HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
VÙNG DH&ĐB BẮC BỘ

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LẦN THỨ XIV, NĂM 2023
ĐỀ THI MÔN: TOÁN HỌC - LỚP 11
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 15 tháng 7 năm 2023

Câu 1. (4,0 điểm) Cho dãy số $\{a_n\}$ $(n=1,2,...)$ xác định bởi $\begin{cases} a_1 \in [0;2] \\ a_{n+1} = \dfrac{-a_n^2 + 2a_n}{2}, n \geq 1. \end{cases}$

a) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

b) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} (na_n)$.

Câu 2. (4,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$ thỏa mãn:

$$f(x^2) + f(y) = f\left(x^2 + y + 2xf(y)\right), \forall x \geq 0, y \geq 0.$$

Câu 3. (4,0 điểm) Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn (*O*) sao cho *AB* cắt *CD* tại *E* và *AD* cắt *BC* tại *F*. Gọi *G* là giao điểm của *AC* và *BD*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *ADE* và đường tròn ngoại tiếp tam giác *CDF* cắt nhau tại *D* và *H*. Phân giác trong góc AHB cắt *AB*, *AD* lần lượt tại *I, J* và phân giác trong góc DHC cắt *CB*, *CD* lần lượt tại *K*, *L*. Gọi M, M' lần lượt là giao điểm của *BH* với *AD* và *CD*; N, N' lần lượt là giao điểm của *DH* với *BC* và *BA*. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm G, I, L thẳng hàng.

b) Các đường thẳng KJ, MN, $M'N'$ đồng quy.

Câu 4. (4,0 điểm) Cho a, b là hai số nguyên dương có tính chất: với mỗi số nguyên dương n, nếu $na^2 + na + 1$ là lập phương đúng của một số nguyên dương thì $nb + 1$ cũng là lập phương đúng của một số nguyên dương. Chứng minh rằng $4b + 1$ là một số chính phương.

Câu 5. (4,0 điểm) Sắp xếp 9 học sinh đứng cách đều nhau trên một vòng tròn tại vị trí 9 đỉnh của một đa giác đều. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác (có đỉnh là đỉnh đa giác đều) bằng nhau (các đỉnh của hai tam giác có thể trùng nhau nhưng hai tam giác là phân biệt) mà tất cả học sinh đứng ở các đỉnh của hai tam giác đó là cùng giới.

(Giả thiết rằng mỗi em học sinh trong 9 em học sinh này chỉ thuộc một trong 2 giới là nam hoặc nữ).

……………………….HẾT……………………….

Họ và tên thí sinh: ………………………………… *Số báo danh:* ………………………

Lưu ý: - Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu
- Cán bộ coi thi **không** giải thích gì thêm