H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng

$$(ABC) \Rightarrow H\left(\frac{19}{14}; \frac{31}{7}; \frac{17}{14}\right)$$

Mặt phẳng $(SBH): \begin{cases} \text{qua } B(0;3;0) \\ \text{vpt}[\vec{BH}, \vec{SB}] = \left(\frac{11}{14}; \frac{55}{14}; -\frac{11}{2}\right) = \frac{11}{14}(1;5;-7) \end{cases}$.

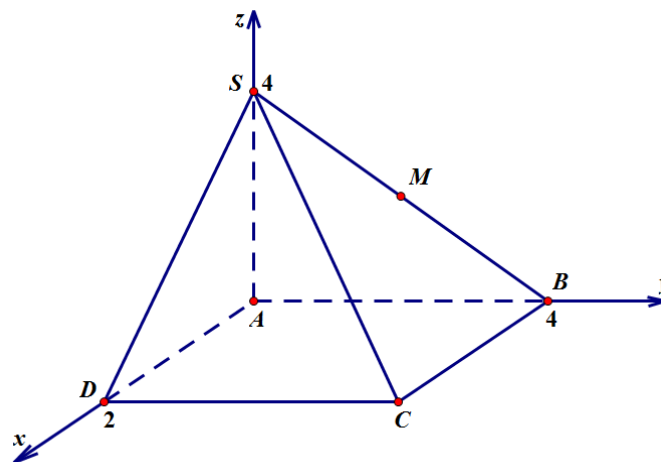
Phương trình Mặt phẳng $(SBH): x+5(y-3)-7z=0 \Leftrightarrow x+5y-7z-15=0$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD .

a) Lập phương trình mặt phẳng (AMC) .

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMG) .

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ: $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$.

M là trung điểm của $SB \Rightarrow M(0;2;2)$.

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2; 4; 0)$$

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$$G \text{ là trọng tâm của tam giác } SCD \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

a) Lập phương trình mặt phẳng (AMC) .

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMG) .

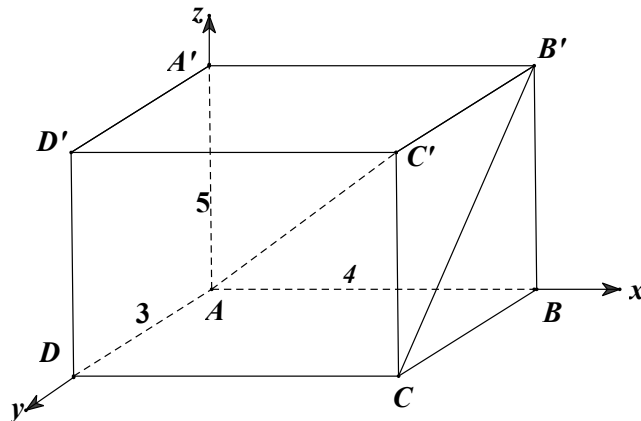
Câu 15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB=4, AD=3, AA'=5$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACB' .

a) Tính độ dài cạnh GD' .

b) Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(AB'C)$.

c) Tính khoảng giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và mặt phẳng $(CB'D')$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Có $A(0;0;0), C(4;3;0), B'(4;0;5), B(4;0;0)$,

$$G \text{ là trọng tâm của tam giác } ACB' \Rightarrow G\left(\frac{8}{3}; 1; \frac{5}{3}\right)$$

a) Tính độ dài cạnh GD' .

b) Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(AB'C)$.

c) Tính khoảng giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và mặt phẳng $(CB'D')$.

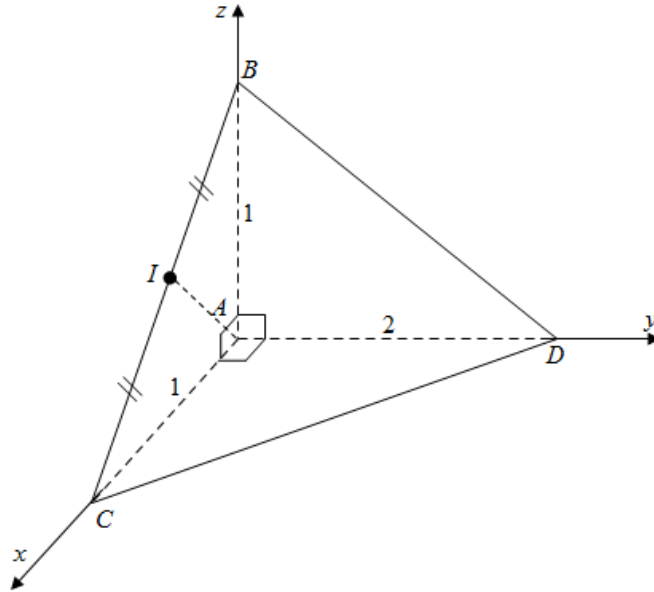
Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD=2, AB=AC=1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC và G là trọng tâm của tam giác ABD .

a) Tính độ dài cạnh IG .

b) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (AIG) .

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



Vì tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, nên ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (với A là gốc tọa độ, đường thẳng AC nằm trên trục Ox , AD nằm trên trục Oy và AB nằm trên trục Oz).

Từ đó suy ra: $A(0;0;0)$, $B(0;0;1)$ vì $B \in Oz$, $C(1;0;0)$ vì $C \in Ox$, $D(0;2;0)$ vì $D \in Oy$.

Vì I là trung điểm của BC nên $I\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

G là trọng tâm của tam giác $ABD \Rightarrow G\left(\frac{1}{6}; 0; \frac{1}{2}\right)$

a) Tính độ dài cạnh IG .

b) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (AIG) .

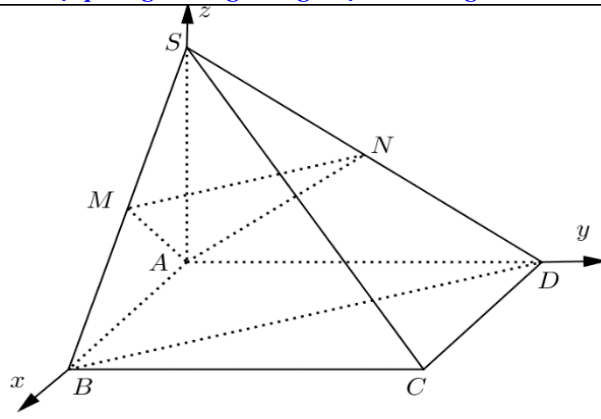
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD và G là trọng tâm của tam giác AMN .

a) Tính tọa độ điểm G .

b) Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC) .

c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (AMN) .

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn: $A \equiv O, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), S(0; 0; a)$ (như minh họa hình vẽ),

suy ra $M\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$ và $N\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

a) Tính tọa độ điểm G . .

G là trọng tâm của tam giác $AMN \Rightarrow G\left(\frac{a}{6}; \frac{a}{6}; \frac{a}{3}\right)$

b) Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC) .

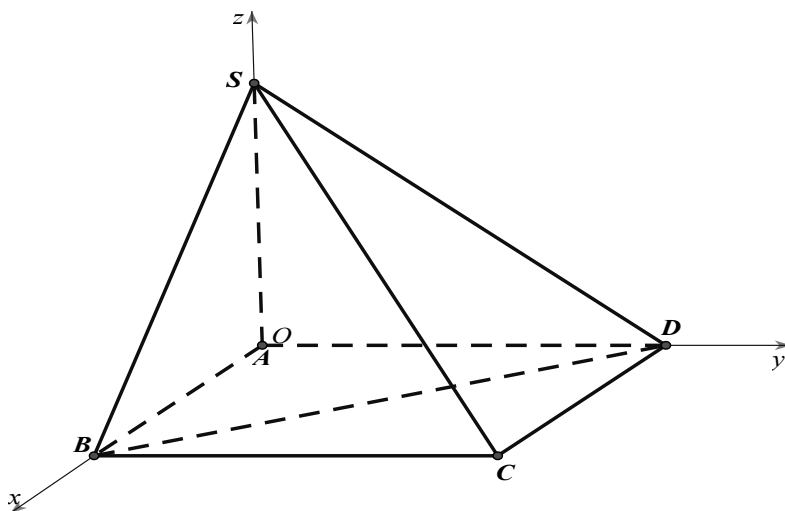
c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (AMN) .

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBD .

a) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

b) Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có:

$A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(a; a\sqrt{3}; 0)$, $D(0; a\sqrt{3}; 0)$, $S(0; 0; a)$

G là trọng tâm của tam giác $SBD \Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{a}{3}\right)$

a) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

b) Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SCD) .

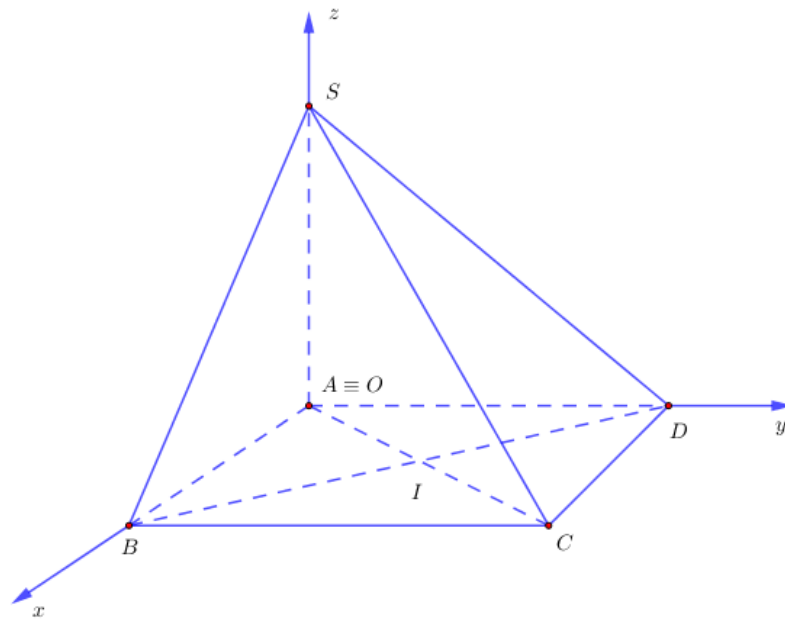
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I , có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ và $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) .

b) Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải

chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = (\angle SI; AI) = \angle SIA$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \tan \angle SIA = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = a$$

$$\text{Ta có } A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), S(0;0;a) \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

a) Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) .

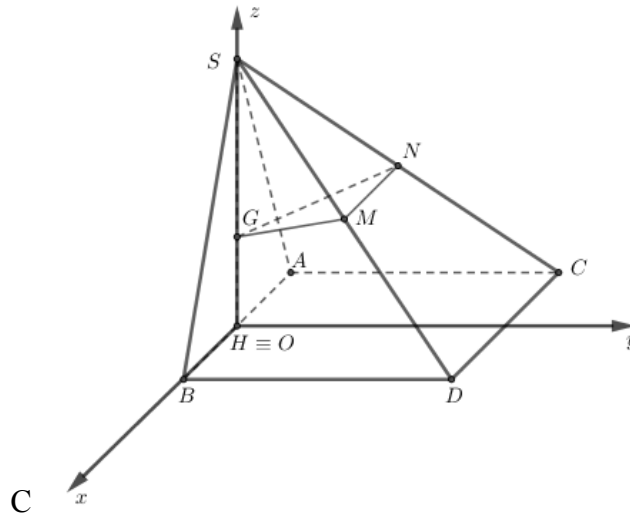
b) Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SCD) .

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD .

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

b) Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (GMN) .

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right); A\left(-\frac{a}{2};0;0\right); B\left(\frac{a}{2};0;0\right); C\left(\frac{a}{2};a;0\right); D\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$$

$$\text{suy ra } G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

b) Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (GMN) .