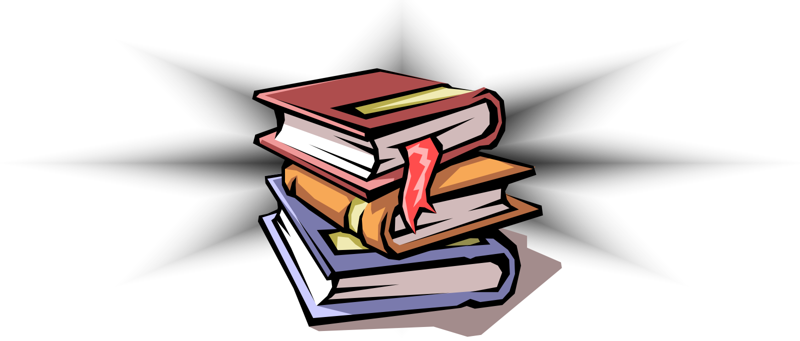
Tailieumontoan.com

Tài liệu sưu tầm



BỘ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

MÔN TOÁN TỈNH LỚP 9 NĂM 2017-2018

TÀI LIỆU SƯU TẦM

STT 01. ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH AN GIANG

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: CHI DIEP

Người phản biện: Lê Minh Đức

Câu 1:

a) *(2,0 điểm)* Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)$ với $x>0, x\neq 1, x\neq \dfrac{1}{4}$

Tính giá trị của P tại $x=\dfrac{4}{\sqrt{10}}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

b) *(2,0 điểm)* Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\le 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=4\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)$

Câu 2:

a) *(3,0 điểm)* Giải phương trình : $\dfrac{x^2-4x}{x-1}\left(x+\dfrac{x-4}{x-1}=5\right)$

b) *(2,0 điểm)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x^3+y^3=x+3y \end{cases}$

Câu 3:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, M là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A. Vẽ đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn (I) và (K)

a) *(3,0 điểm)* Chứng minh rằng ba điểm B, N, C thẳng hàng

b) *(2,0 điểm)* Lấy D là điểm bất kỳ thuộc cạnh AB (D khác A và B) điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD=CE$. chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A

Câu 4: *(3,0 điểm)* Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi M là điểm nằm trên nửa đường tròn khác A và B. xác định vị trí điểm M sao cho tam giác MAB có chu vi lớn nhất

Câu 5: *(3,0 điểm)* Tìm tất cả các số nguyên x,y thỏa phương trình $2x^2+y^2+xy=2(x+y)$

STT 01. ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH AN GIANG

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: CHI DIEP

Câu 1:

a) (*2,0 điểm*) Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)$

với $x>0, x\neq 1, x\neq \frac{1}{4}$

Tính giá trị của P tại $x=\frac{4}{\sqrt{10}}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

b) (*2,0 điểm*) Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\leq 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=4\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)$

Lời giải

a) Ta có $P=\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\right):\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\right)$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\right]:\left[\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\right]:\left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\right]$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Lại có :

$$x=\frac{4}{\sqrt{10}}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{\left|\sqrt{5}+1\right|+\left|\sqrt{5}-1\right|}{\sqrt{2}}.\frac{4}{\sqrt{10}}=4$$

Vậy $P=\dfrac{4-\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}}=\dfrac{3}{2}$

b)Ta có

$$S=4\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)$$
$$=\left(4a^3-a^4\right)+\left(4b^3-b^4\right)+\left(4c^3-c^4\right)$$

Ta chứng minh : $\left(4a^3-a^4\right)\le 4a^2$ thật vậy

$$\left(4a^3-a^4\right)\le 4a^2$$
$$\Leftrightarrow a^4-4a^3+4a^2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^2(a-2)^2\ge 0$$

Tương tự

$$\left(4b^3-b^4\right)\le 4b^2$$
$$\left(4c^3-c^4\right)\le 4c^2$$

Vậy ta có :

$$S=4\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)$$
$$=\left(4a^3-a^4\right)+\left(4b^3-b^4\right)+\left(4c^3-c^4\right)$$
$$\le 4\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 48$$

Vậy giá trị lớn nhất bằng 48 xảy ra khi $(a,b,c)=(2,2,2)$

Câu 2:

a) *(3,0 điểm*) Giải phương trình : $\dfrac{x^2-4x}{x-1}\left(x+\dfrac{x-4}{x-1}=5\right)$

b) *(2,0 điểm)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^2+y^2+xy=1\\x^3+y^3=x+3y\end{cases}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định $x\ne 1$

Đặt $y=\dfrac{x(x-4)}{x-1}$ suy ra $x+\dfrac{x-4}{x-1}=x-4+\dfrac{x-4}{x-1}+4=y+4$

Phương trình trở thành :

$y\left(y+4\right)=5$

$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right.$

- Với $y=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \\ x_2=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$

- Với $y=-5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$

b) Ta có

$x^3+y^3=\left(x+3y\right).1$

$\Leftrightarrow x^3+y^3=\left(x+3y\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$

$\Leftrightarrow 2y^3+4xy^2+4x^2y=0$

$\Leftrightarrow 2y\left(y^2+2xy+2x^2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2y=0 \\ y^2+2xy+x^2+x^2=0 \end{array}\right.$

- Với $y=0\Leftrightarrow x=\pm1$ suy ra hệ có nghiệm $\left(\pm1;0\right)$

- Với

$\left(x+y\right)^2+x^2=0$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$ thay vào không thỏa phương trình (1)

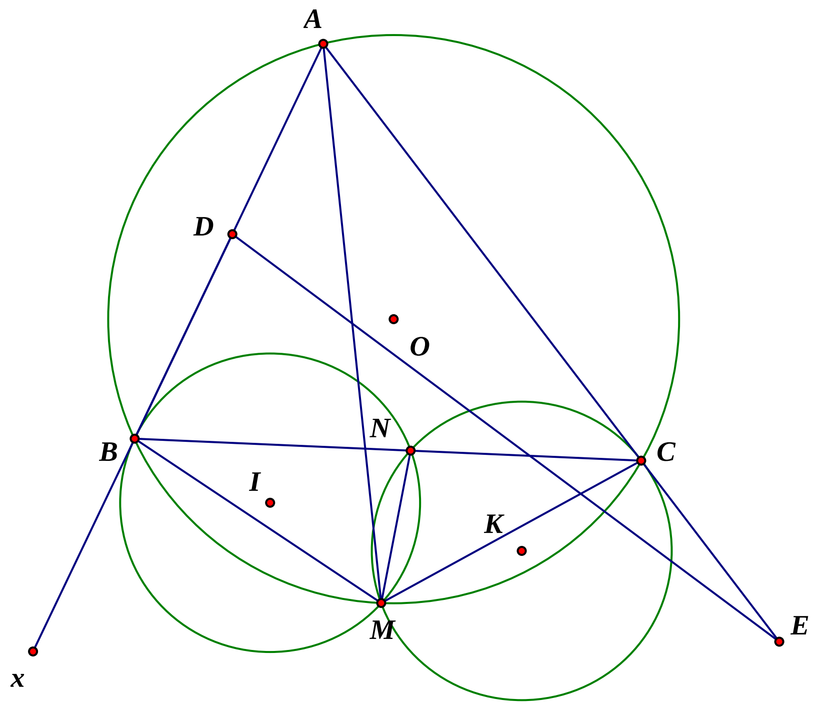
Vậy hệ có hai nghiệm $\left(-1;0\right);\left(1;0\right)$

Câu 3: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$, M là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A. Vẽ đường tròn $\left(I\right)$ đi qua M và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn $\left(K\right)$ đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn $\left(I\right)$ và $\left(K\right)$

a) *(3,0 điểm)* Chứng minh rằng ba điểm B , N , C thẳng hàng

b) *(2,0 điểm)* Lấy D là điểm bất kỳ thuộc cạnh AB (D khác A và B) điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD=CE$. chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A

Lời giải



a) Xét (I) : $\widehat{BNM}=\widehat{MBx}$ cùng chắn cung BM

Xét (K) : $\widehat{MNC}=\widehat{MCE}$ cùng chắn cung MC

Do tứ giác $ABMC$ nội tiếp (gt)

Suy ra: $\widehat{ABM}+\widehat{ACM}=180^0$

Mà : $\widehat{MBx}+\widehat{MCE}=180^0$

Nên : $\widehat{BNM}+\widehat{CNM}=180^0$ suy ra $B,N\ ,C$ thẳng hàng

b) Xét ΔBDM và ΔCEM có

$$\begin{cases} BD=CE(gt) \\ \widehat{DBM}=\widehat{ECM}(ABMC \text{ nt}) \Rightarrow \Delta BDM=\Delta CEM\left(c.g.c\right) \\ BM=MC\left(gt\right) \end{cases}$$

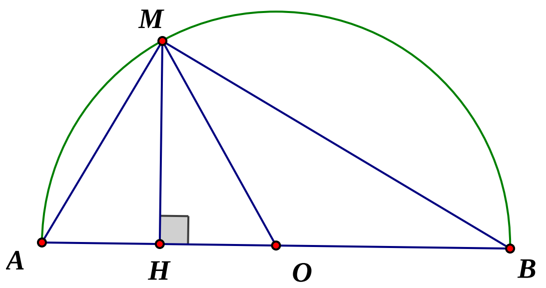
$\Rightarrow \widehat{BDM}=\widehat{CEM} \Rightarrow$ tứ giác $ADME$ nội tiếp

Do M cố định nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua điểm cố định là M

Câu 4:

Cho nửa đường tròn $\left(O;R\right)$ đường kính AB. Gọi M là điểm nằm trên nửa đường tròn khác A và B. xác định vị trí điểm M sao cho tam giác MAB có chu vi lớn nhất

Lời giải



Ta có : $\widehat{AMB}=90^0$ Suy ra tam giác AMB vuông tại M

$MA^2+MB^2=AB^2=4R^2$ (1)

Chu vi tam giác MAB : $MA+MB+AB=MA+MB+2R$

Chu vi lớn nhất khi : $MA+MB$ lớn nhất

Lại có

$(MA+MB)^2=MA^2+2MA.MB+MB^2$
$=4R^2+2.MA.MB$

$MA+MB$ lớn nhất $\Leftrightarrow (MA+MB)^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow MA.MB$ lớn nhất

Gọi H là chân đường cao hạ từ M đến AB khi đó

$MA.MB=MH.AB=MH.2R$ do đó $MA.MB$ lớn nhất khi MH lớn nhất

$MH=R \Leftrightarrow H\equiv O \Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa của cung AB

Câu 5: Tìm tất cả các số nguyên x,y thỏa phương trình $2x^2+y^2+xy=2(x+y)$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với :

$2x^2+(y-2)x+y^2-2y=0$ (1)

Xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn x

$\Delta=(y-2)^2-8(y^2-2y)=-7y^2+12y+4=(y-2)(-7y-2)$

Để (1) có nghiệm thì $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{7}\leq y\leq 2$ do $y\in Z \Leftrightarrow y\in\{0,1,2\}$

- Với $y=0 \Rightarrow 2x^2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

- Với $y=1 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{2}(loai) \\ x=1 \end{array}\right.$

- Với $y=2 \Leftrightarrow 2x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

  Vậy tập nghiệm của phương trình là $(0;2);(1;1);(1;0);(0;0)$

STT 02. ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 9 – AMSTERDAM LẦN 3 NĂM HỌC 2017 – 2018

NGƯỜI GIẢI ĐỀ: LÊ MINH ĐỨC

Câu 1: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Câu 2: Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3-9x^2+6x-1=0$
Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$$

Câu 3: Cho tam giác ABC, $(AB<AC)$, với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Các đường thẳng EF, BC cắt nhau tại G, gọi I là hình chiếu của H trên GA.
1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.
2. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $GH \perp AM$.

Câu 4: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge a^2+b^2+c^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5: Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB=1$.

STT 02. LỜI GIẢI ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 9 – AMSTERDAM LẦN 3 NĂM HỌC 2017 - 2018

Câu 1: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn:
$p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $p \le q$.
Trường hợp 1: $p=2$
$\Rightarrow p(p+3)=2(2+3)=2.5=10$

$\Rightarrow 10+q(q+3)=n(n+3)$

$\Leftrightarrow 10=n^2+3n-q^2-3q=(n^2-q^2)+(3n-3q)$

$\Leftrightarrow 10=(n-q)(n+q)+3(n-q)$

$\Leftrightarrow 10=(n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà p ; q ; n là các số nguyên dương $\Rightarrow n>q\geq 2$.

$\Rightarrow n+q+3>2+2+3=7$

Mà $10=1.10=2.5$

$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=10 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=7 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \\ q=3 \end{cases}$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(2;3;4)$.

Trường hợp 2: $p=3$

$\Rightarrow p(p+3)=3.(3+3)=3.6=18$

$\Rightarrow 18+q(q+3)=n(n+3)\Leftrightarrow 18=n^2+3n-q^2-3q=(n^2-q^2)+(3n-3q)$

$\Leftrightarrow 18=(n-q)(n+q)+3(n-q)$

$\Leftrightarrow 18=(n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà p ; q ; n là các số nguyên dương $\Rightarrow n>q\geq 3$.

$\Rightarrow n+q+3>3+3+3=9$

Mà $18=1.18=2.9=3.6$

$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=18 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=15 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 \\ q=7 \end{cases}$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(3;7;8)$.

Trường hợp 3: $p>3$

Ta sẽ chứng minh với 1 số nguyên a bất kì không chia hết cho 3 thì tích $a(a+3)$ luôn chia 3 dư 1.

Thật vậy:

Nếu $a:3$ dư 1 $\Rightarrow a=3k+1\Rightarrow a+3=3k+4$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+1)(3k+4)=9k^2+15k+4:3$ dư 1.

Nếu $a:3$ dư 2 $\Rightarrow a=3k+2\Rightarrow a+3=3k+5$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+2)(3k+5)=9k^2+21k+10:3$ dư 1.

Trở lại bài toán chính:

Vì $q\geq p>3\Rightarrow p\nmid 3; q\nmid 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3):3$ dư 2.

Mà $n(n+3):3$ dư 1 (nếu $n\nmid 3$) hoặc $n(n+3)\vdots 3$ nếu $n\vdots 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3)\neq n(n+3)$

Suy ra không có bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3-9x^2+6x-1=0$

Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$$

Lời giải

Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$2x^3-9x^2+6x-1=0$

Khi phân tích đa thức $2x^3-9x^2+6x-1$ ra thừa số ta được:

$$2x^3-9x^2+6x-1=2(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c)=x^3-\frac{9}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=x^3-\frac{9}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=\frac{9}{2} \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=\left(\frac{9}{2}\right)^2-2.3=\frac{57}{4}$$

Tính $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=3^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

Tính $a^3+b^3+c^3$:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=\frac{9}{2}\left(\frac{57}{4}-3\right)+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{417}{8}$$

Vậy:

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{9}{2} \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=\frac{1}{2} \\ a^2+b^2+c^2=\frac{57}{4} \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{9}{2} \\ a^3+b^3+c^3=\frac{417}{8} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$$

$\Leftrightarrow S=\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)+\left(b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4\right)$
$+\left(c^4+c^3a+c^2a^2+ca^3+a^4\right)$

$\Leftrightarrow S=2a^4+2b^4+2c^4+a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+a^3c+c^3a+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$\Leftrightarrow S=\left(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\right)+\left(a^4+a^3b+a^3c\right)+\left(b^4+b^3a+b^3c\right)$
$+\left(c^4+c^3a+c^3b\right)-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$

$\Leftrightarrow S=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+a^3\left(a+b+c\right)+b^3\left(a+b+c\right)+c^3\left(a+b+c\right)$
$-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$

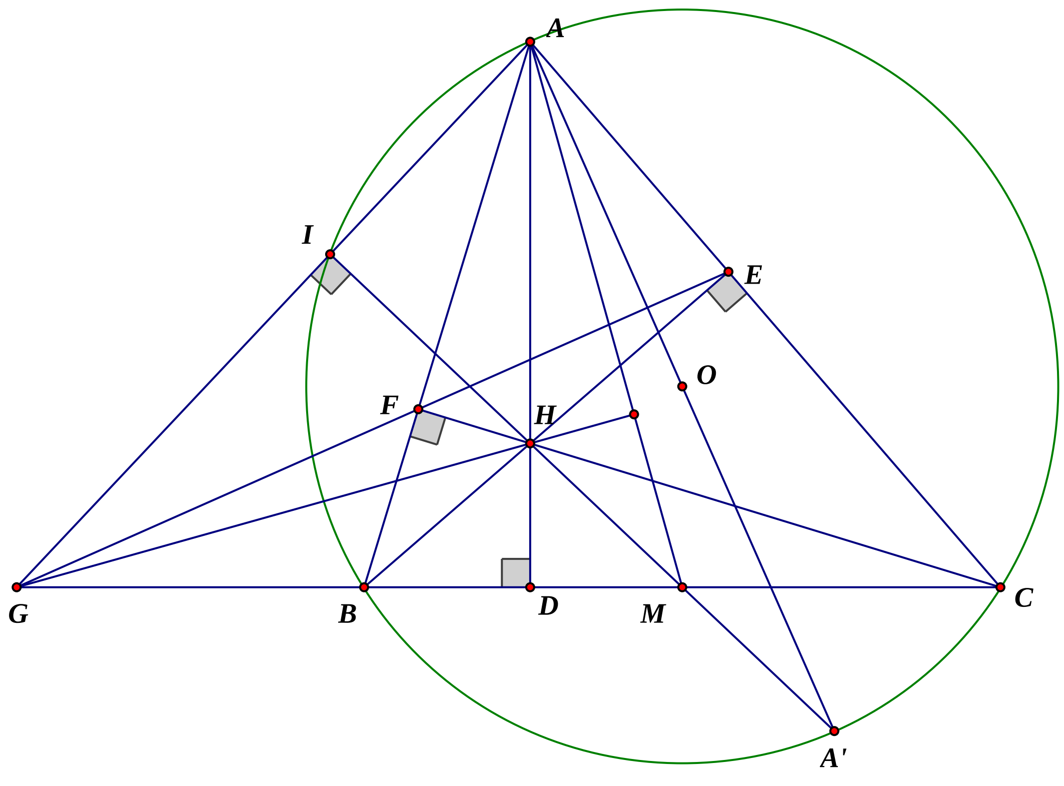
$\Leftrightarrow S=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a+b+c\right)-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$

$\Leftrightarrow S=\left(\frac{57}{4}\right)^2+\frac{9}{2}\cdot\frac{417}{8}-\frac{9}{2}=\frac{3465}{8}$

Câu 3: Cho tam giác ABC, $\left(AB<AC\right)$, với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Các đường thẳng EF, BC cắt nhau tại G, gọi I là hình chiếu của H trên GA.

1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.
2. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $GH\perp AM$.

Lời giải



1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.

Dễ dàng chứng minh tứ giác $AIFH$ nội tiếp và tứ giác $AFHE$ nội tiếp

$\Rightarrow$ 5 điểm A, F, H, E, I cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow$ tứ giác $AIFE$ nội tiếp.

$\Rightarrow GI.GA=GF.GE\ \left(1\right)$.

Dễ dàng chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow GF.GE=GB.GC\ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra: $GI.GA=GB.GC$ $\Rightarrow$ tứ giác $BCAI$ nội tiếp (điều phải chứng minh).

2. Chứng minh $GH \perp AM$.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kẻ đường kính AA' của (O).

Vì tứ giác $BCAI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow I \in (O) \Rightarrow \widehat{AIA'} = 90° \Rightarrow A'I \perp AI$ hay $A'I \perp AG$.

Mà $HI \perp AG$ (giả thiết) $\Rightarrow A'I \equiv HI \Rightarrow A'$, I, H thẳng hàng.

Mà dễ dàng chứng minh được $A'H$ đi qua trung điểm M của BC (tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành).

$\Rightarrow M$, I, H thẳng hàng.

Xét ΔAGM có: $AD \perp AM$, $MI \perp AG$ và AD cắt MI tại H.

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác AGM.

$\Rightarrow GH \perp AM$

Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Trường hợp 1: Nếu tồn tại một trong ba số a, b, c thuộc nửa khoảng $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ thì ta có

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq 9 = (a+b+c)^2 > a^2+b^2+c^2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng.

Trường hợp 2: $a > \frac{1}{3}$; $b > \frac{1}{3}$; $c > \frac{1}{3}$ ta có $a+b+c = 3 > a+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \Rightarrow a < \frac{7}{3}$ tương tự $b < \frac{7}{3}$; $c < \frac{7}{3}$. Vậy $a;b;c \in \left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Ta chứng minh $\frac{1}{x^2} - x^2 \geq -4x+4 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$. (*).

Thật vậy

(*) $\Leftrightarrow 1-x^4 \geq -4x^3+4x^2 \Leftrightarrow x^4-4x^3+4x^2-1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x-1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left((x-1)^2-2\right) \leq 0$ luôn đúng với $\forall x \in \left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vậy $\frac{1}{a^2}-a^2 \geq -4a+4$; $\frac{1}{b^2}-b^2 \geq -4b+4$; $\frac{1}{c^2}-c^2 \geq -4c+4$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-a^2-b^2-c^2 \geq -4(a+b+c)+12 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2$ (đpcm).

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 5: Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB=1$.

Lời giải

Giả sử không có 2 điểm nào trong mặt phẳng được tô cùng màu mà khoảng cách giữa chúng là 1 đơn vị độ dài.

Xét một điểm O bất kỳ có màu vàng trên mặt phẳng.

Vẽ đường tròn $(O,\sqrt{3})$. Lấy một điểm P bất kỳ trên (O).

Dựng hình thoi $OAPB$ có cạnh bằng 1 và có đường chéo là OP.
Dễ thấy $OA = OB = AB = AC = BC = 1$.
Theo giả thiết, A, B phải tô khác màu vàng và khác màu nhau.
Do đó P phải tô vàng. Từ đây suy ra tất cả các điểm trên (O) phải tô vàng. Điều này trái với giả thiết vì dễ thấy tồn tại hai điểm trên (O) có khoảng cách 1 đơn vị độ dài.
P/s: Số 1 có thể được thay bởi bất kỳ số thực dương nào.

STT 06. ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẾN TRE

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Võ Tấn Hậu.

Người phản biện: Tung HT.

Câu 1: (6 điểm)

a) Giải phương trình: $2017\sqrt{2017x-2016}+\sqrt{2018x-2017}=2018$.

b) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+6x^2y=7 \\ 2y^3+3xy^2=5 \end{cases}$.

Câu 2: (4 điểm)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=28$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12\left(a^2+28\right)}+\sqrt{12\left(b^2+28\right)}+\sqrt{c^2+28}}.$$

Câu 3: (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Giả sử các điểm B,C cố định và A di động trên đường tròn (O) sao cho $AB<AC$ và $AC<BC$. Đường trung thực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng: $OM.ON=R^2$.

b) Chứng minh rằng bốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên một đường tròn.

c) Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T. Chứng minh ba điểm S,T,O thẳng hàng.

Câu 4: (4 điểm)

a) Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $16\left(x^3 - y^3\right) = 15xy + 371$.

b) Giả sử Trung tâm thành phố Bến Tre có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm 671 bóng đèn ánh sáng trắng, 673 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 675 bóng đèn ánh sáng vàng sậm. Người ta thực hiện dự án thay bóng đèn theo quy luật sau: mỗi lần người ta tháo bỏ hai bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi theo quy trình trên, đến một lúc nào đó, người ta có thể nhận được tất cả các bóng đèn đều thuộc cùng một loại không? Giải thích vì sao?

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẾN TRE – TỈNH BẾN TRE

NĂM HỌC 2017 – 2018

Người giải đề: Võ Tấn Hậu.

Câu 1: (6 điểm)

a) Giải phương trình: $2017\sqrt{2017x - 2016} + \sqrt{2018x - 2017} = 2018$.

b) Rút gọn biểu thức: $A = \dfrac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}}} + \dfrac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2} - \sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 3xy^2 = 5 \end{cases}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \ge \dfrac{2017}{2018}$.

Xét $\dfrac{2017}{2018} \le x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2017x - 2016 < 1 \\ 2018x - 2017 < 1 \end{cases} \Rightarrow 2017\sqrt{2017x - 2016} + \sqrt{2018 - 2017} < 2018$.

Xét $x > 1 \Rightarrow \begin{cases} 2017x - 2016 > 1 \\ 2018x - 2017 > 1 \end{cases} \Rightarrow 2017\sqrt{2017x - 2016} + \sqrt{2018x - 2017} > 2018$.

Xét $x = 1$ thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

b) Ta có: $A = \dfrac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}}} + \dfrac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2} - \sqrt{3-\sqrt{5}}}$

$$A=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4+\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}+\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\sqrt{5}+5}+\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{5-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2.$$

c) $\begin{cases}x^3+6x^2y=7\\2y^3+3xy^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+6x^2y=7\\2y^3+3xy^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^3+30x^2y=35\\14y^3+21xy^2=35\end{cases}\Leftrightarrow 5x^3+30x^2y=14y^3+21xy^2$

$$\Leftrightarrow 5x^3-5x^2y+35x^2y-35x^2y+14xy^2-14y^3=0\Leftrightarrow(x-y)\left(5x^2+35xy+14y^2\right)=0.$$

Xét $x-y=0\Rightarrow x=y$ thay vào phương trình $x^3+6x^2y=7$ ta được $7x^3=7\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1$.

Xét $5x^2+35xy+14y^2=0$. Đặt $y=xt$, ta có: $5x^2+35x^2t+14x^2t^2=0\Leftrightarrow x^2\left(14t^2+35t+5\right)=0$.

Vì $x=0$ không phải là nghiệm nên $14t^2+35t+5=0\Rightarrow t=\dfrac{-35\pm3\sqrt{105}}{28}$.

Với $t=\dfrac{-35-3\sqrt{105}}{28}\Rightarrow y=x\left(\dfrac{-35-3\sqrt{105}}{28}\right)$ thay vào phương trình $x^3+6x^2y=7$ ta được

$$x^3=\frac{98}{-91-9\sqrt{105}}\Rightarrow x=-\sqrt[3]{\frac{98}{91+9\sqrt{105}}}\Rightarrow y=\frac{35+3\sqrt{105}}{28}\sqrt[3]{\frac{98}{91+9\sqrt{105}}}.$$

Với $t=\dfrac{-35+3\sqrt{105}}{28}\Rightarrow y=x\left(\dfrac{-35+3\sqrt{105}}{28}\right)$ thay vào phương trình $x^3+6x^2y=7$ ta được

$$x^3=\frac{98}{-91+9\sqrt{105}}\Rightarrow x=-\sqrt[3]{\frac{98}{91-9\sqrt{105}}}\Rightarrow y=\frac{35-3\sqrt{105}}{28}\sqrt[3]{\frac{98}{91-9\sqrt{105}}}.$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm: $(1;1)$, $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{98}{91+9\sqrt{105}}};\dfrac{35+3\sqrt{105}}{28}\sqrt[3]{\dfrac{98}{91+9\sqrt{105}}}\right)$,

$\left(-\sqrt[3]{\dfrac{98}{91-9\sqrt{105}}};\dfrac{35-3\sqrt{105}}{28}\sqrt[3]{\dfrac{98}{91-9\sqrt{105}}}\right)$.

Câu 2: (4 điểm)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=28$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12\left(a^2+28\right)}+\sqrt{12\left(b^2+28\right)}+\sqrt{c^2+28}}.$$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{12\left(a^2+28\right)}=\sqrt{12\left(a^2+ab+bc+ca\right)}=\sqrt{6(a+b).2(a+c)}$.

Áp dụng BĐT CauChy được $\sqrt{6(a+b)2(a+c)}\le\dfrac{6(a+b)+2(a+c)}{2}=4a+3b+c$.

$\Rightarrow\sqrt{12\left(a^2+28\right)}\le 4a+3b+c\ \ (1)$. Tương tự $\sqrt{12\left(b^2+28\right)}\le 4b+3a+c\ \ (2)$ và $\sqrt{c^2+28}\le\dfrac{a+b}{2}+c$ (3).

Cộng theo vế (1), (2) và (3) được:

$$\sqrt{12\left(a^2+28\right)}+\sqrt{12\left(b^2+28\right)}+\sqrt{c^2+28}\le\frac{15a+15b+6c}{2}.$$

Do đó: $P\ge\dfrac{2(5a+5b+2c)}{15a+15b+6c}=\dfrac{2}{3}$.

Vậy GTNN của P là $\dfrac{2}{3}$. Đạt được khi và chỉ khi $a=b=\sqrt{\dfrac{28}{11}}$, $c=5\sqrt{\dfrac{28}{11}}$.

Câu 3: (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Giả sử các điểm B,C cố định và A di động trên đường tròn (O) sao cho $AB<AC$ và $AC<BC$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N.

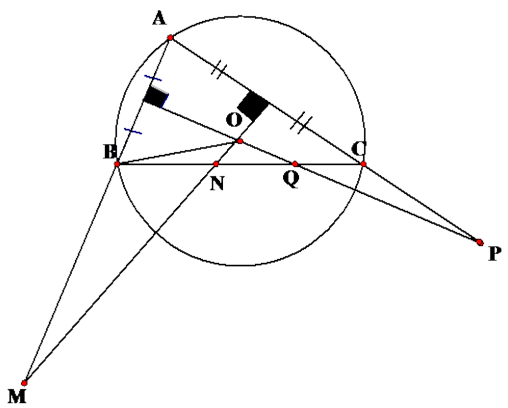
a) Chứng minh rằng: $OM.ON=R^2$.

b) Chứng minh rằng bốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên một đường tròn.

c) Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T. Chứng minh ba điểm S,T,O thẳng hàng.

Lời giải

a)



Xét ΔOBM và ΔONB, ta có:

$\widehat{BOM}$: chung

Ta có $\widehat{OMB} = 90° - \widehat{A}$

Và $\widehat{OBN} = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{BOC}\right) = 90° - \widehat{A}$

Nên $\widehat{OMB} = \widehat{OBN}$

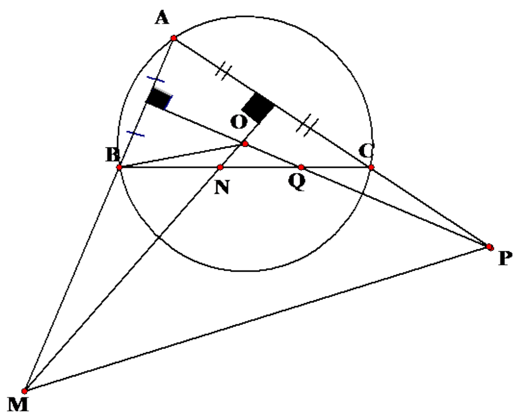
Vậy $\Delta OBM \sim \Delta ONB$ (g.g).

$\Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{OB}{ON}$

$\Rightarrow ON.OM = OB^2 = R^2$

$\Rightarrow OM.ON = R^2$.

b)



Chứng minh tương tự câu a, ta cũng có:

$OP.OQ = R^2 \Rightarrow ON.OM = OP.OQ$.

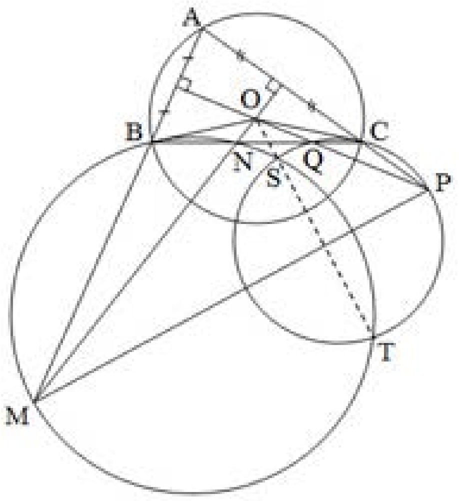
$\Rightarrow \frac{OP}{ON} = \frac{OM}{OQ}$, có $\widehat{MOP}$ chung.

Vậy $\Delta OPM \sim \Delta ONQ$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{ONQ} = \widehat{OPM}$.

Suy ra tứ giác $MNQP$ nội tiếp hay bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

c) Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T. Chứng minh ba điểm S, T, O thẳng hàng.



Ta chứng minh O thuộc đường thẳng ST. Thật vậy, giả sử OS cắt hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ lần lượt tại T_1 và T_2.

Xét ΔONS ΔOT_1M .

$\widehat{MOT_1}$: chung

$\widehat{OT_1M} = \widehat{ONS}$ ($MNST_1$ nội tiếp)

Vậy $\Delta ONS \sim \Delta OT_1M$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{ON}{OT_1} = \dfrac{OS}{OM}$.

$\Rightarrow ON.OM = OS.OT_1$ (1).

Chứng minh tương tự, $OP.OQ = OS.OT_2$ (2)

Mà $ON.OM = OP.OQ$ (3).

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $OS.OT_1 = OS.OT_2$.

Do đó T_1 trùng với T_2.

Vậy ba điểm S,T,O thẳng hàng.

Câu 4: (4 điểm)

a) Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $16\left(x^3 - y^3\right) = 15xy + 371$.

b) Giả sử Trung tâm thành phố Bến Tre có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm 671 bóng đèn ánh sáng trắng, 673 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 675 bóng đèn ánh sáng vàng sậm. Người ta thực hiện dự án thay bóng đèn theo quy luật sau: mỗi lần người ta tháo bỏ hai bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi theo quy trình trên, đến một lúc nào đó, người ta có thể nhận được tất cả các bóng đèn đều thuộc cùng một loại không? Giải thích vì sao?

Lời giải

a) Vì x, y nguyên dương nên $16\left(x^3-y^3\right)=15xy+371>0 \Rightarrow x>y$.

Ta lại có $15xy=16\left(x^3-y^3\right)-371$ là số lẻ nên x, y đều lẻ. suy ra $y \geq 1; x>y \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$.

Xét $x=3 \Rightarrow y<3 \Rightarrow y=1$ thay vào phương trình thỏa mãn.

Xét $x \geq 5$ ta có $x-2 \geq y$, suy ra $16\left(x^3-y^3\right) \geq 16\left[x^3-(x-2)^3\right]=16\left(6x^2-12x+8\right)$.

Mặt khác $15xy+371 \leq 15x(x-2)+371=15x^2-30x+371$. Ta chứng minh

$16\left(6x^2-12x+8\right)>15x^2-30x+371$.

Thật vậy, $16\left(6x^2-12x+8\right)>15x^2-30x+371$

$\Leftrightarrow 81x^2-162x-243>0 \Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)>0$ đúng với mọi $x \geq 5$.

Suy ra $16\left(x^3-y^3\right)>15xy+371$ với mọi $x \geq 5$.

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y)=(3;1)$.

b) Ta có 671 chia cho 3 dư 2; 673 chia cho 3 dư 1; 675 chia cho 3 dư 0.

Ta thấy mỗi loại bóng đèn có số bóng khi chia cho 3 được các số dư khác nhau 0, 1, 2.

Sau mỗi bước thay bóng đèn, số bóng đèn mỗi loại giảm đi 1 hoặc tăng thêm 2, khi đó số dư của chúng khi chia cho 3 thay đổi như sau:

- Số chia cho 3 dư 0 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 2.
- Số chia cho 3 dư 1 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 0.
- Số chia cho 3 dư 2 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 1.

Do đó sau mỗi bước thay bóng thì số bóng đèn mỗi loại chia cho 3 cũng có số dư khác nhau là 0, 1, 2. Vì vậy luôn luôn chỉ có 1 loại bóng đèn có số lượng bóng chia hết cho 3. Giả sử đến một lúc nào đó tất cả bóng đèn cùng một loại, thì số bóng đèn của 2 loại kia đều 0 và chia hết cho 3 (mâu thuẫn).

Vậy không thể thay bóng theo quy trình như trên để tất cả bóng đèn cùng một loại.

STT 04. ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẮC NINH

Năm học 2017 – 2018

Người giải đề: Phạm Lương

Người phản biện: Tấn Hậu

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x\ge 2$.

2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị các biểu thức

$A=x^5+\dfrac{1}{x^5}$; $B=x^7+\dfrac{1}{x^7}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Cho phương trình $x^2+(m^2+1)x+m-2=0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{2x_1-1}{x_2}+\dfrac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\dfrac{55}{x_1x_2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2+y=xy+4 \\ 4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right) \end{cases}$.

Câu 3. (3,5 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

2) Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{BAC}>90^\circ\right)$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. M là điểm nằm trên cạnh BC $(BM>CM)$. Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$, ED cắt BC tại N.

1) Chứng minh rằng $MA.MD=MB.MC$ và $BN.CM=BM.CN$.

2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

3) Khi $2AB=R$, xác định vị trí của M để $2MA+AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. (2,5 điểm)

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và $xy+yz+zx\neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\le \frac{25}{3\sqrt[3]{4xy+yz+zx}}.$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. X là điểm thuộc đoạn CD, K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK=BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT=AC$, AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng $MK=MT$.

STT 04. LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẮC NINH

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Phạm Lương

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x\ge 2$.

2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị các biểu thức $A=x^5+\dfrac{1}{x^5}$; $B=x^7+\dfrac{1}{x^7}$.

Lời giải

1)

$$P=\frac{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\dfrac{\sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1}-\sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1}}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}.\left(\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}.\left(\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1\right)}{\sqrt{2x-1}+1-\sqrt{2x-1}+1}=\frac{\sqrt{2}.2\sqrt{x-1}}{2}=\sqrt{2}.\sqrt{x-1}.$$

2)

$$x^2+\frac{1}{x^2}=7\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-2=7\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3\ (\text{do } x>0)$$

Ta có $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=3.6=18$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=47$$

+) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)=x^5+\dfrac{1}{x^3}+x^3+\dfrac{1}{x^5}=x^5+\dfrac{1}{x^5}+18$

$\Rightarrow x^5+\dfrac{1}{x^5}+18=141 \Leftrightarrow x^5+\dfrac{1}{x^5}=123$

+) $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)=x^7+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^7}=x^7+\dfrac{1}{x^7}+3$

$\Rightarrow x^7+\dfrac{1}{x^7}+3=846 \Leftrightarrow x^7+\dfrac{1}{x^7}=843$

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Cho phương trình $x^2+(m^2+1)x+m-2=0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{2x_1-1}{x_2}+\dfrac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\dfrac{55}{x_1x_2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4\\4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)\end{cases}$.

Lời giải

1) $\Delta=\left(m^2+1\right)^2-4(m-2)=m^4+2(m-1)^2+7>0$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\left(m^2+1\right)\\x_1x_2=m-2\end{cases}$

$\dfrac{2x_1-1}{x_2}+\dfrac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\dfrac{55}{x_1x_2} \Leftrightarrow \dfrac{(2x_1-1)x_1+(2x_2-1)x_2}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1x_2)^2+55}{x_1x_2}$

$\Rightarrow 2x_1^2-x_1+2x_2^2-x_2=(x_1x_2)^2+55 \Leftrightarrow 2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-(x_1+x_2)-(x_1x_2)^2-55=0$

$\Leftrightarrow 2\left(-\left(m^2+1\right)\right)^2-4(m-2)+\left(m^2+1\right)-(m-2)^2+55=0$

$\Leftrightarrow 2\left(m^4+2m^2+1\right)-4m+8+m^2+1-m^2+4m-4-55=0$

$\Leftrightarrow m^4+2m^2-24=0$ (2)

Đặt $m^2=a$ $(a\ge 0)$

Phương trình (2) trở thành $a^2+2a-24=0$

Ta có $\Delta'=25>0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm:

$a_1=4$ (Nhận); $a_2=-6$ (Loại, vì $a<0$)

+) Với $a=4 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$

Vậy $m=2$; $m=-2$ là giá trị cần tìm.

2) $\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4 & (1)\\4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right) & (2)\end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+1)^2+y-xy-4=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3-xy+y=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)-y(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3-y)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\y=x+3\end{array}\right.$

+) Thay $x=1$ vào phương trình (2) ta được: $4.1^2-24.1+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3y-11}+\sqrt{y}=3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)^2=9$

$\Leftrightarrow \sqrt{3y^2-11y}=10-2y \Leftrightarrow 3y^2-11=(10-2y)^2 \Leftrightarrow y^2-29y+100=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=25 \\ y=4 \end{array}\right.$

+) Thay $y=x+3$ vào phương trình (2) ta được

$4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3(x+3)-11}+\sqrt{x+3}\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-24x+35=5\sqrt{3x-2}+5\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 4x^2-24x+35-5\sqrt{3x-2}-5\sqrt{x+3}=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-28x+24+\left(3x+2-5\sqrt{3x-2}\right)+\left(x+9-5\sqrt{x+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow 4(x-1)(x-6)+\dfrac{9(x-1)(x-6)}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\dfrac{(x-1)(x-6)}{x+9+5\sqrt{x+3}}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-6)\left(4+\dfrac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\dfrac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}\right)=0$

Vì $\left(4+\dfrac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\dfrac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}\right)>0,\ \forall x\geq\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow (x-1)(x-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=4 \\ x=6\Rightarrow y=9 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ là: $(1;4)$, $(1;25)$, $(6;9)$

Câu 3. (3,5 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

2) Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố.

Lời giải

1) $\begin{cases} m+n^2 \vdots m^2-n \\ n+m^2 \vdots n^2-m \end{cases}$ (1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n^2\geq m^2-n \\ n+m^2\geq n^2-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-n+1)(m+n)\geq 0 \\ (n-m+1)(m+n)\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-n+1\geq 0 \\ n-m+1\geq 0 \end{cases}$ (do m, n nguyên dương)

$\Leftrightarrow -1\leq m-n\leq 1$

*) TH1: $m-n=-1 \Leftrightarrow m=n-1$

+) $m+n^2 \vdots m^2-n$

$\Rightarrow \dfrac{m+n^2}{m^2-n} \in Z$

$\Rightarrow \dfrac{n-1+n^2}{(n-1)^2-n} \in Z$

$\Rightarrow \dfrac{(n^2-3n+1)+4n-2}{n^2-3n+1} \in Z$

$\Rightarrow \dfrac{4n-2}{n^2-3n+1} \in Z \Rightarrow n^2-3n+1 \le 4n-2$

$\Rightarrow n^2-7n+3 \le 0 \Rightarrow \dfrac{7-\sqrt{37}}{2} \le n \le \dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$

vì $n \in N^* \Rightarrow n \in \{1;2;3;4;5;6\}$

$\Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5\}$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp $(m;n)$ thỏa mãn là: $(2;3)$.

*) TH2: $m-n=0 \Leftrightarrow m=n$

$m+n^2 \vdots m^2-n$

$\Rightarrow \dfrac{m+n^2}{m^2-n} \in Z$

$\Rightarrow \dfrac{n+n^2}{n^2-n} \in Z \Rightarrow \dfrac{(n^2-n)+2n}{n^2-n} \in Z \Rightarrow \dfrac{2}{n-1} \in Z$

$\Rightarrow n-1 \le 2 \Rightarrow n \le 3$

Vì $n \in N^* \Rightarrow n \in \{1;2;3\} \Rightarrow m \in \{1;2;3\}$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp số $(m;n)$ thỏa mãn là: $(2;2)$, $(3;3)$.

*) TH3: $m-n=1 \Leftrightarrow m=n+1$

$n+m^2 \vdots n^2-m$

$\Rightarrow \dfrac{n+m^2}{n^2-m} \in Z \Rightarrow \dfrac{n+(n+1)^2}{n^2-n-1} \in Z \Rightarrow \dfrac{n^2+3n+1}{n^2-n-1} \in Z$

$\Rightarrow \dfrac{4n+2}{n^2-n-1} \in Z \Rightarrow n^2-n-1 \le 4n+2 \Rightarrow n^2-5n-3 \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{5-\sqrt{37}}{2} \le n \le \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

Vì $n \in N^* \Rightarrow n \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow m \in \{2;3;4;5;6\}$

Thử lại vào (1) ta được các cặp số $(m;n)$ thỏa mãn là: $(3;2)$

2) Ta xét tập T gồm các số chẵn thuộc tập A. Khi đó $|T|=8$ và với a, b thuộc T ta có a^2+b^2 , do đó $k \ge 9$

Xét các cặp số sau:

$A = \{1;4\} \cup \{3;2\} \cup \{5;16\} \cup \{6;15\} \cup \{7;12\} \cup \{8;13\} \cup \{9;10\} \cup \{11;14\}$

Ta thấy tổng bình phương của mỗi cặp số trên đều là số nguyên tố

Xét T là một tập con của A và $|T|=9$, khi đó theo nguyên lí Dirichlet T sẽ chứa ít nhất 1 cặp nói trên.

Vậy $k_{\min}=9$

Câu 4. (6,0 điểm)

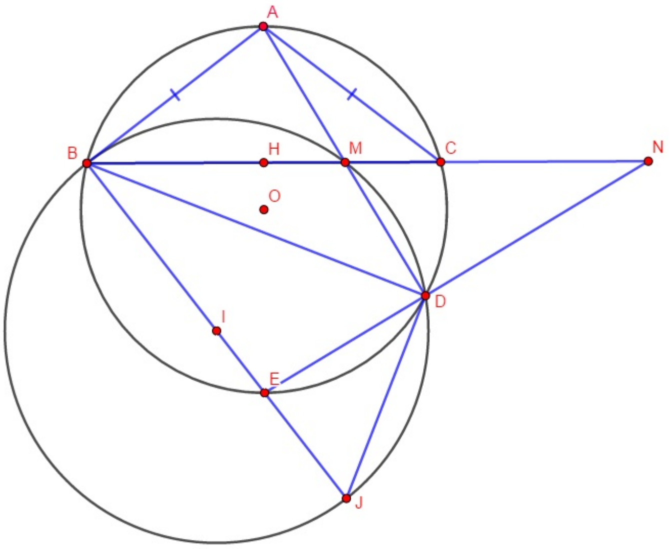
Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{BAC}>90^\circ\right)$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. M là điểm nằm trên cạnh BC $(BM>CM)$. Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$, ED cắt BC tại N.

1) Chứng minh rằng $MA.MD=MB.MC$ và $BN.CM=BM.CN$.

2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

3) Khi $2AB=R$, xác định vị trí của M để $2MA+AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



1) +) Ta có ΔMAB ” ΔMCD (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC}=\dfrac{MB}{MD}\Rightarrow MA.MD=MB.MC$ (đpcm)

+) Theo gt A là điểm chính giữa cung nhỏ BC $\Rightarrow DA$ là tia phân giác $\widehat{BDC}$ của ΔBDC (1)

Mặt khác, E là điểm chính giữa cung lớn BC $\Rightarrow AE$ là đường kính của (O)

$\Rightarrow \widehat{ADE}=90^\circ \Rightarrow DA\perp DN$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DN$ là tia phân giác ngoài $\widehat{BDC}$ của ΔBDC

Do đó, theo tính chất cảu tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của tam giác ta có:

$\dfrac{BM}{CM}=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{BN}{CN}\Rightarrow BM.CN=BN.CM$ (đpcm)

2) Kẻ BE cắt (I) tại J

Ta có $\widehat{EBD}=\widehat{EAD}$

$\widehat{BJD}=\widehat{DMC}$ (góc trong- góc ngoài)

Mà $\widehat{EAD}+\widehat{DMC}=90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{EBD}+\widehat{BJD}=90^\circ$

$\Rightarrow BD\perp JD$ $\Rightarrow BJ$ là đường kính $\Rightarrow$ $I\in BJ$ hay $I\in BE$

$\Rightarrow$ B, I, E thẳng hàng (đpcm)

3) ΔHAM" ΔDAE (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AE}=\dfrac{AH}{AD}$ $\Rightarrow$ $AM.AD=AH.AE$

Với $AE=2R$; $AH=\dfrac{AB^2}{AE}=\dfrac{R}{8}$

$\Rightarrow AM.AD=\dfrac{R^2}{4}$

Theo BĐT Cô- si: $2AM+AD\geq 2\sqrt{2AM.AD}$ $=2\sqrt{2.\dfrac{R^2}{4}}=R\sqrt{2}$

GTNN đạt được khi: $2AM=AD$

$\Rightarrow$ M là trung điểm của AD

$\Rightarrow$ $OM\perp AD$

$\Rightarrow$ M là gia điểm của đường tròn đường kính OA với BC

Câu 5. (2,5 điểm)

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và $xy+yz+zx\neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\leq\frac{25}{3\sqrt[3]{4xy+yz+zx}}.$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. X là điểm thuộc đoạn CD, K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK=BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT=AC$, AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng $MK=MT$.

Lời giải

1) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$VT=\frac{25}{3\sqrt[3]{2.2(xy+yz+zx)}}\geq\frac{25}{xy+yz+zx+4}=\frac{25}{xy+yz+zx+x+y+z+1}$$

$$\geq\frac{25}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Cần chứng minh $\sum(x+1)^2(y+1)\leq 25$

Sau khi rút gọn, BĐT trở thành $x^2y+y^2z+z^2x\leq 4$

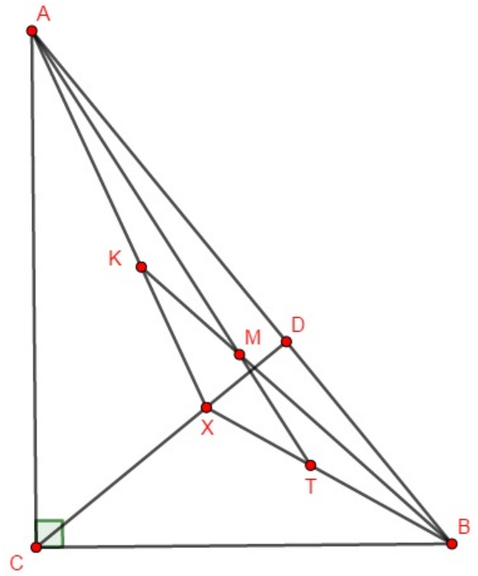
Giả sử y nằm giữa x và z, suy ra $(y-x)(y-z)\leq 0$ hay $y^2+zx\leq xy+yz$

Do đó $y^2z+z^2x\ \leq\ xyz+yz^2$

$x^2y+y^2z+z^2x\le x^2y+xyz+yz^2 \le y(z+x)^2 = \frac{1}{2}.2y(z+x)(z+x)\le\frac{1}{54}$

$(2y+z+x+z+x)^3=4$.

2)



Vẽ đường tròn $(A;AC)$, $(B;BC)$ và đường tròn (I) ngoại tiếp ΔABC

Kẻ AX cắt (I) tại Y, BX cắt (I) tại Z, AZ cắt BY tại P

Ta có $\widehat{AYB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I)) $\Rightarrow AY\perp BP$

$\widehat{BZA}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I)) $\Rightarrow BZ\perp AP$

$\Rightarrow X$ là trực tâm của ΔABP

Ta thấy ΔABC" $\Delta ACD \Rightarrow AC^2=AD.AB=AT^2$

$\Rightarrow \widehat{ATD}=\widehat{ABT}$

Tương tự, ta có $\widehat{BKD}=\widehat{BAK}$

Ta có $\widehat{APD}=\widehat{ABZ}=\widehat{ATZ} \Rightarrow$ tứ giác $ADTP$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow AT\perp PT$ (1)

Tương tự, ta có $BK\perp PK$ (2)

$\Rightarrow PK=PT$ (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra $\Delta MKP=\Delta MTP$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow MK=MT$ (đpcm)

STT 07. ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Hoàng Thanh Tùng

Người phản biện:

Câu 1:

1) Chứng minh $n^6-2n^4+n^2$ chia hết cho 36 với mọi n nguyên dương.

2) Cho ba số phân biệt a,b,c. Đặt:

$$x=(a+b+c)^2-9ab,\quad y=(a+b+c)^2-9bc,\quad z=(a+b+c)^2-9ac.$$

Chứng minh rằng trong ba số x,y,z có ít nhất một số dương.

Câu 2:

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x-y)(2x+y+1)+9(y-1)=13$

2) Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+2018}=2018$

Câu 3:

1) Cho ba số a,b,c không âm thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2\le 2(ab+bc+ca)$ và p,q,r là ba số thỏa mãn: $p+q+r=0$. Chứng minh rằng: $apq+bqr+crp\le 0$.

2) Cho các số dương a,b thỏa mãn $a.b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=(a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}$$

Câu 4:

1) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF và trực tâm là H.

a) Chứng minh rằng: AC.BD.CE = BE.CD.BH

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và BC. Đường tròn đường kính AH cắt đoạn thẳng IJ tại K. Tia AK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại M và cắt đoạn thẳng BC tại P. Tia MD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại Q. Chứng minh tứ giác AQDP là tứ giác nội tiếp.

2) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB, AC sao cho BD = AE. Xác định vị trí của điểm D, E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất.

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

STT 07. LỜI GIẢI ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Hoàng Thanh Tùng

Câu 1:

1) Chứng minh $n^6-2n^4+n^2$ chia hết cho 36 với mọi n nguyên dương.

2) Cho ba số phân biệt a,b,c. Đặt:

$$x=(a+b+c)^2-9ab,\quad y=(a+b+c)^2-9bc,\quad z=(a+b+c)^2-9ac\ .$$

Chứng minh rằng trong ba số x,y,z có ít nhất một số dương.

Lời giải

1) Ta có: $n^6-2n^4+n^2=n^6-n^4-n^4+n^2=n^4(n^2-1)-n^2(n^2-1)=\left[n(n-1)(n+1)\right]^2$

Đặt $A=n(n-1)(n+1)$, ta có $\begin{cases}A\vdots 2\\A\vdots 3\end{cases}$ và $(2,3)=1\Rightarrow A\vdots 6\Rightarrow\left[n(n-1)(n+1)\right]^2\vdots 36$ (đpcm)

2) Ta có:

$x+y+z=(a+b+c)^2-9ab+(a+b+c)^2-9bc+(a+b+c)^2-9ac=3(a+b+c)^2-9(ab+bc+ca)$

$=3\left[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\right]=\dfrac{3}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

Vì a,b,c là ba số phân biệt nên $\dfrac{3}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]>0\Rightarrow x+y+z>0$.

Do đó trong ba số x,y,z phải có ít nhất một số dương.

Câu 2:

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x-y)(2x+y+1)+9(y-1)=13$

2) Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+2018}=2018$

Lời giải

1) Ta có: $(x-y)(2x+y+1)+9(y-1)=13\Leftrightarrow 2x^2+xy+x-2xy-y^2-y+9y-9-13=0$

$(2x^2-2xy+6x)+(xy-y^2+3y)-(5x-5y+15)=7\Leftrightarrow 2x(x-y+3)+y(x-y+3)-5(x-y+3)=7$

$\Leftrightarrow(x-y+3)(2x+y-5)=7$

+ TH1: $\begin{cases} x-y+3=1 \\ 2x+y-5=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ 2x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{16}{3} \end{cases}$ (loại)

+ TH2: $\begin{cases} x-y+3=7 \\ 2x+y-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{-2}{3} \end{cases}$ (loại)

+ TH3: $\begin{cases} x-y+3=-1 \\ 2x+y-5=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

+ TH4: $\begin{cases} x-y+3=-7 \\ 2x+y-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-10 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy pt đã cho có nghiệm nguyên $(x;y)$ là: $(-2;2)$, $(-2;8)$.

2) ĐKXĐ: $x \geq -2018$, đặt $\sqrt{x+2018}=t$, $,t \geq 0$ $\Rightarrow t^2 - x = 2018$

Ta có $x^2+\sqrt{x+2018}=2018 \Leftrightarrow x^2+t=t^2-x \Leftrightarrow (x+t)(x-t+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+t=0 \\ x+1=t \end{array}\right.$

+ TH1: $\begin{cases} x+t=0 \\ -2018 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2018=0 \\ -2018 \leq x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1-3\sqrt{897}}{2}$

+ TH2: $\begin{cases} x+1=t \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2017=0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{8069}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x=\dfrac{1-3\sqrt{897}}{2}$; $x=\dfrac{-1+\sqrt{8069}}{2}$.

Câu 3:

1) Cho ba số a,b,c không âm thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca)$ và p,q,r là ba số thỏa mãn: $p+q+r=0$. Chứng minh rằng: $apq+bqr+crp \leq 0$.

2) Cho các số dương a,b thỏa mãn $a.b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=(a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}$$

Lời giải

1) Từ gt: $a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a-b-c)^2 \leq 4bc \Leftrightarrow |a-b-c| \leq 2\sqrt{bc}$

Lại có: $p+q+r=0 \Leftrightarrow r=-p-q$

$\Rightarrow apq+bqr+crp = apq+bq(-p-q)+cp(-p-q) = apq-bpq-bq^2-cpq-cp^2 = pq(a-b-c)-(bq^2+cp^2)$

Ta có: $bq^2+cp^2 \geq |pq|2\sqrt{bc} \geq |pq||a-b-c| \geq pq(a-b-c)$

$\Rightarrow pq(a-b-c)-(bq^2+cp^2) \leq 0 \Rightarrow apq+bqr+crp \leq 0$ (đpcm).

2) Sử dụng BĐT AM – GM, ta có: $a^2+b^2 \geq 2ab = 2$

$\Rightarrow M = (a+b+1)(a^2+b^2)+\dfrac{4}{a+b} \geq (a+b+1).2+\dfrac{4}{a+b} = \left(a+b+\dfrac{4}{a+b}\right)+a+b+2$

$\geq 2\sqrt{(a+b).\dfrac{4}{a+b}}+2\sqrt{ab}+2 = 2.2+2+2=8$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 8 khi $a=b=1$.

Câu 4:

1) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF và trực tâm là H.

a) Chứng minh rằng: AC.BD.CE = BE.CD.BH

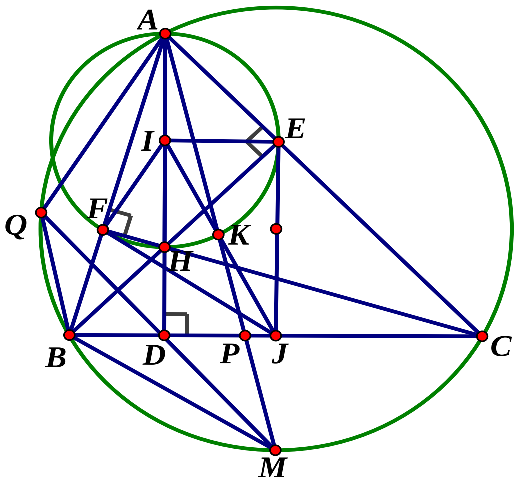
b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và BC. Đường tròn đường kính AH cắt đoạn thẳng IJ tại K. Tia AK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại M và cắt đoạn thẳng BC tại P. Tia MD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại Q. Chứng minh tứ giác AQDP là tứ giác nội tiếp.

2) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB, AC sao cho BD = AE. Xác định vị trí của điểm D, E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất.

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải



1. a) Ta có: $\triangle BDH \backsim \triangle BEC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow$ BH.BE = BC.BD (1)

$$\Delta BEC \backsim \Delta ADC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow BC.CD = CE.AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: BH.BE.BC.CD = BC.BD.CE.AC $\Rightarrow$ AC.BD.CE = BE.CD.BH (đpcm).

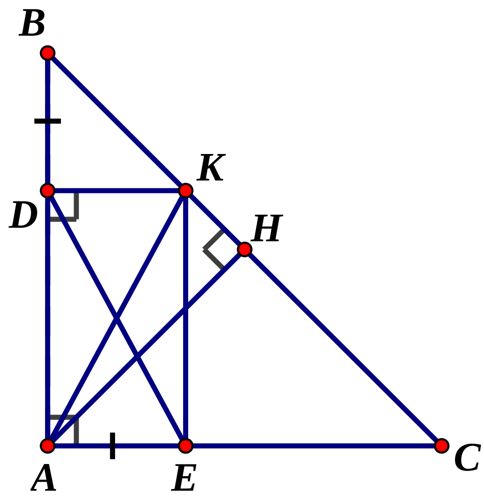
b) Ta có: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp

Ta có: $IE = IF = \dfrac{1}{2}AH$; $JE = JF = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow \triangle IEJ = \triangle IFJ$ (c-c-c)

$\Rightarrow \widehat{JIE} = \widehat{JIF} \Rightarrow \widehat{KIE} = \widehat{KIF} \Rightarrow \dfrac{\widehat{KIE}}{2} = \dfrac{\widehat{KIF}}{2} \Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{KAF} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{MC} = \widehat{MB}$

$\Rightarrow \widehat{BDQ} = \widehat{MBC} + \widehat{BMQ} = \widehat{MAB} + \widehat{BAQ} = \widehat{QAP} \Rightarrow$ Tứ giác AQDP nội tiếp.

2. a) Kẻ $AH \perp BC\,(H \in BC)$, qua D kẻ $DK \perp AB\,(K \in BC)$



$\Rightarrow \widehat{DKB} = 90^0 - \widehat{ABC} = 45^0 \Rightarrow \triangle BDK$ vuông cân tại D.

$\Rightarrow BD = DK = AE \Rightarrow$ Tứ giác ADKE là hình chữ nhật.

$\Rightarrow DE = AK$.

Ta có: $AK \ge AH \Rightarrow DE \ge AH$. Vậy DE nhỏ nhất khi $K \equiv H$ khi đó D là trung điểm của AB và E là trung điểm AC.

b)

Đặt $AB = AC = a$, $(a > 0)$; $BD = AE = x \Rightarrow AD = a - x$

Ta chứng minh BĐT: Với mọi a, b ta luôn có: $(a + b)^2 \ge 4ab$ (*)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow (a - b)^2 \ge 0$ (BĐT luôn đúng).

Áp dụng (*) ta có: $S_{ADE} = \dfrac{1}{2}AD.AE = \dfrac{1}{2}(a - x)x \le \dfrac{1}{8}\left[(a - x) + x\right]^2 = \dfrac{a^2}{8}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2}{2}$. Do đó: $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \ge \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{3a^2}{8}$ không đổi.

Dấu "=" xảy ra khi $a - x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$. Vậy tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất là $\dfrac{3a^2}{8} = \dfrac{3AB^2}{8}$ khi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC.

ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 SGD BÌNH DƯƠNG

NĂM HỌC:2016-2017

Người giải đề: Triệu Tiến Tuấn

Người phản biện: Nguyễn Văn Tú

Câu 1: (5 điểm)

a) Tìm tất cả các ngiệm nguyên của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2017$

b) Xác định số điện thoại của THCS X thành phố Thủ Dầu Một, biết số đó dạng $\overline{82xxyy}$ với $\overline{xxyy}$ là số chính phương.

Câu 2: (4 điểm)

Tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$, $M\in(O;R)$. Chứng minh rằng: $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2$

Câu 3: (3 điểm)

a) Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\dfrac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)}=1$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5\\(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=49\end{cases}$

Câu 4: (3 điểm)

a) Chứng minh với mọi số a,b,c,d ta luôn có: $(a^2+c^2)(b^2+d^2)\geq(ab+cd)^2$

b) Cho $a,b>0$ chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2}{(4a+3b)(3a+4b)}\geq\dfrac{1}{25}$

Câu 5: (3 điểm) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,BC,CA,DA. Chứng minh rằng: $S_{ABCD}\leq MP.NQ\leq\dfrac{1}{4}(AB+CD)(AD+BC)$

Câu 6: (2,0 điểm)

Cho đa giác lồi có 12 cạnh

a) Tìm số đường chéo

b) Tìm số tam giác có ít nhất 1 cạnh là cạnh của đa giác đó ?

LỜI GIẢI ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 SGD BÌNH DƯƠNG

NĂM HỌC 2016-2017

Người giải đề: Triệu Tiến Tuấn

Câu 1: (5 điểm)

a) Tìm tất cả các ngiệm nguyên của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2017$

b) Xác định số điện thoại của THCS X thành phố Thủ Dầu Một, biết số đó dạng $\overline{82xxyy}$ với $\overline{xxyy}$ là số chính phương.

Lời giải

a) Phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2017 \quad (x,y\geq 0)\Leftrightarrow x=2017^2+y-4034\sqrt{y}$

Do $x,y\in Z\Rightarrow \sqrt{y}\in Z$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $x=a^2;\quad y=(2017-a)^2$

b) Ta có: $\overline{xxyy}=11\overline{x0y}$ là số chính phương nên

$\overline{x0y}\,\vdots\,11\Leftrightarrow 100x+y\,\vdots\,11\Leftrightarrow 99x+x+y\,\vdots\,11$

$\Leftrightarrow x+y\,\vdots\,11\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=11\\x+y=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0\\x+y=11\end{array}\right.$

Ta có: $\overline{xxyy}=11\overline{x0y}=11(99x+x+y)=11(99x+11)=11^2(9x+1)$

$\Rightarrow 9x+1$ là số chính phương.

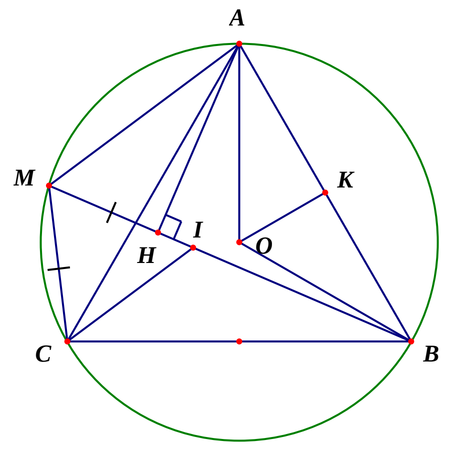
$\Rightarrow x=7\Rightarrow y=4$

Vậy $\overline{xxyy}=7744;\ \overline{xxyy}=0000$

Câu 2: (4 điểm)

Tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$, $M\in(O;R)$. Chứng minh rằng: $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2$

Lời giải



Giả sử $M \in \overset{\frown}{AC}$

Dễ thấy: $MA + MC = MB$ (trên MB lấy I sao cho $MI = MC$, ta chứng minh: $IB = MA$)

Đặt: $MA = x; MB = y; MC = y - x$. Ta có:

$AM^2 + BM^2 + CM^2 = x^2 + y^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2 - xy)$

Kẻ $AH \perp BM \Rightarrow MH = \dfrac{x}{2} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{3}{4}x^2$

Mà $BH = MB - MH = y - \dfrac{x}{2}$

$BH = MB - MH = y - \dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 = \dfrac{3}{4}x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}x^2 - xy = x^2 + y^2 - xy \quad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow AM^2 + BM^2 + CM^2 = 2AB^2 = 2(R\sqrt{3})^2 = 6R^2 \quad (dpcm)$

Câu 3: (3 điểm)

a) Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} + \dfrac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$

Lời giải

a) Phương trình: $\dfrac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} + \dfrac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1$

Điều kiện: $\begin{cases} 9 - x^2 \ge 0 \\ 3 - \sqrt{9-x^2} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ x \ne 0 \end{cases}$

$$\dfrac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} + \dfrac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)\left(3+\sqrt{9-x^2}\right)}{\left(3+\sqrt{9-x^2}\right)} + \dfrac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(3-\sqrt{9-x^2}\right) + \dfrac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)^2-4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3-\sqrt{9-x^2}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sqrt{9-x^2}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x^2=\frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}(tmdk)$$

b) Hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5\\(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=49\end{cases}$ $\quad dk: x,y\neq 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5\\x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5\\\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=53\end{cases}$$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=a; y+\dfrac{1}{y}=b$ ta được:

$$\begin{cases}a+b=5\\a^2+b^2=53\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5-b\\2b^2-10b-28=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=7;a=-2\\b=-2;a=7\end{cases}$$

- $\begin{cases}a=-2\\b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=-2\\y+\dfrac{1}{y}=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}\end{cases}$
- $\begin{cases}a=7\\b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=7\\y+\dfrac{1}{y}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}\\y=-1\end{cases}$

Câu 4: (3 điểm)

a) Chứng minh với mọi số a,b,c,d ta luôn có: $(a^2+c^2)(b^2+d^2)\geq(ab+cd)^2$

b) Cho $a,b>0$ chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2}{(4a+3b)(3a+4b)}\geq\dfrac{1}{25}$

Lời giải

a) Ta có:

$(a^2+c^2)(b^2+d^2)\geq(ab+cd)^2$

$\Leftrightarrow a^2b^2+a^2d^2+c^2b^2+c^2d^2\geq a^2b^2+c^2d^2+2abcd$

$\Leftrightarrow a^2d^2+c^2b^2-2abcd\geq 0$

$\Leftrightarrow (ad-cb)^2\geq 0$ luôn đúng.

b) Ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{(4a+3b)(3a+4b)} \geq \frac{1}{25} \Leftrightarrow 25a^2+25b^2 \geq (4a+3b)(3a+4b)$$

$$\Leftrightarrow 13(a^2+b^2) \geq 25ab \Leftrightarrow 13(a-b)^2+ab \geq 0$$

Dấu "=" không xảy ra, vậy: $\frac{a^2+b^2}{(4a+3b)(3a+4b)} > \frac{1}{25}$

Câu 5: (3 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA, DA.

Chứng minh rằng: $S_{ABCD} \leq MP.NQ \leq \frac{1}{4}(AB+CD)(AD+BC)$

Lời giải

Ta có: $MP.NQ \geq 2S_{MNPQ} = S_{ABCD}$

Gọi R là trung điểm của AC, ta có :

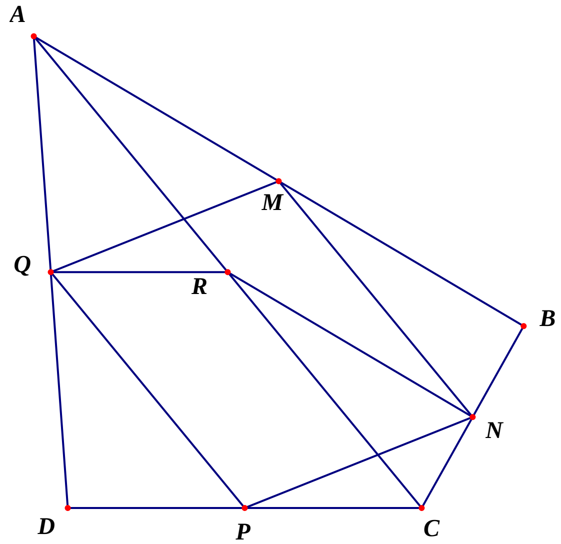
$NR = \frac{1}{2}AB;\ QR = \frac{1}{2}CD$

Suy ra: $NQ \leq NR + QR \leq \frac{1}{2}(AB+CD)$

Tương tự: $PM \leq \frac{1}{2}(AD+BC)$

$\Rightarrow \mathrm{MP.NQ} \leq \frac{1}{4}(AB+CD)(AD+BC)$

$\Rightarrow S_{ABCD} \leq MP.NQ \leq \frac{1}{4}(AB+CD)(AD+BC)$



Câu 6: (2 điểm)

Cho đa giác lồi có 12 cạnh

a) Tìm số đường chéo

b) Tìm số tam giác có ít nhất 1 cạnh là cạnh của đa giác đó ?

Lời giải

a) Số đường chéo của đa giác là: $\frac{12(12-3)}{2} = 54$

b) Nhận thấy rằng với mỗi cạnh của tam giác, ta lập được 10 tam giác mà mỗi tam giác thỏa mãn đề bài mà đa giác ban đầu có 12 cạnh nên số tam giác thỏa mãn đề bài là $10.12 = 120$

Tuy nhiên nếu như tính theo cách trên thì các tam giác mà có 2 cạnh là 2 cạnh kề của đa giác đã cho được tính 2 lần

Ta có số tam giác được tính 2 lần như trên là 12 tam giác nên số tam giác thỏa mãn đề bài thực chất là: $120 - 12 = 108$ tam giác.

STT 10 . ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BÌNH THUẬN

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Nguyễn Văn Tú

Người phản biện: Lê Minh Vũ

Câu 1(4 điểm)

Cho biểu thức: $Q=\sqrt{25x}:\left[\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{3(x-1)}{\sqrt{x}-1}\right]$ với $x\neq 1$ và $x>0$

a, Rút gọn biểu thức Q

b, Tìm x để biểu thức Q nhận giá trị nguyên.

Câu 2(4 điểm)

Cho hệ phương trình ẩn x và y: $\begin{cases} ax-y=a^2-2 \\ (a+1)x+ay=2a-1 \end{cases}$

a, Giải hệ phương trình trên với a = 1

b, Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa P = xy đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3 (4 điểm)

Với k là số nguyên dương, ký hiệu $B_k=\{x\in N^*/x$ là bội số của k}

Cho m,n là các số nguyên dương

a, Chứng minh rằng B_{mn} là tập hợp con của $B_m\cap B_n$

b, Tìm điều kiện của m và n để $B_m\cap B_n$ là tập hợp con của B_{mn}.

Câu 4 (6 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Gọi E là điểm thay đổi trên BC(E không trùng B và C) và F thay đổi trên CD sao cho $\widehat{EAF}=45^0$, BD cắt AE , AF lần lượt tại M và N.

a, Chứng minh năm điểm E, M, N, F, C cùng nằm trên một đường tròn.

b, Tính tỷ số $\dfrac{MN}{FE}$

c, Chứng minh đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi E,F thay đổi.

Câu 5(2 điểm)

Trên mặt phẳng cho 4035 điểm phân biệt. Biết rằng trong ba điểm bất kỳ trong số đó luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn một. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng một chứa không ít hơn 2018 điểm đã cho.

------------Hết----------

STT 10 . LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH BÌNH THUẬN NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Nguyễn Văn Tú

Người phản biện: Lê Minh Vũ

Câu 1(4 điểm)

Cho biểu thức: $Q=\sqrt{25x}:\left[\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{3(x-1)}{\sqrt{x}-1}\right]$ với $x\neq 1$ và $x>0$

a, Rút gọn biểu thức Q

b, Tìm x để biểu thức Q nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a, Rút gọn. Với $x\neq 1$ và $x>0$, ta có:

$$Q=\sqrt{25x}:\left[\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{x}-1}\right]$$
$$=5\sqrt{x}:\left[\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-(3\sqrt{x}+2)+3(\sqrt{x}+1)\right]$$
$$=5\sqrt{x}:(x+\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2+3\sqrt{x}+3)$$

$= 5\sqrt{x} : (x + \sqrt{x} + 1)$

$= \dfrac{5\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$

b, Tìm x để biểu thức Q nhận giá trị nguyên.

Dễ thấy Q>0.

Phương trình sau có nghiệm x > 0, x $\neq 1$

$Q = \dfrac{5\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$

$\Leftrightarrow Qx + (Q - 5)\sqrt{x} + Q = 0$ có nghiệm x > 0, x $\neq 1$

$\Leftrightarrow Qy^2 + (Q - 5)\,y + Q = 0$ có nghiệm y > 0, y $\neq 1$

$\Delta = (Q - 5)^2 - 4Q^2 = (3Q - 5)(-Q - 5) \geq 0$

$\Leftrightarrow -5 \leq Q \leq \dfrac{5}{3}$

Mà Q nguyên và Q > 0 nên Q = 1 hoặc Q = 2

Với Q = 1 Tìm được $x = 7 \pm 4\sqrt{3}$ (Thỏa mãn)

Với Q = 2 phương trình vô nghiệm.

Câu 2(4 điểm)

Cho hệ phương trình ẩn x và y: $\begin{cases} ax - y = a^2 - 2 \\ (a+1)x + ay = 2a - 1 \end{cases}$

a, Giải hệ phương trình trên với a = 1

b, Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa P = xy đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

a, Nghiệm của HPT là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

b, $\begin{cases} ax - y = a^2 - 2 \\ (a+1)x + ay = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x - ay = a^3 - 2a \\ (a+1)x + ay = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2+a+1)x = a^3 - 1 \\ (a+1)x + ay = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 1 \\ y = -a + 2 \end{cases}$

Với mọi a

Nên P = xy = (a-1)(-a+2) $= \dfrac{1}{4} - (a - \dfrac{3}{2})^2 \leq \dfrac{1}{4}$

P đạt giá trị lớn nhất là 1/4 đạt được khi a = 3/2

Câu 3 (4 điểm)

Với k là số nguyên dương, ký hiệu $B_k = \{x \in N^* / x$ là bội số của k}

Cho m,n là các số nguyên dương

a, Chứng minh rằng B_{mn} là tập hợp con của $B_m \cap B_n$

b, Tìm điều kiện của m và n để $B_m \cap B_n$ là tập hợp con của B_{mn}.

Lời giải:

a, Ta có: $B_{mn} = \{x \in N^* /$ x là bội của (mn)}={mn;2mn;3mn;...;kmn }

$B_m \cap B_n = \{x \in N^* /$ x là bội của m và n}

={BCNN(m,n); 2BCNN(m,n); ...; hBCNN(m,n)}

Vì $\begin{cases} mn \vdots m \\ mn \vdots n \end{cases} \Rightarrow mn \in BC(m,n) \Rightarrow kmn \in BC(m,n)$

Nên B_{mn} là tập hợp con của $B_m \cap B_n$

b, Để $B_m \cap B_n$ là tập hợp con của B_{mn} mà theo câu a thì B_{mn} là tập hợp con của $B_m \cap B_n$ Nên $B_{mn} = B_m \cap B_n \Leftrightarrow BCNN(m,n) = mn \Leftrightarrow (m,n) = 1$

Hay m và n là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 4 (6 điểm)

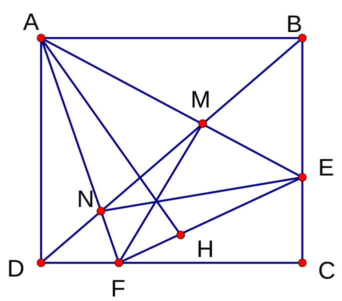
Cho hình vuông ABCD. Gọi E là điểm thay đổi trên BC(E không trùng B và C) và F thay đổi trên CD sao cho $\widehat{EAF} = 45^0$, BD cắt AE , AF lần lượt tại M và N.

a, Chứng minh năm điểm E, M, N, F, C cùng nằm trên một đường tròn.

b, Tính tỷ số $\frac{MN}{FE}$

c, Chứng minh đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi E,F thay đổi.

Lời giải:



a, Tứ giác AMFD nội tiếp đường tròn (vì $\widehat{MAF} = \widehat{MDF} = 45^0$)

$\Rightarrow \widehat{AFM} = \widehat{ADM} = 45^0 \Rightarrow \Delta AMF$ vuông cân $\Rightarrow FM \perp AE$

Tương tự: $EN \perp AF$

=>M,N,C nhìn EF dưới một góc vuông =>M,N,F,C,E nằm trên đường tròn đường kính EF .

b, $\Delta ANE \backsim \Delta AMF(gg) \Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta AEF(cgc) \Rightarrow \frac{MN}{FE} = \frac{AM}{FA} = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c, Tính chất trực tâm tam giác AEF => $FE \perp AH$

Dễ thấy : $\widehat{FAD} = \widehat{FMD} = \widehat{FEN} = \widehat{FAH}$ (Các tứ giác ADFM,EFNM,ANHE nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta FAD = \Delta FAH\,(ch - gn)$ => AH = AD (Không đổi)

Mà $FE \perp AH$

=>EF tiếp xúc với đường tròn (A;AD) cố định.

Câu 5(2 điểm)

Trên mặt phẳng cho 4035 điểm phân biệt. Biết rằng trong ba điểm bất kỳ trong số đó luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn một. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng một chứa không ít hơn 2018 điểm đã cho.

Lời giải:

Dùng nguyên lý Dirichlet

-Nếu khoảng cách hai điểm bất kỳ đều bé hơn 1 thì ta chỉ cần chọn 1 điểm A bất kỳ trong số 4035 điểm đã cho rồi vẽ đường tròn (A;1) đường tròn này chứa tất cả 4034 điểm còn lại nên ta có điều phải chứng minh.

-Giả sử rằng có hai điểm A và B trong số 4035 điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 1, vẽ các đường tròn tâm A và B có cùng bán kính bằng 1, ta còn lại 4033 điểm. Mỗi điểm C bất kỳ trong số 4033 điểm ấy, theo giả thiết AB,AC,BC phải có một đoạn thẳng có độ dài bé hơn 1 mà AB>1, nên AC<1 hoặc BC<1.Do đó hoặc C nằm trong đường tròn (A;1) hoặc (B;1),do có 4033 điểm C như vậy nên theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất $\left[\frac{4033}{2}\right] + 1 = 2017$ điểm nằm trong cùng 1 đường tròn (Trong hai đường tròn đang xét) Giả sử đó là đường tròn (A;1). Cùng với điểm A ta có 2018 điểm nằm trong cùng một đường tròn (A;1) => ĐPCM

STT 11.ĐỀ THI CHỌN HSG TP ĐÀ NẴNG

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: MinhVu Le

Người phản biện: Nguyễn Văn Bình

Câu 1. (1 điểm)

Tính $A=\dfrac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}}+\sqrt{\dfrac{2}{18-5\sqrt{11}}}$

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ với $x>0$; $x\#1$

Rút gọn A và chứng minh $A<\dfrac{2}{3}$.

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho đường thẳng d_m có phương trình: $y=mx+2m-1$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng: Khi m thay đổi thì đường thẳng d_m luôn đi qua 1 điểm H cố định. Tìm tọa độ của điểm H

b) Tìm giá trị của m sao cho khoảng cách từ điểm A(1;2) đến d_m lớn nhất.

Câu 4. (2 điểm)

a) Tìm tất cả các số của x thỏa mãn $\sqrt{x-4\sqrt{x-2}+2}+\sqrt{x+6\sqrt{x-2}+7}=7$

b) Tìm tất cả (x,y,z) thỏa mãn $\begin{cases} x^2-2x=y \\ y^2+2y=z \\ x+y+z+1+\sqrt{x-1}=0 \end{cases}$

Câu 5. (1 điểm)

Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu giảm chiều rộng đi 1m và tăng chiều dài thêm 2m thì diện tích không đổi; ngoài ra nếu giảm chiều dài đi 4m đồng thời tăng chiều rộng thêm 3m ta được hình vuông. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu.

Câu 6: (1 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có đường chéo $AC=4$, $\widehat{ABC}=150^0$. Gọi E; F lần lượt là chân đường cao hạ từ C đến AB và AD. Tính độ dài đoạn EF.

Câu 7: (1 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng qua C và song song với AB tại D.

a) Chứng minh rằng: $BC^2=AB.CD$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC; E là giao điểm của CG và BD. Tiếp tuyến tại C của (O) cắ BG tại F. Chứng minh rằng: $\widehat{EAG}=\widehat{FAG}$

STT 1 1. LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TP ĐÀ NẴNG

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: MinhVu Le

Câu 1: (1 điểm)

Tính $A=\dfrac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}}+\sqrt{\dfrac{2}{18-5\sqrt{11}}}$

Lời giải

$$A=\frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}}+\sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}}=\frac{\left(1+\sqrt{11}\right)\left(2-\sqrt{11}\right)}{4-11}+\sqrt{\frac{2\left(18+5\sqrt{11}\right)}{49}}$$

$$A=\frac{9-\sqrt{11}+5+\sqrt{11}}{7}=2$$

Câu 2: (1,5 điểm)

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ với $x>0;\ x\#1$

Rút gọn A và chứng minh $A<\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

+ Rút gọn A

$$A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \quad \text{Với } x>0;\ x\#1$$

$$A=\left(\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1+\sqrt{x}\right)}+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1+\sqrt{x}\right)}+\frac{1\left(x+1+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1+\sqrt{x}\right)}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$

$$A=\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1+\sqrt{x}\right)}\right).\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$A=\frac{2\sqrt{x}}{\left(x+1+\sqrt{x}\right)}$$

+ Chứng minh $A<\dfrac{2}{3}$.

Xét hiệu $A-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\left(x+1+\sqrt{x}\right)}-\dfrac{2}{3}$

$$A=\frac{6\sqrt{x}-2x-2\sqrt{x}-2}{3\left(x+1+\sqrt{x}\right)}=\frac{-2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{3\left(x+1+\sqrt{x}\right)}<0 \text{ với } x>0;\ x\#1$$

$$\Leftrightarrow A-\frac{2}{3}<0 \Rightarrow A<\frac{2}{3}$$

Câu 3: (1,5 điểm)

Cho đường thẳng d_m có phương trình: $y=mx+2m-1$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng: Khi m thay đổi thì đường thẳng d_m luôn đi qua 1 điểm H cố định. Tìm tọa độ của điểm H

b) Tìm giá trị của m sao cho khoảng cách từ điểm A(1;2) đến d_m lớn nhất.

Lời giải

a) Chứng minh rằng: Khi m thay đổi tì đường thẳng d_m luôn đi qua 1 điểm H cố định. Tìm tọa độ của điểm H.

Gọi $H(x_0;y_0)$ là điểm cố định luôn đi qua d_m với mọi m.

$H(x_0;y_0)\in d_m$ với mọi m

Ta có: $y_0=mx_0+2m-1 \Leftrightarrow y_0+1=\left(x_0+2\right)m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+2=0 \\ y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=-1 \end{cases}.$$ Vậy $H(-2;-1)$

b) Khoảng cách từ điểm A(1;2) đến d_m

$$h_{(A,d_m)}=\frac{|m-2+2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{3|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\le 3\sqrt{2}$$

Do $\left(\left(m-1\right)^2\le 2\left(m^2+1\right)\Rightarrow \frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\le\sqrt{2}\ \right)$

Dấu " = " xảy ra khi $m=-1$

Khoảng cách từ điểm A(1;2) đến d_m lớn nhất là $3\sqrt{2}$ khi $m=-1$

Câu 4: (2 điểm)

a) Tìm tất cả các số của x thỏa mãn $\sqrt{x-4\sqrt{x-2}+2}+\sqrt{x+6\sqrt{x-2}+7}=7$

b) Tìm tất cả $\left(x,y,z\right)$ thỏa mãn $\begin{cases} x^2-2x=y \\ y^2+2y=z \\ x+y+z+1+\sqrt{x-1}=0 \end{cases}$

Lời giải

a) ĐK $x\ge 2$

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-2}+2}+\sqrt{x+6\sqrt{x-2}+7}=7$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-2}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-2}+3\right)^2}=7$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-2}-2\right|+\sqrt{x-2}+3=7$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}-2+\sqrt{x-2}+3=7 \\ 2-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}+3=7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x-2}=6 \\ 5=7(loai) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=11$ (t/m)

b)

$$\begin{cases} x^2-2x=y(1) \\ y^2+2y=z(2) \\ x+y+z+1+\sqrt{x-1}=0(3) \end{cases} \quad (\text{ I})$$

Thay (1) và (2) vào (3) ta có:

$x+x^2-2x+y^2+2y+1+\sqrt{x-1}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(x-1)+\sqrt{x-1}=0$

Vế trái ≥ 0; Vế phải = 0 nên dấu bằng xảy ra khi:

$\begin{cases} x-1=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

Suy ra $z=-1$

Vậy $(x,y,z)=(1,-1,-1)$

Câu 5: (1 điểm)

Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu giảm chiều rộng đi 1m và tăng chiều dài thêm 2m thì diện tích không đổi; ngoài ra nếu giảm chiều dài đi 4m đồng thời tăng chiều rộng thêm 3m ta được hình vuông. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu.

Lời giải

Gọi chiều rộng và chiều dài của thửa ruộng hình chữ nhật là x ; y với ($x>1$; $y>4$)

Nếu giảm chiều rộng đi 1m và tăng chiều dài thêm 2m thì diện tích không đổi nên ta có pt

$(x-1).(y+2)=xy$ (1)

Nếu giảm chiều dài đi 4m đồng thời tăng chiều rộng thêm 3m ta được hình vuông nên ta có pt

$x+3=y-4 \Leftrightarrow x=y-7$ (2)

Thế (2) vào (1) ta có:

$(y-8).(y+2)=y.(y-7)$

$\Leftrightarrow y=16$; $x=9$

Vậy diện tích thửa ruộng ban đầu là: 16.9=144 (m^2)

Câu 6: (1 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có đường chéo $AC=4$, $\widehat{ABC}=150^0$. Gọi E; F lần lượt là chân đường cao hạ từ C đến AB và AD. Tính độ dài đoạn EF.

Lời giải

Ta có: Tứ giác AECF nội tiếp vì ($\widehat{AEC} = \widehat{CFA} = 90^0$)

Nên: $\widehat{EAC} = \widehat{CFE}$ (Cùng chắn cung EC)

$\widehat{FAC} = \widehat{FEC}$ (Cùng chắn cung FC)

$\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$ (so le trong)

Suy ra: $\triangle\ BAC \sim \triangle\ CFE$ (g.g)

$$\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{FE} \Rightarrow FE = \frac{CE.AC}{BC} = AC.\sin 30^0 = 4.\frac{1}{2} = 2$$

Câu 7: (1 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng qua C và song song với AB tại D.

a) Chứng minh rằng: $BC^2 = AB.CD$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC; E là giao điểm của CG và BD. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt BG tại F. Chứng minh rằng: $\widehat{EAG} = \widehat{FAG}$

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{BAC}=\widehat{CBD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{ABC}=\widehat{BCD}$ (so le trong)

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BCD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BC}{CD} \Rightarrow BC^2=AB.CD$ (1)

b) Qua A kẻ tiếp tuyến tại C với (O) cắt đường thẳng qua B song song với AC tại I, Cắt AF tại j. Nối AE cắt CD tại H.

Chứng minh được: $BC^2=AC.BI$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$AB.CD=AC.BI \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BI}{CD}$ (3)

Lại có: $AC \parallel JI \Rightarrow \dfrac{AN}{JB}=\dfrac{FN}{FB}=\dfrac{CN}{IB}$

Do $AN=NC \Rightarrow JB=IB$ (4)

Tương tự: $AB \parallel FI \Rightarrow \dfrac{AP}{CH}=\dfrac{EP}{EC}=\dfrac{BP}{CD}$

Do $AP=BP \Rightarrow CD=CH$ (5)

Từ (3),(4),(5) ta có:

$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BJ}{CH} \Rightarrow \dfrac{AB}{BJ}=\dfrac{AC}{CH}$

Suy ra: $\triangle ABJ \sim \triangle ACH$ (c.g.c)

$\widehat{AHC}=\widehat{BJA} \Rightarrow \widehat{JAB}=\widehat{HAC} \Rightarrow \widehat{EAB}=\widehat{FAC}$.

STT 12. ĐỀ THI CHỌN HSG DAKLAK

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 8: (4 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2}$. Tìm x sao cho $P=\dfrac{2017}{2018}$.
2. Giải phương trình $\left(x^2-4x\right)\left(x^2-4\right)=20$.

Câu 9: (4 điểm)

1. Cho phương trình $x^2+2\left(2m-3\right)x+m^2=0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0, (chúng có thể trùng nhau) và biểu thức $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
2. Cho parabol $\left(P\right): y=ax^2$. Tìm điều kiện của a để trên $\left(P\right)$ có $A\left(x_0;y_0\right)$ với hoành độ dương thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4}=x_0-\sqrt{y_0+3}$.

Câu 10: (4 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thỏa mãn: $x^2-y^2+4x-2y=18$.
2. Tìm tất cả các cặp số $\left(a;b\right)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

   i) a,b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a,b là 1.

   ii) Số $N=ab\left(ab+1\right)\left(2ab+1\right)$ có đúng 16 ước số nguyên dương..

Câu 11: (4 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E ($D\neq B, E\neq C$). BE cắt CD tại H. Kéo dài AH cắt BC tại F.

1) Chứng minh các tứ giác ADHE và BDHF là tứ giác nội tiếp.

2) Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác HMFN là tứ giác nội tiếp. Tính số đo $\widehat{BAC}$.

Câu 12: (2 điểm)

Với x, y là hai số thực thỏa mãn $y^3+3y^2+5y+3=11\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9x^4-x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x-y+2018$.

Câu 13: (2 điểm)

Cho tam giác đều ABC. Một điểm M nằm trong tam giác nhìn đoạn thẳng BC dưới một góc bằng 150^0. Chứng minh $MA^2\geq 2MB.MC$.

LỜI GIẢI

Câu 1: (4 điểm)

3. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2}$. Tìm x sao cho $P=\dfrac{2017}{2018}$.

4. Giải phương trình $\left(x^2-4x\right)\left(x^2-4\right)=20$.

Lời giải

1. Ta có $P=\dfrac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2}=\dfrac{x-3+2\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}}{x+3\sqrt{x}+2}=\dfrac{x-3+2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$.

Mặt khác $P=\dfrac{2017}{2018}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2017}{2018}\Leftrightarrow\sqrt{x}=2016\Leftrightarrow x=2016^2$.

2. Ta có $\left(x^2-4x\right)\left(x^2-4\right)=20\Leftrightarrow x\left(x-4\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)=20$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-8\right)=20\Leftrightarrow\left(x^2-2x-4+4\right)\left(x^2-2x-4-4\right)=20$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x-4\right)^2-16=20.\Leftrightarrow\left(x^2-2x-4\right)^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-4=6\\x^2-2x-4=-6\end{array}\right.$.

Ta thấy phương trình $x^2-2x-4=-6$ vô nghiệm.

Mặt khác, $x^2-2x-4=6\Leftrightarrow x^2-2x-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{11}\\x=1+\sqrt{11}\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1-\sqrt{11}$ và $x=1+\sqrt{11}$.

Câu 2: (4 điểm)

1. Cho phương trình $x^2+2\left(2m-3\right)x+m^2=0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0, (chúng có thể trùng nhau) và biểu thức $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho parabol $(P):y=ax^2$. Tìm điều kiện của a để trên (P) có $A\left(x_0;y_0\right)$ với hoành độ dương thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4}=x_0-\sqrt{y_0+3}$.

Lời giải

1.Phương trình có hai nghiệm khác 0 khi

$$\begin{cases}(2m-3)^2-m^2\ge 0\\ m^2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-3)(m-1)\ge 0\\ m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le 1\\ m\ge 3\end{array}\right.\\ m\ne 0\end{cases}.$$

Mặt khác, theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2(2m-3)\\ x_1x_2=m^2\end{cases}$.

Lại có $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{-2(2m-3)}{m^2}=\dfrac{-12m+18}{3m^2}=\dfrac{-2m^2+2m^2-12m+18}{3m^2}$

$=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2(m-3)^2}{3m^2}\ge-\dfrac{2}{3}$.

Dấu bằng sảy ra khi $m=3$.

2.Ta có $\sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4}=x_0-\sqrt{y_0+3}\Leftrightarrow\sqrt{x_0^2+1}-x_0=\sqrt{y_0+4}-\sqrt{y_0+3}$.

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+1}+x_0}=\dfrac{1}{\sqrt{y_0+4}+\sqrt{y_0+3}}$.

Vậy nên $\begin{cases}\sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4}=x_0-\sqrt{y_0+3}\\ \sqrt{x_0^2+1}+\sqrt{y_0+4}=x_0+\sqrt{y_0+3}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x_0^2+1}=\sqrt{y_0+4}\Rightarrow x_0^2+1=y_0+4$

$\Rightarrow(1-a)x_0^2=3\Rightarrow x_0^2=\dfrac{3}{1-a}>0\Rightarrow 1-a>0\Leftrightarrow a<1$.

3. (4 điểm)

3. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $x^2-y^2+4x-2y=18$.
4. Tìm tất cả các cặp số $(a;b)$nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

   i) a,b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a,blà 1.

   ii) Số $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương..

Lời giải

1.Ta có $x^2-y^2+4x-2y=18\Leftrightarrow(x^2+4x+4)-(y^2+2y+1)=21\Leftrightarrow(x+2)^2-(y+1)^2=21$

$\Leftrightarrow(x-y+1)(x+y+3)=21$.

Do đó sảy ra các trường hợp sau:

+)$\begin{cases}x-y+1=1\\ x+y+3=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\ y=9\end{cases}$.

+)$\begin{cases}x-y+1=3\\ x+y+3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$.

2. Ta có: $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số: $1; a\ ; b(ab+1)(2ab+1); b$; $a(ab+1)(2ab+1); ab+1; ab(2ab+1); 2ab+1$; $ab(ab+1); N\ ; ab; (ab+1)(2ab+1)$; $b(ab+1); a(2ab+1)\ ; a(ab+1);\ b(2ab+1)$ có 16 ước dương Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì $a;\ b;\ ab+1;\ 2ab+1$ là số nguyên tố Do $a,\ b>1 \Rightarrow ab+1>2$

Nếu $a;b$ cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a=2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1=4b+1$ và $ab+1=2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý)$\Rightarrow b=3$.

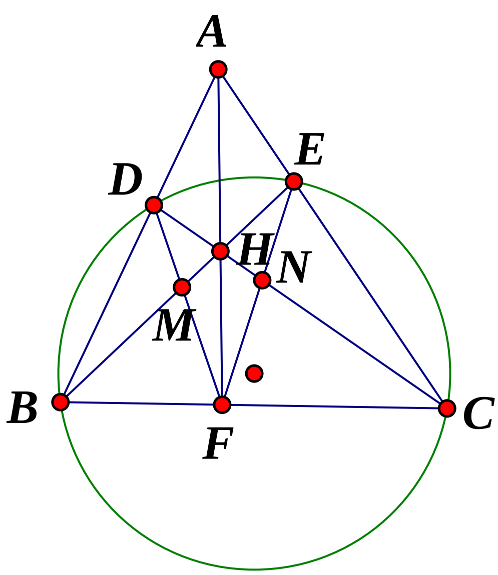
Vậy $a=2;\ b=3$.

Câu 4: (4 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E ($D \neq B, E \neq C$). BE cắt CD tại H. Kéo dài AH cắt BC tại F.

1) Chứng minh các tứ giác ADHE và BDHF là tứ giác nội tiếp.

2) Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác HMFN là tứ giác nội tiếp. Tính số đo $\widehat{BAC}$.



1) Chứng minh tứ giác ADHE và BDHF là tứ giác nội tiếp. (Đơn giản).

2) Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác HMFN là tứ giác nội tiếp . Tính số đo $\widehat{BAC}$ như sau:

$\widehat{BAC} + \widehat{DHE} = \widehat{MFN} + \widehat{BHC} = 180^0$ (tứ giác ADHE; HMFN nội tiếp).

Mà $\widehat{DHE} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh) suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{MFN} = \widehat{F_1} + \widehat{F_2}$. Lại có $\widehat{F_1} = \widehat{B_1}; \widehat{F_2} = \widehat{C_1}; \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (tứ giác BDHF, CEHF, BCED nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{F_2} = \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

Do đó $\widehat{BAC} = 2\widehat{B_1} = 2\left(90^0 - \widehat{BAC}\right) \Rightarrow 3\widehat{BAC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0$

Câu 5: (2 điểm)

Với x, y là hai số thực thỏa mãn $y^3+3y^2+5y+3=11\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9x^4-x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x-y+2018$.

Điều kiện $-3\le x\le 3$.

$y^3+3y^2+5y+3=11\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9x^4-x^6}\Leftrightarrow (y+1)^3+2(y+1)=\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3+2\sqrt{9-x^2}$

$\Leftrightarrow a^3+2a=b^3+2b,\left(a=y+1;b=\sqrt{9-x^2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(a^3-b^3\right)+2(a-b)=0\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+2\right)=0$

Do $a^2+ab+b^2+2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2+2>0$.

Suy ra

$a-b=0\Leftrightarrow y+1-\sqrt{9-x^2}=0\Leftrightarrow y=\sqrt{9-x^2}-1\Leftrightarrow x-y=x-\sqrt{9-x^2}+1=4-\left(3-x+\sqrt{9-x^2}\right)\le 4$

Đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow\begin{cases}3-x=0\\9-x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=-1$. Vậy giá trị lớn nhất của T là 2022 tại x = 3; y=-1.

Ta lại có

$x-y\ge 1-3\sqrt{2}\Leftrightarrow x-\sqrt{9-x^2}+1\ge 1-3\sqrt{2}\Leftrightarrow x+3\sqrt{2}\ge\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow x^2+6\sqrt{2}x+18\ge 9-x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+6\sqrt{2}x+9\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}x+3\right)^2\ge 0$ (Đúng).

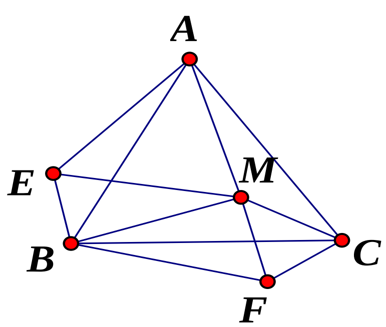
Suy ra $T=x-y+2018\ge 1-3\sqrt{2}+2018=2019-3\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $\sqrt{2}x+3=0\Leftrightarrow x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn). Suy ra $y=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\left(1-3\sqrt{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Vậy GTNN T là $2019-3\sqrt{2}$ tại $x=\frac{-3\sqrt{2}}{2};y=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Câu 6: (2 điểm)

Cho tam giác đều ABC. Một điểm M nằm trong tam giác nhìn đoạn thẳng BC dưới một góc bằng 150^0. Chứng minh $MA^2\ge 2MB.MC$.



Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chưa điểm M,lấy điểm E sao cho ΔAME đều; trên nửa mặt phẳng bờ BC không chưa điểm m,lấy điểm F sao cho ΔCMF đều.

Ta có $\widehat{MAE}+\widehat{BAC}=60^0 \Rightarrow \widehat{MAB}+\widehat{BAE}=\widehat{MAB}+\widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{CAM} \Rightarrow \Delta BAE=\Delta CAM$ (c – g - c). Suy ra $BE=CM;\widehat{ABE}=\widehat{ACM}$.

Tương tự $\widehat{MCF}=\widehat{ACB}=60^0 \Rightarrow \widehat{MCB}+\widehat{BCF}=\widehat{MCB}+\widehat{ACM} \Rightarrow \widehat{BCF}=\widehat{ACM}$. Ta có $BE=CM;CM=CF \Rightarrow BE=CF;\widehat{ABE}=\widehat{ACM};\widehat{ACM}=\widehat{BCF} \Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{BCF}$.

Suy ra $\Delta BAE=\Delta CBF\left(c-g-c\right) \Rightarrow AE=BF$. Mà $AE=AM \Rightarrow BF=AM$.

Mặt khác $\widehat{BMF}=\widehat{BMC}-\widehat{CMF}=150^0-60^0=90^0$. (ΔCMF đều, nên $MF=MC$)

Xét $\Delta BMF:\widehat{BMF}=90^0 \Rightarrow BF^2=MB^2+MF^2 \Rightarrow MA^2=MB^2+MC^2 \ge 2MB.MC$ (ΔCMF đều MF= MC).

STT 13. ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH ĐỒNG NAI

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Summer Duong

Câu 14: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa : ab + bc+ ca =1. Tính giá trị biểu thức

$$P=a\sqrt{\frac{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{\left(1+a^2\right)}}+b\sqrt{\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+c^2\right)}{\left(1+b^2\right)}}+c\sqrt{\frac{\left(1+b^2\right)\left(1+a^2\right)}{\left(1+c^2\right)}}$$

Lời giải

Ta có: ab + bc+ ca =1. Khi đó $1+b^2=ab+bc+ca+b^2=\left(a+b\right).\left(b+c\right)$

Tương tự: $1+c^2=\left(a+c\right)\left(c+b\right);1+a^2=\left(a+b\right)\left(a+c\right)$

Với a, b, c là ba số thực dương, ta có:

$$a\sqrt{\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)}{\left(a+c\right)\left(a+b\right)}}=a\left|b+c\right|=a\left(b+c\right)$$

Tính được các biểu thức tương tự ta được:

$$\begin{aligned}P&=a\left(b+c\right)+b\left(a+c\right)+c\left(a+b\right)\\&=ab+ac+ba+bc+ca+cb=2\left(ab+bc+ca\right)=2\end{aligned}$$

Câu 15: Giải các phương trình sau:

a) $x^4+2x^3=4x+4$

b) $\frac{1}{x^2}+\sqrt{x+2}=\frac{1}{x}+\sqrt{2x+1}$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}&x^4+2x^3=4x+4\\&\Leftrightarrow x^4+2x^3+x^2=x^2+4x+4\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+2x+1\right)=\left(x+2\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\left(x+1\right)=x+2 \\ x\left(x+1\right)=-x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2 \\ x^2+2x+2=0 \end{array}\right.$

Vì $x^2+2x+2=\left(x+1\right)^2+1>0$ nên phương trình có nghiệm là $x=\sqrt{2}; x=-\sqrt{2}$

b) điều kiện: $x\ge -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{x^2}+\sqrt{x+2}=\frac{1}{x}+\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}.(1-x).\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)=\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}.(1-x).\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)=x-1$

$\Leftrightarrow (1-x).\left[\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)+1\right]=0$

$\Leftrightarrow 1-x=0 \ \left(do\ \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)+1>0\right)$

$\Leftrightarrow x=1$

Vậy: x =1 là nghiệm của phương trình.

Câu 16: Cho a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh:

a) $3\left(ab+bc+ac\right)\le 1$

b) $a^2+b^2+c^2\ge 4\left(ab+bc+ac\right)-1$

Lời giải

a) Ta có, a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1

$3\left(ab+bc+ac\right)\le\left(a+b+c\right)^2\le 1$

b) $a^2+b^2+c^2\ge 4\left(ab+bc+ac\right)-1$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+1\ge 4\left(ab+bc+ca\right)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+1-3\left(ab+bc+ca\right)\ge 0$

Theo câu a, $3\left(ab+bc+ac\right)\le 1$ ta sẽ chứng minh $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$

Thật vây,

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\ge 0$

Đẳng thức luôn đúng

Câu 17: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và nội tiếp đường tròn (O), (AAB > AC). Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại K. Đường tròn tâm K bán kính KB cắt tia AB, AC lần lượt tại D và E (D khác B, E khác C) Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: D, K, E thẳng hàng.

b) Chứng minh : $\widehat{BAM} = \widehat{CAK}$

c) Gọi N là giao điểm của AK và BC. Chứng minh: $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

Lời giải

a) Vì hai đường tròn (O) , (K) cắt nhau tại B và C nên OK vuông góc BC tại trung điểm M của BC.

Ta có : $\widehat{OBC} = \widehat{OKB}$ (cùng phụ $\widehat{BOK}$)

Mà $\widehat{OKB} = \frac{1}{2}\widehat{BKC}$ nên $\widehat{OBC} = \frac{1}{2}\widehat{BKC}$

Đường tròn (K) ta có: $\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{CKE}$

Suy ra: $\widehat{OBE} = \widehat{OBC} + \widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{BKC} + \frac{1}{2}\widehat{CKE} = \frac{1}{2}\widehat{BKE} = \widehat{DBK}$

Do đó, $\widehat{DBE} = \widehat{DBK} + \widehat{KBE} = \widehat{OBE} + \widehat{KBE} = \widehat{OBK} = 90^0$

DE là đường kính của đường tròn (K)

Suy ra: D, K, E thẳng hàng.

b)

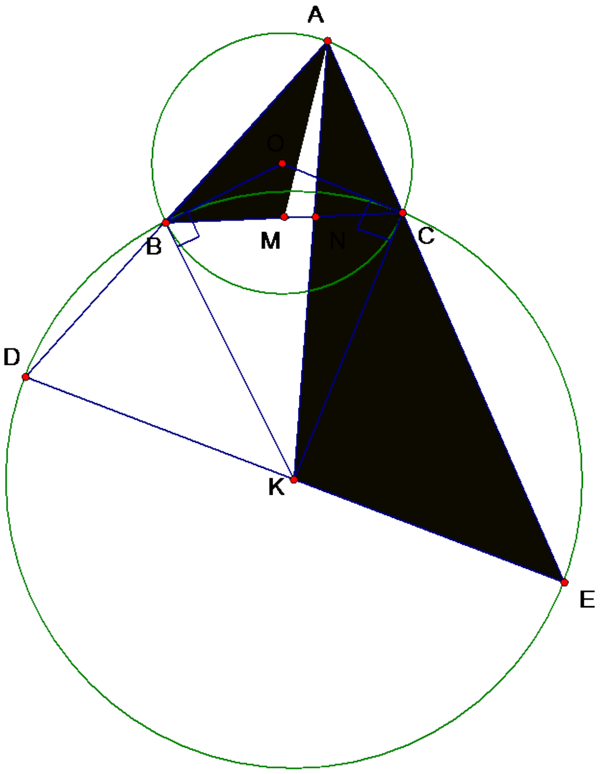
Do $\widehat{ABC} = \widehat{AED}$ (cùng phụ $\widehat{DBC}$)

Suy ra $\Delta ABC \sim \Delta AED$ (g-g)

Mà AM, AK là hai trung tuyến tương ứng của ΔABC , ΔAED

Suy ra $\Delta ABM \sim \Delta AEK$

=>$\widehat{BAM} = \widehat{EAK}$ hay $\widehat{BAM} = \widehat{CAK}$ (đpcm)



c) Gọi I, L, H, J lần lượt là hình chiếu của các điểm C,B, D, E lên đường thẳng AK như hình vẽ.

Vì $\Delta ABL \sim \Delta ADH$ nên suy ra

$$\frac{BL}{DH}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow BL=\frac{AB.DH}{AD}\ (1)$$

Vì $\Delta ACI \sim \Delta AEJ$ nên suy ra

$$\frac{CI}{\mathrm{EJ}}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow CI=\frac{AC.\mathrm{EJ}}{AE}\ (2)$$

Vì $\Delta AED \sim \Delta ABC$ nên suy ra

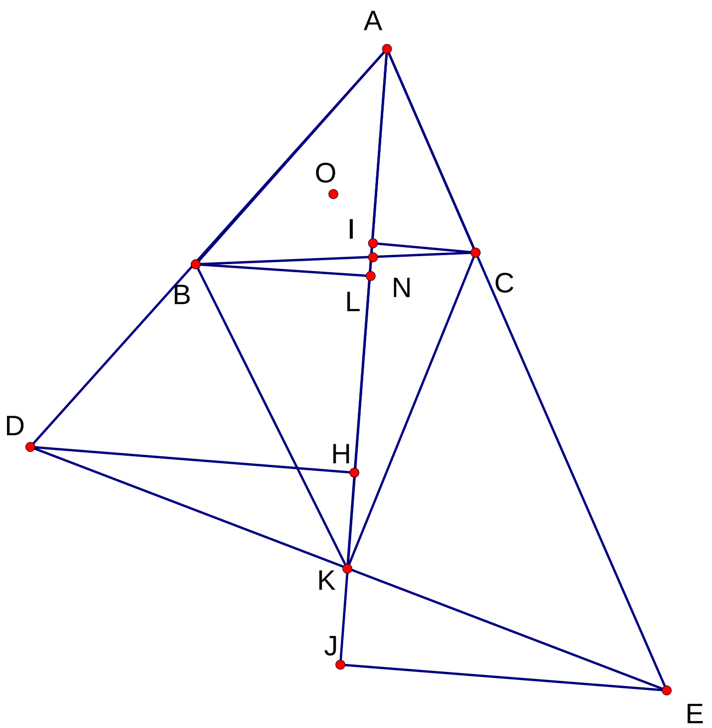
$$\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}\quad (3)$$

Vì $\Delta DHK = \Delta CJK\ (ch-gn)$ nên suy ra DH = EJ (4)

Từ (1), (2), (3),(4) suy ra

$$\frac{BL}{CI}=\frac{AB.DH.AE}{AC.\mathrm{EJ}.DA}=\frac{AB}{AC}.\frac{AE}{AD}$$

$$=\frac{AB}{AC}.\frac{AB}{AC}=\frac{AB^2}{AC^2}$$



Câu 18: Cho tam giác ABC có $\hat{A}=60^0$ và độ dài ba cạnh BC = a, CA = b, AB = c là ba số nguyên khác nhau

a) Chứng minh : $a^2=b^2+c^2-bc$

b) Giả sử b < c . Chứng minh: $b\ge 3$

Lời giải

a) Áp dụng định lí hàm cosin ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^0$

$= b^2 + c^2 - bc$

b) Ta có, ba cạnh của tam giác là ba số nguyên khác nhau, $b < c$ suy ra

$$b < a < c$$

Nếu b=1 thì từ câu a ta có:

$$c^2 - a^2 = b^2 - bc = 1 - c \Rightarrow c < 1 \Rightarrow c < b \text{ (!)}$$

Nếu b=2 thì từ câu a ta có:

$$c^2 - a^2 = b^2 - bc = 4 - 2c \Rightarrow c < 2 \Rightarrow c < b \text{ (!)}$$

Do đó $b \geq 3$ (đpcm) .

STT 15: ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH HÀ GIANG

NĂM HỌC 2017 – 2018

Người giải: Trần Thế Độ - THPT Bắc Đông Quan – Thái Bình.

Người phản biện:

Câu 1.

a. Cho $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$. Tính $A = \left(x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1\right)^{2017}$.

b. Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng: $A = \dfrac{1}{(a-b)^2} + \dfrac{1}{(b-c)^2} + \dfrac{1}{(c-a)^2}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Câu 2.

a. Giải phương trình: $\dfrac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \dfrac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$.

b. Cho $P(x) = x^2 + ax + b$ với $a, b \in N$. Biết $P(1) = 2017$. Tính $P(3) + P(-1)$.

Câu 3. Tìm các số nguyên dương n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Câu 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq 2(a + b + c).$$

Câu 5. Cho ΔABC vuông cân tại A . Gọi D là trung điểm BC . Lấy M bất kỳ trên cạnh AD , $(M \neq A, D)$. Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M xuống các cạnh AB, AC và H là hình chiếu của N xuống đường thẳng PD .

a. Chứng mính $AH \perp BH$.

b. Đường thẳng qua B , song song với AD cắt đường trung trực của AB tại I .

Chứng minh ba điểm H, N, I thẳng hàng.

............HẾT............

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a. Ta có: $x\sqrt{2}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\left(\sqrt{7}+1\right)-\left(\sqrt{7}-1\right)=2\Rightarrow x=\sqrt{2}$.

Vậy $A=1$.

b. Ta có:

$$\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{2}{(a-b)(b-c)}+\frac{2}{(b-c)(c-a)}+\frac{2}{(c-a)(a-b)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}.$$

Câu 2.

a. ĐKXĐ: $x\neq 1;\ \ x\neq\frac{3}{2}$.

Xét $x=0$ không là nghiệm.

Xét $x\neq 0$, phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}+\dfrac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}=6$.

Đặt $2x-5+\frac{3}{x}=t$ ta được $\frac{2}{t}+\frac{13}{t+6}=6\Leftrightarrow 2t^2+7t-4=0\Leftrightarrow(2t-1)(t+4)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2}\\ t=-4\end{array}\right.$$

Với $t=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x-5+\frac{3}{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{4}\\ x=2\end{array}\right.$.

Với $t=-4\Rightarrow 2x-5+\frac{3}{x}=-4\Rightarrow 2x^2-x+3=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{3}{4};2\right\}$.

b. Vì $P(1)=2017 \Rightarrow 2017=1+a+b \Rightarrow a+b=2016$.

Do đó $P(3)+P(-1)=(9+3a+b)+(1-a+b)=10+2(a+b)=4042$.

Câu 3.

Đặt $A=n^4+n^3+1$.

Với $n=1$ thì $A=3$ không thỏa mãn.

Với $n\geq 2$ ta có $4A=4n^4+4n^3+4$.

Xét $4A-(2n^2+n-1)^2=3n^2+2n+3>0 \Rightarrow 4A>(2n^2+n-1)^2$.

Xét $4A-(2n^2+n)^2=4-n^2\leq 0 \Rightarrow 4A\leq(2n^2+n)^2$.

Vậy $4A=(2n^2+n)^2 \Rightarrow n=2$.

Với $n=2$ thì $A=25$ thỏa mãn bài toán.

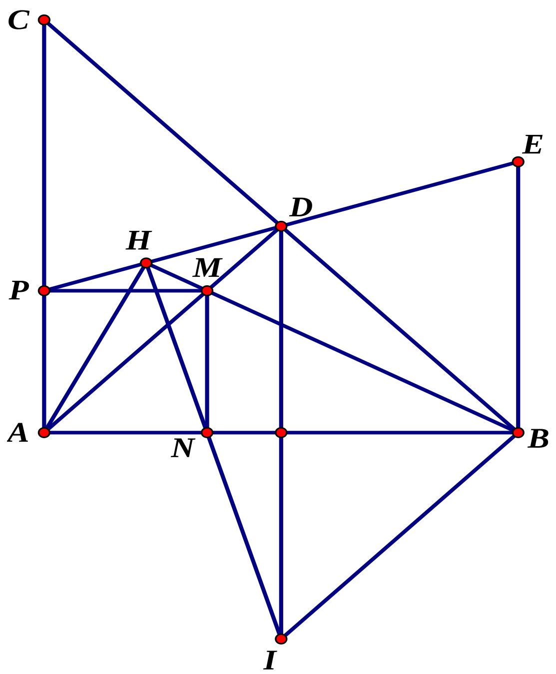
Câu 4.

Áp dụng bất đăngt thức Cauchy ta có $\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geq 2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)$

$=\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)\geq 2(a+b+c)$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 5.



a. Đường thẳng qua B song song với AC cắt tia PD tại E.

Ta có $BE = PC = BN$ suy ra ΔBEN vuông cân tại B.

Do $\widehat{NBE} = \widehat{NHE} = 90^0$ nên B, H cùng thuộc đường tròn đường khính NE.

Suy ra $\widehat{NHB} = \widehat{NEB} = 45^0$ (1)

Tương tự hai điểm A, H cùng thuộc đường tròn đường kính PN suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{APN} = 45^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHB} = 90^0$ hay $AH \perp BH$.

b. Từ giả thiết suy ra $\widehat{AIB} = 90^0$ nên I là điểm chính giữa của cung $\widehat{AIB}$ của đường tròn đường kính AB.

Mặt khác, theo kết quả câu a thì tia HN là tia phân giác của $\widehat{AHB}$ và $\widehat{AHB}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{AIB}$ của đường tròn đường kính AB nên HN phải đi qua I. Do đó ba điểm H, N, I thẳng hàng.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS MÔN TOÁN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Hoàng Diệu

Người phản biện:

Câu 19: (3 điểm)

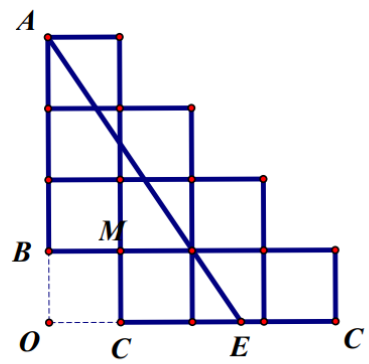
Cho hai số a , b thỏa điều kiện: $a^2 + b^2 = 1, a^4 + b^4 = \frac{1}{2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2018} + b^{2018}$.

Câu 20: (3 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{5-x} + 2\sqrt{3+x} = 6$.

Câu 21: (2 điểm)



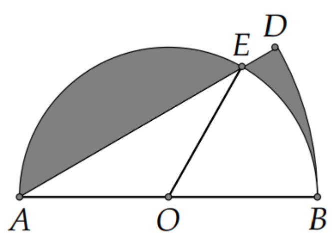
Hình bên gồm 9 hình vuông giống hệt nhau, mỗi hình vuông có diện tích 4 cm^2. Các điểm A, B, C, D là đỉnh của các hình vuông. Điểm E nằm trên đoạn CD sao cho AE chia 9 hình vuông thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn CE .

Câu 22: (4 điểm)

1) Cho hai số thực x , y . Chứng minh rằng $(1+x^2)(1+y^2) \geq 2x(1-y^2)$.

2) Các số $A; B; C; D; A+C; B+C; A+D; B+D$ là tám số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 8. Biết A là số lớn nhất trong các số A, B, C, D . Tìm A .

Câu 23: (5 điểm)



1) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 4cm$. Góc $\widehat{DAB} = 30^\circ$ và cung $\overset{\frown}{DB}$ là một phần của đường tròn tâm A. Tính diện tích phần tô đậm.

2) Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I. Đường thẳng qua I vuông góc AD cắt cạnh BC tại N. Đường thẳng qua I vuông góc BC cắt cạnh AD tại M. Chứng minh rằng nếu $AB + CD = 2MN$ thì $ABCD$ là hình thang.

Câu 24: (3 điểm)

Một ô tô dự định đi từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc không đổi là $v\ km/h$. nếu vận tốc ô tô đó tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Tuy nhiên sau khi đi được 120 km với vận tốc v, ô tô tăng thêm 25% và đến B sớm hơn dự định 48 phút. Tính quãng đường giữa hai thành phố.

STT 01. LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS MÔN TOÁN

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Hoàng Diệu

Bài 1: (3 điểm)

Cho hai số a, b thỏa điều kiện: $a^2 + b^2 = 1, a^4 + b^4 = \dfrac{1}{2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2018} + b^{2018}$.

Lời giải

Ta có $a^4 + b^4 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(a^2 + b^2\right)^2 - 2a^2b^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a^2b^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow a^2\left(1 - a^2\right) = \dfrac{1}{4}$

$4a^4 - 4a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(2a^2 - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b^2 = \dfrac{1}{2}$

Do đó $P = \left(a^2\right)^{1009} + \left(b^2\right)^{1009} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1009} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1009} = \dfrac{1}{2^{1008}}$.

Bài 2: (3 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{5 - x} + 2\sqrt{3 + x} = 6$.

Lời giải

ĐKXĐ: $-3 \le x \le 5$. Bình phương 2 vế của phương trình ta được:

$5 - x + 4\sqrt{(5 - x)(x + 3)} + 4(3 + x) = 36 \Leftrightarrow 4\sqrt{(5 - x)(x + 3)} = 19 - 3x$

Với ĐK: $-3 \le x \le \dfrac{19}{3}$. Ta có phương trình

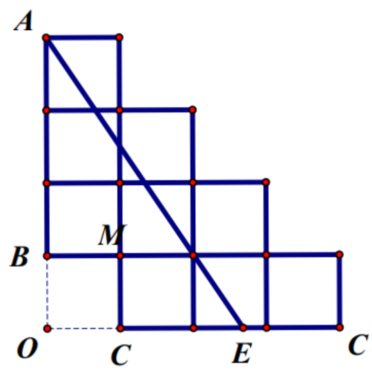
$16(5 - x)(x + 3) = (19 - 3x)^2$

$\Leftrightarrow 25x^2 - 146x + 121 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(25x-121)=0$

$\Leftrightarrow x=1 \; hay \; x=\dfrac{121}{25}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{1;\dfrac{121}{25}\right\}$.



Bài 3: (2 điểm)

Hình bên gồm 9 hình vuông giống hệt nhau, mỗi hình vuông có diện tích 4 cm^2. Các điểm A, B, C, D là đỉnh của các hình vuông. Điểm E nằm trên đoạn CD sao cho AE chia 9 hình vuông thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn CE .

Lời giải

Mỗi hình vuông có diện tích $4\,cm^2$ nên mỗi hình vuông nhỏ có cạnh là 2 cm .

$S_{AOE}=S_{OBMC}+\dfrac{1}{2}S_{9hinhvuong}=4+\dfrac{1}{2}.9.4=cm^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}OA.OE=22 \Rightarrow OE=\dfrac{22.2}{4}=\dfrac{11}{2}(cm)$ (vì $OA=4.2=8cm$).

Vậy $CE=OE-OC=\dfrac{11}{2}-2=\dfrac{7}{2}(cm)$).

Bài 4: (4 điểm)

1) Cho hai số thực x , y . Chứng minh rằng $(1+x^2)(1+y^2)\ge 2x(1-y^2)$.

Lời giải

Ta có $(1+x^2)(1+y^2)\ge 2x(1-y^2)$

$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2+y^2+1\ge 2x-2xy^2$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(x^2y^2+2xy^2+y^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(xy+y)^2\ge 0$ (bất đẳng thức đúng).

Vậy $(1+x^2)(1+y^2)\ge 2x(1-y^2)$

2) Các số $A; B; C; D; A+C; B+C; A+D; B+D$ là tám số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 8. Biết A là số lớn nhất trong các số A, B, C, D . Tìm A .

Lời giải

Ta có tổng của 8 số: $3(A+B+C+D)=36 \Leftrightarrow A+B+C+D=12$ (1)

Mà $B+C+D\ge 1+2+3=6 \Rightarrow A\le 6$.

Hơn nữa $4A>A+B+C+D=12 \Leftrightarrow A>3$.

Nếu $A=4 \Rightarrow B,C,D\in\{1;2;3\} \Rightarrow B+C+D=6$. Điều này mâu thuẫn (1)

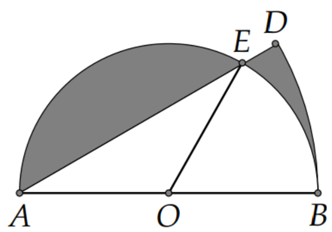
Nếu $A=5 \Rightarrow B,C,D \in \{1;2;3;4\}$. $(1) \Rightarrow B+C+D=7$. Do đó $B,C,D \in \{1;2;4\}$.
Do $A+D$ và $A+C$ bé hơn bằng 8 nên $C,D \neq 4$ $\Rightarrow B=4$. Nếu $C=1, D=2$ thì $A+C=B+D=6$ là vô lý. Nếu $C=2, D=1$ thì $A+D=B+C=6$ là vô lý.

Do đó A chỉ có thể là 6, suy ra $B,C,D \in \{1;2;3;4;5\}$. Từ (1) ta có $B+C+D=6$. Do đó $B,C,D \in \{1;2;3\}$. Hơn nữa $A+D, A+C \leq 8$ nên $C,D \neq 3$, suy ra $B=3$. Với $C=1, D=2$ hay $C=2, D=1$ đều thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy $A=6$.

Bài 5: (5 điểm)

1) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=4cm$. Góc $\widehat{DAB}=30°$ và cung $\overset{\frown}{DB}$ là một phần của đường tròn tâm A. Tính diện tích phần tô đậm.

Lời giải



$S_{phần\ trắng} = S_{\Delta OAE} + S_{quạt\ OBE} = \sqrt{3} + \dfrac{2\pi}{3}$

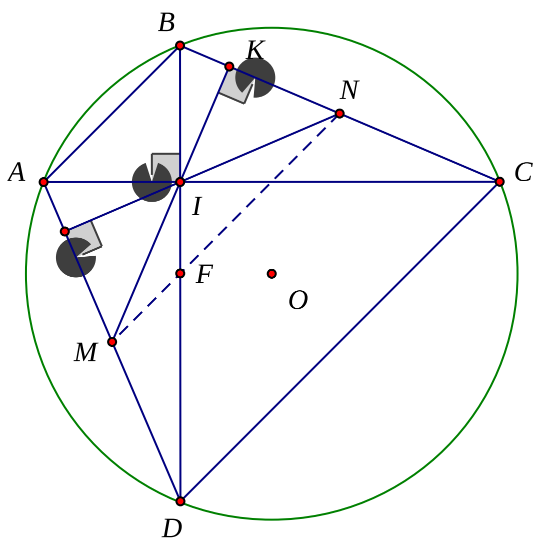
$S_{phần\ tô\ đậm} = S_{nửa\ hình\ tròn} + S_{quạt\ ABD} - 2S_{phần\ trắng}$

$= 2\pi + \dfrac{4\pi}{3} - 2\left(\sqrt{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

$= 2\pi - 2\sqrt{3}$

2) Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I. Đường thẳng qua I vuông góc AD cắt cạnh BC tại N. Đường thẳng qua I vuông góc BC cắt cạnh AD tại M. Chứng minh rằng nếu $AB+CD=2MN$ thì $ABCD$ là hình thang.

Lời giải



Gọi K là giao điểm của MI và BC

Gọi F là trung điểm của BD

Ta có: $\widehat{BIK} = \widehat{KIC}$ (cùng phụ với $\widehat{IBK}$) và $\widehat{MDI} = \widehat{KIC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)).

$\Rightarrow \widehat{BIK} = \widehat{MDI}$ mà $\widehat{BIK} = \widehat{MID}$ (2 góc đối đỉnh) nên $\widehat{MDI} = \widehat{MID} \Rightarrow \Delta MID$ cân tại M

$\Rightarrow MI = MD.$

$\widehat{MAI} = \widehat{MIA} \Rightarrow \Delta MAI$ cân tại $M \Rightarrow MI = MA.$

mà $MI = MD \Rightarrow MI = MA \Rightarrow M$ là trung điểm của AD.

Ta có $MF = \frac{1}{2}AB; NF = \frac{1}{2}DC$

mà $AB + CD = 2MN$ nên $2.MF + 2.NF = 2MN \Rightarrow MF + NF = MN \Rightarrow M, F, N$ thẳng hàng.

Từ đó suy ra $AB // CD$ nên $ABCD$ là hình thang.

Bài 6: (3 điểm)

Một ô tô dự định đi từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc không đổi là $v\ km/h$. nếu vận tốc ô tô đó tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Tuy nhiên sau khi đi được 120 km với vận tốc v, ô tô tăng thêm 25% và đến B sớm hơn dự định 48 phút. Tính quãng đường giữa hai thành phố.

Lời giải

Đổi đơn vị : 48 phút $= \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$ (giờ)

Gọi $s(km)$ là quãng đường giữa hai thành phố A và B $(s > 0)$

Nếu vận tốc ô tô đó tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ nên ta có phương trình: $\frac{s}{v} - \frac{s}{v + 20\%} = 1 \Leftrightarrow v = \frac{s}{6} (1)$

Sau khi đi được 120 km với vận tốc v, ô tô tăng thêm 25% và đến B sớm hơn dự định 48 phút nên ta có phương trình: $\frac{120}{s} - \frac{s - 120}{v + 25\%v} = \frac{s}{v} - \frac{4}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} v = \frac{s}{6} \\ \frac{120}{s} - \frac{s-120}{v+25\%v} = \frac{s}{v} - \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 60 \\ s = 360 \end{cases}$

Vậy quãng đường giữa hai thành phố A và B .là 360 km.

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS MÔN TOÁN

THÀNH PHỐ HÀ NỘI

NĂM HỌC 2017-2018

Bài 1. (5.0 điểm)

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2018$ và $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = \frac{2017}{2018}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}=\frac{7}{13}$$

Bài 2. (5.0 điểm)

a) Giải phương trình

$$6x^2+2x+1=3x\sqrt{6x+3}.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+x+2=y^3-3y^2+4y \\ 2\sqrt{x+2}=y+2 \end{cases}$$

Bài 3. (3.0 điểm)

a) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương m, n, p với p nguyên tố thỏa mãn

$$m^{2019}+n^{2019}=p^{2018}$$

b) Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y^3+16}+\frac{y}{z^3+16}+\frac{z}{x^3+16}$$

Bài 4. (6.0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với $AB < AC < BC$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu của A lên BC, M là trung điểm của AC và P là điểm thay đổi trên đoạn MH (P khác M và P khác H).

a) Chứng minh rằng $\widehat{BAO} < \widehat{HAC}$

b) Khi $\widehat{APB} < 90^0$, chứng minh ba điểm B, O, P thẳng hàng.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP và đường tròn ngoại tiếp tam giác BHP cắt nhau tại Q (Q khác P). Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

Bài 5. (1.0 điểm) Cho đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn (O). Chia $2n$ đỉnh này thành n cặp điểm, mỗi cặp điểm này thành một đoạn thẳng (hai đoạn thẳng bất kì trong số n đoạn thẳng được tạo ra không có đầu mút chung).

a) Khi $n=4$, hãy chỉ ra một cách chia sao cho trong bốn đoạn thẳng được tạo ra không có hai đoạn nào có độ dài bằng nhau.

b) Khi $n=10$, chứng minh rằng trong mười đoạn thẳng được tạo ra luôn tồn tại hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

Hướng dẫn

Bài 1.

a) Từ giả thiết, ta có

$$P=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3=2018.\frac{2017}{2018}-3=2014.$$

b) Điều kiện: $x^2+xy+y^2\neq 0$. Từ phương trình suy ra $x-y\neq 0$. Bây giờ ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$13(x-y)=7(x^2+xy+y^2) \qquad (1)$$

Từ đây, ta có $13(x-y)$ chia hết cho 7. Mà $(14,7=1)$ nên $x-y$ chia hết cho 7. (2)

Mặt khác, ta lại có $x^2+xy+y^2=\frac{1}{4}(x-y)^2+\frac{3}{4}(x+y)^2\geq\frac{1}{4}(x-y)^2$

Do đó, kết hợp với (1), ta suy ra

$$13(x-y)\geq\frac{7}{4}(x-y)^2$$

Từ đó, với chú ý $x-y\neq 0$, ta có đánh giá $0<x-y<\frac{52}{7}$. Kết hợp với (2), ta được $x-y=7$ và $x^2+xy+y^2=13$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-y=7\\x^2+xy+y^2=13\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases}\\\begin{cases}x=4\\y=-3\end{cases}\end{array}\right.$

Bài 2.

a) Điều kiện: $x\geq-\frac{1}{2}$. Do $6x^2+2x+1=5x^2+(x+1)^2>0$ nên từ phương trình ta suy ra $x>0$. Bây giờ, đặt $a=\sqrt{6x+3}$, ta có $6x^2+2x+1=6x^2+\frac{1}{3}a^2$ nên phương trình có thể được viết lại thành

$$6x^2+\frac{1}{3}a^2=3xa,$$

hay $(a-6x)(a-3x)=0$.

Từ đây, ta có $a=3x$ hoặc $a=6x$.

- Với $a=3x$, ta có $9x^2=6x+3$. Từ đây, với chú ý $x>0$, ta giải được $x=0$.
- Với $a=6x$, ta có $36x^2=6x+3$. Từ đây, với chú ý $x>0$, ta giải được $x=\frac{1+\sqrt{13}}{12}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$ và $x=\frac{1+\sqrt{13}}{12}$

b) Điều kiện: $x\geq-2$. Từ phương trình thứ hai, ta suy ra $y\geq-2$. Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành

$2\sqrt{y+1}=y+2$

hay

$$\left(\sqrt{y+1}-1\right)^2=0.$$

Giải phương trình này, ta được $y=0$. Một cách tương ứng, ta có $x=-1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x,y) duy nhất là $(-1;0)$.

Bài 3.

a) Giả sử tồn tại bộ số (m,n,p) thỏa mãn yêu cầu đề bài. Dễ thấy $0<m$, $n<p$.

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$(m+n)A=p^{2018},\ (1)$$

trong đó $A=m^{2018}-m^{2017}n+m^{2017}n^2-\ldots-mn^{2017}+n^{2018}$

Nếu A không chia hết cho p thì từ (1), ta có $A=1$ và

$$m+n=p^{2018}=m^{2019}+n^{2019}.$$

Từ đó dễ thấy $m=n=1$ và $p^{2018}=2$, mâu thuẫn. Vậy A chia hết cho p.

Do $m+n>1$ nên từ (1) suy ra $m+n$ chia hết cho p. Khi đó, ta có

$$A\equiv 2019m^{2018}\pmod{p}.$$

Do A chia hết cho p và $0<m<p$ nên từ kết quả trên, ta suy ra 2019 chia hết cho p, hay $p=2019$. Từ đây, dễ thấy m và n khác tính chẵn lẻ, hay $m\neq n$.

Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng\ $\left(m^3\right)^{673}+\left(n^3\right)^{673}=2019^{2018}$,

hay $(m+n)\left(m^2-mn+n^2\right)=2019^{2018}$,

trong đó, $B=\left(m^3\right)^{672}-\left(m^3\right)^{671}\left(n^3\right)+\ldots-\left(m^3\right)\left(n^3\right)^{671}+\left(n^3\right)^{672}$. Do $m\neq n$ nên

$m^2-mn+n^2=(m-n)^2+mn>1$, từ đó ta có m^2-mn+n^2 chia hết cho 2019. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do

$$m^2-mn+n^2\equiv 3n^2\pmod{2019}$$

$$m^2-mn+n^2\not\equiv 0\pmod{2019}.$$

Vậy không tồn tại các số m,n,p thỏa mãn yêu cầu đề bài.

b) Ta sẽ chứng minh $P\geq\frac{1}{6}$ với dấu bằng đạt được tại $(x,y,z)=(0,1,2)$ (và các hoán vị vòng quanh của bộ này). Bất đẳng thức $P\geq\frac{1}{16}$ tương đương với

$$\frac{16x}{y^3+16}+\frac{16y}{z^3+16}+\frac{16z}{x^3+16}\geq\frac{8}{3}$$

hay

$$\left(x-\frac{16x}{y^3+16}\right)+\left(y-\frac{16y}{z^3+16}\right)+\left(z-\frac{16z}{x^3+16}\right)\leq x+y+z-\frac{8}{3}$$

Một cách tương đương, ta phải chứng minh

$$\frac{xy^3}{y^3+16}+\frac{yz^3}{z^3+16}+\frac{zx^3}{x^3+16}\leq\frac{1}{3}\qquad(1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử y nằm giữa x và z. Ta có:

$$y^3+16=(y+4)(y-2)^2+12y\ge 12y$$

nên $\dfrac{y}{y^3+16}\le\dfrac{xy^2}{12}$.

Đánh giá tương tự, ta cũng có

$$\frac{yz^3}{z^3+16}\le\frac{yz^2}{12};\ \frac{zx^3}{x^3+16}\le\frac{zx^2}{12}$$

Suy ra

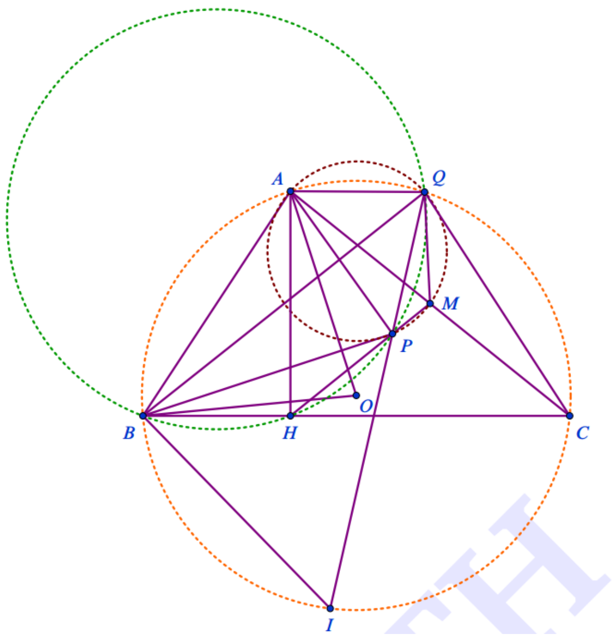
$$\frac{xy^3}{y^3+16}+\frac{yz^3}{z^3+16}+\frac{zx^3}{x^3+16}\le\frac{xy^2+yz^2+zx^2}{12}\qquad(2)$$

Do y nằm giữa x và z nên ta có $(y-z)(y-z)\le 0$, suy ra $y^2+zx\le xy+yz$ và $xy^2+zx^2\le xy^2+xyz$. Từ đó, ta có đánh giá

$$xy^2+yz^2+zx^2\le y\left(x^2+xz+z^2\right)\le y(x+z)^2=y(3-y)^2=4-(4-y)(y-1)^2\le 4\quad(3)$$

Từ (2) và (3), ta thu được (1). Vậy $\min P=\dfrac{1}{6}$.

<u>Bài 4.</u>



a) Ta có $\widehat{ACB}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}=\widehat{AOB}$ (tính chất góc nội tiếp chắn cung). Mà $OA=OB$ nên $\widehat{BAO}=\widehat{ABO}$, suy ra $\widehat{AOB}+2\widehat{BAO}=90^0$.

Từ đây, ta có $2\widehat{ACB}+2\widehat{BAO}=90^0$, hay

$$\widehat{BAO}=90^0-\widehat{ACB}=\widehat{HAC}\ \ (\text{vì } \widehat{AHC}=90^0).$$

Vậy $\widehat{BAO}=\widehat{CAH}$.

b) Xét tứ giác $APHB$, TA CÓ $\widehat{APB}=\widehat{AHB}=90^0\,(gt)$. Mà hai góc này cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác $APHB$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{ABP}=\widehat{AHP}$ (cùng chắn cung AP) (1)

Xét tam giác AHC vuông tại H có M là trung điểm của AC nên $MH = MC = MA$ (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền). Từ đó suy ra

$\widehat{AHP} = \widehat{AHM} = \widehat{MAH} = \widehat{CAH} = \widehat{BAO} = \widehat{ABO}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\widehat{ABP} = \widehat{ABO}$ nên các tia BO và BP trùng nhau. Từ đó suy ra ba điểm B, O, P thẳng hàng.

c) Ta có tứ giác $BQPH$ nội tiếp và hai góc BQP, BHP ở vị trí đối nhau nên

$$\widehat{BQP} = 180^0 - \widehat{BHP} = \widehat{PHC} = \widehat{MHC}.$$

Mặt khác, ta lại có $MH = MC$ (chứng minh trên) nên

$$\widehat{MHC} = \widehat{MCH} = \widehat{ACB}.$$

Từ đây, ta suy ra

$$\widehat{BQP} = \widehat{ACB}$$

Lại có tứ giác $AQMP$ nội tiếp nên $\widehat{AQP} = \widehat{AMP} = \widehat{AMH}$ (cùng chắn cung AP).

Mà $\widehat{AMH} = \widehat{MHC} + \widehat{MCH} = 2\widehat{MCH} = 2\widehat{ACB}$ (tính chất góc ngoài) nên

$$\widehat{AQP} = 2\widehat{ACB}$$

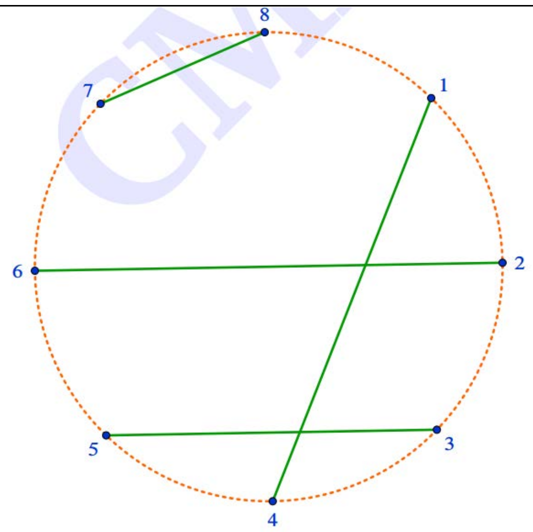
Từ đó $\widehat{AQB} = \widehat{AQP} - \widehat{BQP} = \widehat{ACB}$.

Hai góc AQB và ACB cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác $AQCB$ nội tiếp. Bây giờ, gọi I là giao điểm khác P của PQ và (O). Ta có $\widehat{BQI} = \widehat{BQP} = \widehat{ACB} = \widehat{AQB}$

nên sđ$\overset{\frown}{BA}$=sđ$\overset{\frown}{BI}$, hay $BA = BI$. Suy ra I là giao điểm khác A của các đường tròn (B, BA) và (O), tức I cố định. Vậy đường thẳng PQ luôn đi qua điểm I cố định.

<u>Bài 5.</u> Ta đánh số $2n$ đỉnh của đa giác từ 1 đến $2n$. Khi đó, độ dài của đoạn thẳng nối hai đỉnh có thể coi tương ứng với số lượng cung nhỏ nằm giữa hai đỉnh đó, cũng chính là chênh lệch giữa hai số thứ tự theo mod n rồi cộng thêm 1. Sự tồn tại hai cặp đoạn thẳng có độ dài bằng nhau trong đề bài tương ứng với việc tồn tại hai cặp đỉnh có sự chênh lệch giữa các số thứ tự bằng nhau theo mod n.

a) Ta cần chỉ ra cách chia cặp 8 số từ 1 đến 8 sao cho không có hai cặp nào có chênh lệch giống nhau theo mod 4. Cụ thể là, $(1,4)$, $(2,6)$, $(3,5)$ và $(7,8)$ với các chênh lệch là 3, 4, 2, 1, thỏa mãn đề bài.



b) Gỉa sử tồn tại cách ghép cặp (a_1,b_1), (a_2,b_2), ..., (a_{10},b_{10}) cho các số từ 1 đến 20 sao cho không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 10. Suy ra

$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+...+|a_{10}-b_{10}|\equiv 0+1+...+9 \pmod{10}$

$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+...+|a_{10}-b_{10}|\equiv 5 \pmod{10}$

Do đó tổng $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+...+|a_{10}-b_{10}|$ là số lẻ. Chú ý rằng với mọi x, y nguyên thì $|x-y|$ có cùng tính chẵn lẻ với $x+y$. Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra tổng $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)+...+(a_{10},b_{10})$, cũng lẻ. Mặt khác, ta lại có $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)+...+(a_{10},b_{10})=1+2+...+20=210$ là số chẵn. Mâu thuẫn nhận được cho ta kết quả cần chứng minh.

STT 18. ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HÀ TỈNH

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Nguyễn Mạnh Hùng

Người phản biện: Bùi Minh Sang

I – PHẦN GHI KẾT QUẢ (Thí sinh chỉ ghi kết quả vào tờ giấy thi)

Câu 1: Tìm số cạnh của đa giác lồi có 27 đường chéo.

Câu 2: Cho $a_1=2017$ và $a_{n+1}=a_n+2017$ với mọi $n\ge 1$, $n\in\mathbb{N}$. Tìm a_{2018}.

Câu 3: Cho $4a^2+b^2=5ab$ với $b>2a>0$. Tính giá trị của $p=\dfrac{5ab}{3a^2+2b^2}$.

Câu 4: Hai vật chuyển động trên một đường tròn có chu vi bằng $200\,m$, vận tốc vật thứ nhất là $4\,m/s$, vận tốc vật thứ hai là $6\,m/s$. Hai vật xuất phát cùng một thời điểm tại một vị trí và chuyển động cùng chiều. Hỏi sau 16 phút vật thứ hai vượt lên trước vật thứ nhất mấy lần? (không kể lúc xuất phát)

Câu 5: Có bao nhiêu tam giác khác nhau mà độ dài các cạnh là các số tự nhiên (cùng đơn vị đo) thuộc tập hợp $\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Câu 6: Giải phương trình $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+3}=2$.

Câu 7: Cho các số a,b thỏa mãn $a^3+8b^3=1-6ab$. Tính $a+2b$.

Câu 8: Tìm các số nguyên dương a, b, c, $(b>c)$ thỏa mãn $\begin{cases} b^2+c^2=a^2 \\ 2(a+b+c)=bc \end{cases}$.

Câu 9: Biết khoảng cách từ trọng tâm tam giác ABC đến các cạnh tỉ lệ với các số 2; 3; 4 và chu vi của tam giác ABC là 26. Tìm độ dài các cạnh tam giác ABC.

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=30^\circ$; $\widehat{B}=50^\circ$, cạnh $AB=2\sqrt{3}$. Tính $AC(AC+BC)$.

II – PHẦN TỰ LUẬN (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^2-x^2=1 \\ 2(x^3-y)=y^3-x \end{cases}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E,F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC. Gọi I là giao điểm của BO và EF. M là điểm di động trên đoạn CE. Gọi H là giao điểm của BM và EF.

a) Chứng minh nếu $AM=AB$ thì các tứ giác $BDHF$, $ABHI$ nội tiếp.

b) Gọi N là giao điểm của BM và cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$ của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của

N trên các đường thẳng DE, DF. Chứng minh $PQ\le EF$.

Câu 13: Cho x, y là các số nguyên không đồng thời bằng 0. Tìm GTNN của $F=\left|5x^2+11xy-5y^2\right|$.

STT 18. LỜI GIẢI ĐỀ THI HSG TỈNH HÀ TỈNH

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Nguyễn Mạnh Hùng

I – PHẦN GHI KẾT QUẢ (Thí sinh chỉ ghi kết quả vào tờ giấy thi)

Câu 1: Tìm số cạnh của đa giác lồi có 27 đường chéo.

Lời giải

Gọi số cạnh của đa giác lồi là n, $\left(n\in\mathbb{N}, n>3\right)$. Ta có $\dfrac{n\left(n-3\right)}{2}=27\Rightarrow n=9$.

Câu 2: Cho $a_1=2017$ và $a_{n+1}=a_n+2017$ với mọi $n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$. Tìm a_{2018}.

Lời giải

Ta có $a_2=a_1+2017=2.2017$, $a_3=a_2+2017=3.2017$, …

Do đó $a_{2018}=2018.2017=4070306$.

Câu 3: Cho $4a^2+b^2=5ab$ với $b>2a>0$. Tính giá trị của $p=\dfrac{5ab}{3a^2+2b^2}$.

Lời giải

Ta có $4a^2+b^2=5ab\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(4a-b\right)=0$. Do $b>2a>0$ nên $b=4a$. Suy ra $P=\dfrac{20a^2}{3a^2+32a^2}=\dfrac{4}{7}$.

Câu 4: Hai vật chuyển động trên một đường tròn có chu vi bằng $200\,m$, vận tốc vật thứ nhất là $4\,m/s$, vận tốc vật thứ hai là $6\,m/s$. Hai vật xuất phát cùng một thời điểm tại một vị trí và chuyển động cùng chiều. Hỏi sau 16 phút vật thứ hai vượt lên trước vật thứ nhất mấy lần? (không kể lúc xuất phát)

Lời giải

Gọi t là thời gian để hai vật gặp nhau tính từ lúc xuất phát. Quảng đường mỗi vật đi được đến lúc gặp nhau là $S_1=v_1t=4t$, $S_2=v_2t=6t$. Vì hai vật đi cùng chiều nên $S_2-S_1=S\Rightarrow 6t-4t=200\Rightarrow t=100$ (giây).

Do đó cứ sau 100 giây chúng gặp nhau một lần. Vậy sau 16 phút $=960$ giây thì chúng gặp nhau số lần là $\left[\dfrac{960}{100}\right]=9$. Vậy vật thứ hai vượt lên trước 9 lần.

Câu 5: Có bao nhiêu tam giác khác nhau mà độ dài các cạnh là các số tự nhiên (cùng đơn vị đo) thuộc tập hợp $\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Lời giải

Số tam giác khác nhau là $\left[\dfrac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}\right]=\left[\dfrac{8.10.15}{24}\right]=50$ tam giác.

Câu 6: Giải phương trình $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+3}=2$.

Lời giải

ĐKXĐ $x\geq -3$. Đặt $\sqrt[3]{1-x}=a$; $\sqrt{x+3}=b\geq 0$.

Ta có $\begin{cases}a+b=2\\a^3+b^2=4\end{cases}\Rightarrow a\left(a^2+a-4\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$

Từ đó tìm được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{1;\dfrac{15\pm5\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Câu 7: Cho các số a,b thỏa mãn $a^3+8b^3=1-6ab$. Tính $a+2b$.

Lời giải

Ta có $x^3+y^3+z^3=3xyz\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+z=0\\x=y=z\end{array}\right.$

Do đó $a^3+8b^3=1-6ab\Leftrightarrow a^3+(2b)^3+(-1)^3=3a(2b)(-1)$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+2b-1=0\\a=2b=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+2b=1\\a+2b=-2\end{array}\right.$.

Câu 8: Tìm các số nguyên dương a, b, c, $(b>c)$ thỏa mãn $\begin{cases}b^2+c^2=a^2\\2(a+b+c)=bc\end{cases}$.

Lời giải

Ta có $b^2+c^2=a^2\Rightarrow(b+c)^2-2bc=a^2\Rightarrow(b+c)^2-4(a+b+c)=a^2$

$\Rightarrow(b+c-2)^2=(a+2)^2$.

Vì $b>c\geq1$ nên $b+c-2\geq1$ dó đó
$b+c-2=a+2\Rightarrow a=b+c-4\Rightarrow b^2+c^2=(b+c-4)^2\Leftrightarrow(b-4)(c-4)=8$.

Vì $b-4>c-4\geq-3$ nên có các trường hợp sau

TH1: $\begin{cases}b-4=8\\c-4=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=12\\c=5\end{cases}\Rightarrow a=13$.

TH2: $\begin{cases}b-4=4\\c-4=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=8\\c=6\end{cases}\Rightarrow a=10$.

Câu 9: Biết khoảng cách từ trọng tâm tam giác ABC đến các cạnh tỉ lệ với các số 2; 3; 4 và chu vi của tam giác ABC là 26. Tìm độ dài các cạnh tam giác ABC.

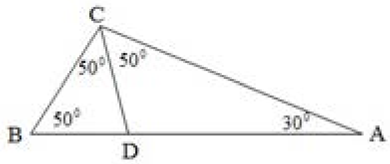
Lời giải

Gọi độ dài các cạnh $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Độ dài các đường cao kẻ từ đỉnh A, B, C lần lượt là x, y, z. Khoảng cách từ trọng tâm tam giác ABC đến các cạnh tỉ lệ với các số 2; 3; 4 nên ta có $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$. Mặt khác $ax=by=cz=2S_{ABC}$ nên

$$\frac{a}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=\frac{c}{\frac{1}{z}}=\frac{a}{\frac{1}{2k}}=\frac{1}{\frac{1}{3k}}=\frac{c}{\frac{1}{4k}}=\frac{a+b+c}{\frac{13}{12k}}=24k$$. Suy ra $a=12$; $b=8$; $c=6$.

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=30^\circ$; $\widehat{B}=50^\circ$, cạnh $AB=2\sqrt{3}$. Tính $AC(AC+BC)$.

Lời giải



Kẻ đường phân giác CD.

Ta có $\widehat{ACB}=100^\circ \Rightarrow \widehat{BCD}=\widehat{ACD}=50^\circ$.

Suy ra tam giác BCD cân tại D. Suy ra $BD=DC$.

Lại có $\Delta ADC\#\ \Delta ACB \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow AC^2=AB.AD$.

Và $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BC}\Rightarrow AC.BC=AB.CD$.

Suy ra $AC.BC+AC^2=AB(AD+CD)=AB(AD+BD)=AB^2=12$ hay $AC(AC+BC)=12$.

II – PHẦN TỰ LUẬN (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2y^2-x^2=1\\2(x^3-y)=y^3-x\end{cases}$.

Lời giải

Thay $1=2y^2-x^2$ va phương trình thứ hai ta có $2x^3-2y(2y^2-x^2)=y^3-x(2y^2-x^2)\Leftrightarrow x^3-5y^3+2x^2y+2xy^2=0$. Đặt $y=xt$ được $x^3(5t^3-2t^2-2t-1)=0$.

Xét $x=0$, thay vào phương trình thứ hai ta được $y\left(y^2+2\right)=0 \Rightarrow y=0$ không thỏa mãn phương trình thứ nhất.

Xét $5t^3-2t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)\left(5t^2+3t+1\right)=0 \Leftrightarrow t=1$. Do đó $y=x$, khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2=1 \\ x\left(x^2-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)\in\{(-1;-1),(1;1)\}$.

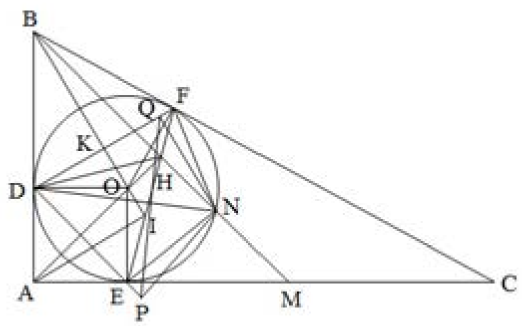
Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC. Gọi I là giao điểm của BO và EF. M là điểm di động trên đoạn CE. Gọi H là giao điểm của BM và EF.

a) Chứng minh nếu $AM=AB$ thì các tứ giác $BDHF$, $ABHI$ nội tiếp.

b) Gọi N là giao điểm của BM và cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$ của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của

N trên các đường thẳng DE, DF. Chứng minh $PQ \le EF$.

Lời giải



Gọi K là giao điểm của BO và DF. Ta có tam giác IKF vuông tại K. Hình chữ nhật $ADOE$ có $OD=OE$ nên nó là hình vuông. Suy ra $\widehat{DEF}=\frac{1}{2}\widehat{DOE}=45^\circ$. Suy ra

$\widehat{BIF}=45^\circ$.

a) Khi $AM=AB$ thì tam giác AMB vuông cân tại A suy ra $\widehat{DBH}=45^\circ=\widehat{DFH}$.

Nên tứ giác $BDHF$ nội tiếp. Do đó năm điểm B, D, O, H, F cùng thuộc đường

tròn đường kính BO. Suy ra $\widehat{BFO}=\widehat{BHO}=90^\circ \Rightarrow OH\perp BM$, mà tam giác ABM

vuông cân và có AH là phân giác nên $AH \perp BM$. Suy ra A, O, H thẳng hàng.

Suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{BIH} = 45^\circ$. Vậy tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

b) Tứ giác $PNQD$ nội tiếp suy ra $\widehat{NPQ} = \widehat{NDQ} = \widehat{NEF}$. Tương tự ta có

$\widehat{NQP} = \widehat{NDP} = \widehat{NFE}$. Suy ra $\Delta NEF \# \Delta NQP \Rightarrow \dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{NQ}{NE} \le 1 \Rightarrow PQ \le EF$. Dấu

"$=$" xảy ra khi P trùng F, Q trùng E hay DN là đường kính của (O).

Câu 13: Cho x, y là các số nguyên không đồng thời bằng 0. Tìm GTNN của $F = \left|5x^2 + 11xy - 5y^2\right|$.

Lời giải

Đặt $F = \left|5x^2 + 11xy - 5y^2\right| = f(x;y)$, m là GTNN của F.

Ta có m là số nguyên và $f(0;1) = f(1;0) = 5 \Rightarrow m \le 5$.

Vì x, y là các số nguyên không đồng thời bằng 0 nên $5x^2 + 11xy - 5y^2 \ne 0$ hay $F \ne 0$.

Xét $x = 2n$; $y = 2k$. Ta có $f(x;y) = f(2n;2k) = 4f(n;k)$ nên giá trị $f(2n;2k)$ không thể là GTNN. Do đó GTNN của F xảy ra khi x, y không cùng chẵn, vì vậy m là số lẻ.

* Nếu $m = 1$ suy ra tồn tại x, y để $\left|5x^2 + 11xy - 5y^2\right| = 1 \Leftrightarrow 100x^2 + 220xy - 100y^2 = \pm 20$ $\Leftrightarrow (10x + 11y)^2 - 221y^2 = \pm 20 \Leftrightarrow (10x + 11y)^2 \pm 20 = 221y^2 \vdots 3$. Suy ra $(10x + 11y)^2$ chia 13 dư 6 hoặc dư 7. Mà số chính phương khi chia 13 chỉ có dư 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12. Do đó vô lý.

* Nếu $m = 3$ suy ra tồn tại x, y để $\left|5x^2 + 11xy - 5y^2\right| = 3 \Leftrightarrow 100x^2 + 220xy - 100y^2 = \pm 60$ $\Leftrightarrow (10x + 11y)^2 - 221y^2 = \pm 60 \Leftrightarrow (10x + 11y)^2 \pm 60 = 221y^2 \vdots 3$. Suy ra $(10x + 11y)^2$ chia 13 dư 5 hoặc dư 8. Mà số chính phương khi chia 13 chỉ có dư 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12. Do đó vô lý.

Vậy GTNN của F là 5.

STT 19. ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HẢI DƯƠNG

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Bùi Minh Sang

Người phản biện: Hoa Hướng Dương

Câu 1. a) Cho $A=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+}$. Rút gọn $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với $0\le x\le\frac{1}{4}$

b) Cho $x,y,z\ne0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Chứng minh

$\left(\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}\right)\left(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018}\right)=xy+yz+zx$.

Câu 2. a)Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$.

b)Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2-xy=2\\x^3=x+y\end{cases}$.

Câu 3. a)Tìm các số thực x sao cho $x+\sqrt{2018}$ và $\frac{7}{x}-\sqrt{2018}$ đều là số nguyên.

b) Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$. Biết rằng $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ là số chia hết cho 3267.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc $\widehat{BDC}=90^0$, đường phân giác góc $\widehat{BAD}$ cắt cạnh BC và đường thẳng CD lần lượt tại E và F. Gọi O,O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và ΔCEF.

1)Chứng minh rằng O' thuộc đường tròn (O).

2) Khi DE vuông góc BC

a) Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường thẳng BC tại G. Chứng minh rằng $BG.CE=BE.CG$

b)Đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm H (H khác C). Kẻ tiếp tuyến chung IK (I thuộc (O), K thuộc (O') và H,I,K nằm cùng phía bờ OO'). Dựng hình bình hành $CIMK$. Chứng minh $OB+O'C>HM$.

Câu 5. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2\le3xyz$. Tìm GTLN của

$P=\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+zx}+\frac{z^2}{z^4+xy}$

STT 19. LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HẢI DƯƠNG

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Bùi Minh Sang.

Câu 1. a) Cho A=$\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+}$. Rút gọn $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với $0\le x\le\dfrac{1}{4}$

b)Cho $x,y,z\ne 0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$.

Chứng minh $\left(\dfrac{1}{x^2+2yz}+\dfrac{1}{y^2+2zx}+\dfrac{1}{z^2+2xy}\right)\left(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018}\right)=xy+yz+zx$

Lời giải

a) Ta có

A=$\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)=2x$

$B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}=1-\sqrt{4x-4\sqrt{x}+1}=1-\left|2\sqrt{x}-1\right|=2\sqrt{x}(0\le x\le\dfrac{1}{4})$

b)Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\Rightarrow yz+xz+xy=0$

$\Rightarrow x^2+2yz=x^2+yz+yz=x^2+yz-xz-xy=x(x-z)-y(x-z)=(x-z)(z-y)$

Tương tự $\Rightarrow y^2+2zx=(y-z)(y-x); z^2+2xy=(z-x)(z-y)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^2+2yz}+\dfrac{1}{y^2+2xz}+\dfrac{1}{z^2+2yx}$

$=\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{1}{(z-y)(z-x)}$

$=\dfrac{-y+z-z+x-x+y}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$

$\Rightarrow\left(\dfrac{1}{x^2+2yz}+\dfrac{1}{y^2+2xz}+\dfrac{1}{z^2+2yx}\right)(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018})=0$.

Câu 2. a)Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$.

b)Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2-xy=2\\ x^3=x+y\end{cases}$

Lời giải

a)Điều kiện $x \geq 2$

$$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+3x-10}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+5}(\sqrt{x-2}-1)=\sqrt{x-2}-1$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=1\\ \sqrt{x+5}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-4\end{array}\right.$

So với điều kiện ta được phương trình có 1 nghiệm $x=3$.

b) $\begin{cases}x^2+y^2-xy=2\\ x^3=x+y\end{cases}$

Từ phương trình $x^3=x+y \Leftrightarrow 2x^3=2(x+y)=(x^2+y^2-xy)(x+y)=x^3+y^3$

$\Rightarrow x^3=y^3 \Rightarrow x=y$

Với $x=y$ thế vào phương trình $x^2+y^2-xy=2$ ta được

$y^2=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=\sqrt{2}\\ y=-\sqrt{2}\end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\{(\sqrt{2};\sqrt{2});(-\sqrt{2};-\sqrt{2})\}$.

Câu 3. a)Tìm các số thực x sao cho $x+\sqrt{2018}$ và $\dfrac{7}{x}-\sqrt{2018}$ đều là số nguyên.

b) Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$. Biết rằng $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ là số chia hết cho 3267.

Lời giải

a) Điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $a=x+\sqrt{2018} \Rightarrow x=a-\sqrt{2018}$

Xét $b=\dfrac{7}{x}-\sqrt{2018}=\dfrac{7}{a-\sqrt{2018}}-\sqrt{2018}=\dfrac{7-a\sqrt{2018}+2018}{a-\sqrt{2018}}$

$\Rightarrow b(a-\sqrt{2018})=2025-a\sqrt{2018}$

$\Rightarrow ab-2015=(b-a)\sqrt{2018}$

Với $a,b \in Z$

$\Rightarrow ab-2025 \in Z \Rightarrow (a-b)\sqrt{2018}=0$

$\Rightarrow a=b$

$\Rightarrow a=b=\pm\sqrt{2025}=\pm 45$

\+ $a=45 \Rightarrow x=45-\sqrt{2018}$

\+ $a=-45 \Rightarrow x=-45-\sqrt{2018}$

b) $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (10a+b)^2 - (10b+a)^2 = 99(a^2 - b^2)$

$\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ chia hết cho 3267 nên $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ chia hết cho 33

$1 \le a, b \le 9 \Rightarrow a = b$, hay $a = 7, b = 4; a = 4, b = 7$

Vậy ta có các số $11; 22; 33; 44; 47; 55; 66; 74; 77; 88; 99$.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc $\widehat{BDC} = 90^0$, đường phân giác góc BAD cắt cạnh BC và đường thẳng CD lần lượt tại E và F. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và ΔCEF.

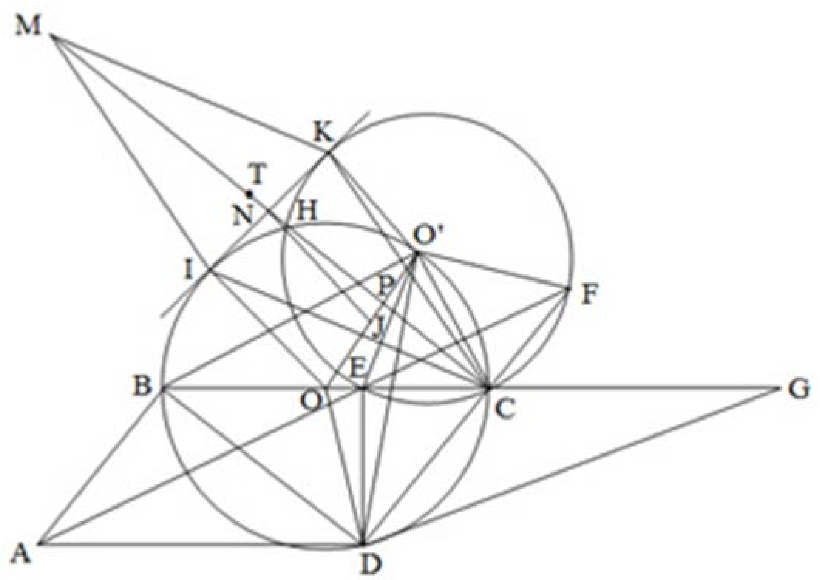
1)Chứng minh rằng O' thuộc đường tròn (O).

2) Khi DE vuông góc BC

a) Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường thẳng BC tại G. Chứng minh rằng $BG.CE = BE.CG$

b)Đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm H (H khác C). Kẻ tiếp tuyến chung IK (I thuộc (O), K thuộc (O') và H, I, K nằm cùng phía bờ OO'). Dựng hình bình hành $CIMK$. Chứng minh $OB + O'C > HM$

Lời giải



a)

$\widehat{BAE} = \widehat{DAE}$ (giả thuyết); $\begin{cases} \widehat{BAE} = \widehat{EFC} \\ \widehat{DAE} = \widehat{FEC} \end{cases} \Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{FEC}$

suy ra ΔEFC cân tại C $\Rightarrow CE = CF$

mà $\widehat{BEA} = \widehat{FEC} \Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{BAE}$ nên ΔABE cân tại B

$\Rightarrow BA = BE$ mà $BA = CD$ nên $BE = CD$

$$\begin{cases} CE = CF \\ BE = CD \end{cases} \Rightarrow BE + CE = DC + CF \Leftrightarrow BC = DF \ (1).$$

Mặt khác $\Delta O'CF$ cân $\Rightarrow \widehat{O'CF} = \widehat{O'FC}$

Với $CE = CF \Rightarrow \widehat{O'CE} = \widehat{O'CF} \Rightarrow \widehat{O'CE} = \widehat{O'FC}$ (2)

Mà $O'C = O'F$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta được $\Delta BO'C = \Delta DO'F \Rightarrow \widehat{O'BC} = \widehat{O'DF}$

Nên tứ giác $BDCO'$ nội tiếp hay điểm O' thuộc đường tròn (O')

b)Tam giác BCD tại D,nội tiếp đường tròn (O).

Ta có $\begin{cases} DG^2 = CG.BG \\ DE^2 = BE.CE \end{cases} \Rightarrow DG^2 - DE^2 = CG.BG - BE.CE \Leftrightarrow GE^2 = CG.BG - BE.CE$

$\Rightarrow (CE + CG)^2 = CG.BG - BE.CE$

$\Leftrightarrow CE^2 + 2CE.CG + CG^2 = CG.BG - BE.CE$

$\Leftrightarrow CE^2 + CE.CG + BE.CE = CG.BG - CG^2 - CE.CG$

$\Leftrightarrow CE(CE + CG + BE) = CG(BG - CG - CE) \Leftrightarrow CE.BG = CG.BE$

c)Tia CH cắt IK tại N. Áp dụng phương tích đường tròn ta có $NK^2 = NH.NC = NI^2$ $\Rightarrow NK = NI$ mà $CIMK$ là hình bình hành, do đó M, N, H, C thẳng hàng.

Suy ra $OB^2 + O'C = OI + O'K = 2NJ$. Gọi T là điểm đối xứng với H qua N, P là giao điểm của CH với OO'.

Ta có $\begin{cases} PH = PC \\ OO' \perp CH \end{cases} \Rightarrow NJ > NP$

$\Rightarrow 2NJ > 2NP = NP + NP = NP + PH + NP = NT + PC + NP = TC = HM$

Vậy $OB + O'C > HM$.

Câu 5. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \le 3xyz$. Tìm GTLN của

$$P = \frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + zx} + \frac{z^2}{z^4 + xy}$$

Lời giải

Ta có $x, y, z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 3xyz \Rightarrow \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \le 3$.

Với $x, y, z > 0$, theo BĐT Cauchy ta được $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$

$$x^4+yz\ge 2\sqrt{x^4yz}=2x^2\sqrt{yz}\Rightarrow \frac{x^2}{x^4+yz}\le \frac{1}{2\sqrt{yz}}$$

Tương tự ta được: $\dfrac{y^2}{y^4+zx}\le \dfrac{1}{2\sqrt{zx}};\dfrac{z^2}{z^4+xy}\le \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$

$$P=\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+zx}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)\le \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\right)\le \frac{3}{2}$$

GTLN của $P=\dfrac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$

SỞ GD&ĐT HƯNG YÊN

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
MÔN TOÁN LỚP 9 NĂM HỌC 2017-2018
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. a) Cho $a,b>0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2018}$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}$
.

b) Cho a là nghiệm dương của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2}-a^2}$.

Bài 2. a) Giải phương trình (1 điểm) $\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt[3]{2-x}=x$.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x-2018)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$

Bài 3. a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2}\\(3x+2y)(y+1)=4-x^2\end{cases}$

b) Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\dfrac{3yz}{x}+\dfrac{4zx}{y}+\dfrac{5xy}{z}\ge 4$

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định với $OA=2R$, đường kính BC quay quanh O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn (O) lần lượt tại điểm thứ hai là D và E. Gọi K l à giao điểm của DE và AO

a) Chứng minh rằng $AK.AI=AE.AC$.

b) Tính độ dài của đoạn AK theo R.

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADE luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 5. Từ 625 số tự nhiên liên tiếp $1,2,3,...,625$ chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT VÀ ĐÁP SỐ

Bài 1. a) Cho $a,b>0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}$.

b) Cho a là nghiệm dương của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2}-a^2}$.

Lời giải

a) Từ giả thiết

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}\Rightarrow 2018=\frac{ab}{a+b}\Rightarrow \sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}=\sqrt{a-\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{b-\frac{ab}{a+b}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{a+b}}=\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{a+b}\text{ (Vì } a,b>0\text{)}.$$

b) Ta có a là nghiệm dương của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$ nên $6a^2+\sqrt{3}a-\sqrt{3}=0$

$$\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}-6a^2}{\sqrt{3}}=1-2\sqrt{3}a^2>0\Rightarrow a^2<\frac{1}{2\sqrt{3}}<\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2-\sqrt{3}<0.$$

Do đó $A=\frac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2}-a^2}=\frac{(a+2).\left(\sqrt{a^4+a+2}+a^2\right)}{a^4+a+2-a^4}=\sqrt{a^4+1-2\sqrt{3}a^2+2}+a^2$

$$=\sqrt{\left(a^2-\sqrt{3}\right)^2}+a^2=\left|a^2-\sqrt{3}\right|+a^2=\sqrt{3}-a^2+a^2=\sqrt{3}.$$

Bài 2. a) Giải phương trình (1 điểm) $\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt[3]{2-x}=x$.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x-2018)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$

Lời giải

a) Giải phương trình $\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt[3]{2-x}=x$. ĐK: $x\le 1$

$$\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt[3]{2-x}=x \Leftrightarrow x.\sqrt[3]{2-x}=x\left(1+\sqrt{1-x}\right) \Leftrightarrow x\left(\sqrt[3]{2-x}-1-\sqrt{1-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt[3]{2-x}=1+\sqrt{1-x} \end{array}\right.$$

Xét phương trình $\sqrt[3]{2-x}=1+\sqrt{1-x}$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=a \\ \sqrt{1-x}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ a^3-b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ b^3+3b^2+3b+1-b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ b^3+2b^2+3b=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow x=1$.

Đối chiếu ĐKXĐ ta có: $x\in\{0;1\}$.

b) $(x-2018)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y \Leftrightarrow (x-2018)^2+1=\left(y^2-3y+1\right)^2$

$\Leftrightarrow (x-2018)^2-\left(y^2-3y+1\right)^2=1 \Leftrightarrow \left(y^2-3y-x+2019\right)\left(y^2-3y+x-2017\right)=1$

Vì cặp $x;y$ nguyên nên:

TH1: $\begin{cases} y^2-3y-x+2019=1 \\ y^2-3y+x-2017=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2018 \\ y^2-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2018;y=0 \\ x=2018;y=3 \end{array}\right.$.

TH2: $\begin{cases} y^2-3y-x+2019=-1 \\ y^2-3y+x-2017=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2018 \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2018;y=1 \\ x=2018;y=2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có các nghiệm $(x;y)\in\{(2018;0),(2018;1),(2018;2),(2018;3)\}$

Bài 3. a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} & (1) \\ (3x+2y)(y+1)=4-x^2 \end{cases}$

b) Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\dfrac{3yz}{x}+\dfrac{4zx}{y}+\dfrac{5xy}{z}\ge 4$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x,y\ge -\dfrac{1}{2}$. Từ $(3x+2y)(y+1)=4-x^2$

$\Leftrightarrow (x+2y+4)(x+y-1)=0$. Vì $x,y\ge -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x+2y-4>0$, do đó:

$x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$

Thay vào phương trình (1) ta được: $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\dfrac{4x^2-4x+1}{2}$ (2); $\left(-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}\right)$

Đặt $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=t$, $(2)\Leftrightarrow t=-\dfrac{t^4-8t^2}{8}\Leftrightarrow t(t-2)(t^2+2t-4)=0$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\sqrt{5}-1\end{array}\right.$ (Vì $t>0$).

TH1: $t=2\Rightarrow\sqrt{(2x+1)(3-2x)}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2};y=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{3}{2};y=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

TH2: $t=\sqrt{5}-1\Rightarrow\sqrt{(2x+1)(3-2x)}=1-\sqrt{5}<0$ (vô lí).

Vậy phương trình có nghiệm: $(x;y)\in\left\{\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

b) Áp dụng bất đẳng thức CauChy ta có

$$\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}=\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+2\left(\frac{zy}{x}+\frac{xy}{z}\right)+3\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\ge 2z+4y+6x$$

$$=4(x+y)+2(z+x)\ge 8\sqrt{xy}+4\sqrt{xz}=4\sqrt{x}(2\sqrt{y}+\sqrt{z})=4\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}=4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

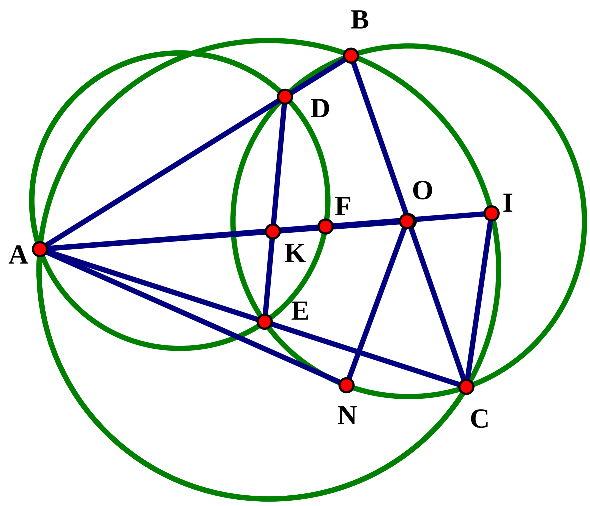
Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định với $OA=2R$, đường kính BC quay quanh O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn (O) lần lượt tại điểm thứ hai là D và E. Gọi K l à giao điểm của DE và AO

a) Chứng minh rằng $AK.AI=AE.AC$.

b) Tính độ dài của đoạn AK theo R.

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADE luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải



a) Ta có tứ giác $BCED$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC}+\widehat{DEC}=180^\circ \Rightarrow \widehat{AEK}=\widehat{ABC}$ (cùng bù $\widehat{DEC}$).

Mặt khác $\widehat{ABC}=\widehat{AIC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC); suy ra $\widehat{AEK}=\widehat{AIC}$ (bắc cầu)

Xét ΔAEK và ΔAIC có : $\widehat{AEK}=\widehat{AIC}$ và $\widehat{EAK}$ chung nên $\Delta AEK \ \# \ \Delta AIC$ (g.g)

$$\frac{AE}{AI}=\frac{AK}{AC}\Rightarrow AE.AC=AK.AI$$

b) Xét ΔAOB và ΔCOI có : $\widehat{AOB}=\widehat{COI}$ (đối đỉnh) và $\widehat{BAO}=\widehat{ICO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BI) nên $\Delta AOB \ \# \ \Delta COI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OI}\Rightarrow OI=\frac{OB.OB}{OA}=\frac{R}{2}\Rightarrow AI=\frac{5}{2}R$

Kẻ tiếp tuyến AN với đường tròn (O), dễ dàng chứng minh được $\Delta ANE \ \# \ \Delta ACN$ (g.g)

$\Rightarrow AE.AC=AN^2=AO^2-ON^2=3R^2$.

Mà theo câu (a) : $AE.AC=AK.AI\Rightarrow AK.\frac{5}{2}R=3R^2\Rightarrow AK=\frac{6}{5}R$.

Gọi F là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔADE với OA, ta có $\widehat{AFD}=\widehat{AED}$ mà $\widehat{AEK}=\widehat{ABC}$ (câu a) nên $\widehat{AFD}=\widehat{ABC}$ nên tứ giác $BDFO$ nội tiếp đường tròn. Dễ dàng chứng minh được $\Delta ADF \ \# \ \Delta AOB$ (g.g) $\Rightarrow AD.AB=AF.AO$; và ta cũng chứng minh được $AD.AB=AN^2\Rightarrow AF.AO=AN^2\Rightarrow AF=\frac{3}{2}R$ không đổi, mà A cố định nên F cố định suy ra AF cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADE thuộc đường trung trực của đoạn AF cố định.

Bài 5. Từ 625 số tự nhiên liên tiếp $1,2,3,...,625$ chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

Lời giải

Ta phân chia 625 số tự nhiên đã cho thành 311 nhóm như sau:

+) nhóm thứ 1 gồm năm số chính phương $\{49;225;400;576;625\}$

+) và 310 nhóm còn lại mỗi nhóm gồm hai số có tổng bằng 625 (không chứa các số của nhóm 1).

Nếu trong 311 số được chọn không có số nào thuộc nhóm thứ 1, thì 311 số này thuộc các nhóm còn lại. Theo nguyên tắc Dirichle phải có ít nhất hai số thuộc cùng một nhóm. Hai số này có tổng bằng 625 (vô lí). Vậy chắc chắn trong 311 số được chọn phải có ít nhất một số thuộc nhóm thứ 1. Số này là số chính phương.

HẾT

STT 24. ĐỀ THI CHỌN HSG KHÁNH HÒA

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Đặng Đức Quý.

Người phản biện: Nguyễn Dương.

Câu 1. *(4,0 điểm)*

Giải phương trình: $2\left(5x+3\sqrt{x^2+x-2}\right)=27+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$ là một số nguyên.

b. Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương n, ta có:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3.$$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2+xy+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=x^3y+xy^3$.

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p=a^3-b^3$ với a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng : Nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được số là bình phương của một số nguyên lẻ.

Câu 5. *(6,0 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Gọi $E,\ F$ lần lượt là các chân đường cao kẻ từ $B,\ C$ của tam giác ABC. Đường tròn (I) đi qua $E,\ F$ và tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng: $\dfrac{DB^2}{DC^2}=\dfrac{BF.BE}{CF.CE}$.

Câu 6. *(2,0 điểm)*

Trên bàn có n $(n\in\mathbb{N},n>1)$. viên bi. Có hai người lần lượt lấy bi. Mỗi người đến lượt mình được lấy một số bi tùy ý (ít nhất 1 viên bi) trong những viên bi còn lại trên bàn, nhưng không vượt quá số viên bi mà người lấy trước vừa lấy, biết rằng người lấy đầu tiên lấy không quá $n-1$ viên bi. Người nào lấy viên bi cuối cùng được xem là người chiến thắng. Tìm các số n sao cho người lấy trước có chiến lược chiến thắng.

STT 24. LỜI GIẢI ĐỀ THI HSG TOÁN 9 TỈNH KHÁNH HÒA

NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Đặng Đức Quý.

Người phản biện: Nguyễn Dương.

Câu 1. *(4,0 điểm)*

Giải phương trình: $2\left(5x+3\sqrt{x^2+x-2}\right)=27+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$.

Lời giải:

ĐK : $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge -2 \\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1.$

$2\left(5x+3\sqrt{x^2+x-2}\right)=27+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow\ 10x+6\sqrt{x^2+x-2}=27+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$ (1).

Đặt $t=3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$ mà $x\ \ge\ 1\ \Rightarrow\ t\ \ge\ \sqrt{3}$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow\ t^2-t-20=0\ \Leftrightarrow\ (t+4)(t-5)=0\ \Leftrightarrow\ t=5\ \left(t\ge\sqrt{3}\right)$.

Khi đó ta có phương trình: $3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=5$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}-3+\sqrt{x+2}-2=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{3}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ $\left(\text{do } \dfrac{3}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}>0\right)$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{2\}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$ là một số nguyên.

b. Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3.$

Lời giải:

a) Với $x=a+b \Rightarrow x^3=a^3+b^3+3ab(a+b) \Rightarrow x^3=a^3+b^3+3abx.$

Áp dụng: Đặt $a=\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}$, $b=\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}, x=\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$

$\Rightarrow x^3=70+70+3\sqrt[3]{70^2-4901}x \Rightarrow x^3=140-3x \Leftrightarrow x^3+3x-140=0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x^2+5x+28)=0 \Leftrightarrow x-5=0$ (do $x^2+5x+28>0$) $\Leftrightarrow x=5.$

Vậy $\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}=5$ là một số nguyên (đpcm).

b) Ta có

$1 = n+1-n = \left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3=\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}\right).$

Mà $\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}<3\sqrt[3]{(n+1)^2} \Rightarrow 1<3\sqrt[3]{(n+1)^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right).$

Từ đó suy ra $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<\dfrac{3\sqrt[3]{(n+1)^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{(n+1)\sqrt[3]{n}}=3\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$

Nên $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)+3\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)+...+3\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)<3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3.$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2+xy+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=x^3y+xy^3$.

Lời giải:

Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số không âm ta có:

$x^2+y^2 \ge 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy| \ge 2xy \Rightarrow x^2+y^2+xy \ge 2xy+xy = 3xy \Rightarrow xy \le \frac{1}{3}$.

Ta có $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2ab \le a^2+b^2 \Leftrightarrow 4ab \le (a+b)^2 \Leftrightarrow ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$ (1).

$P = x^3y+xy^3 = xy(x^2+y^2) = xy(1-xy)$ vì $x^2+xy+y^2=1$

Áp dụng BĐT (1) ta có $2P = 2xy.(1-xy) \le \frac{(2xy+1-xy)^2}{4} = \frac{(1+xy)^2}{4} \le \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 : 4 = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow P \le \frac{2}{9}$. Vậy P có giá trị lớn nhất bằng $\frac{2}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$xy = \frac{1}{3}$ và $|x| = |y| \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $x = y = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p = a^3 - b^3$ với a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng : Nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được số là bình phương của một số nguyên lẻ.

Lời giải:

Ta có $p = a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ là số nguyên tố mà a,b là số nguyên dương $a-b=1$

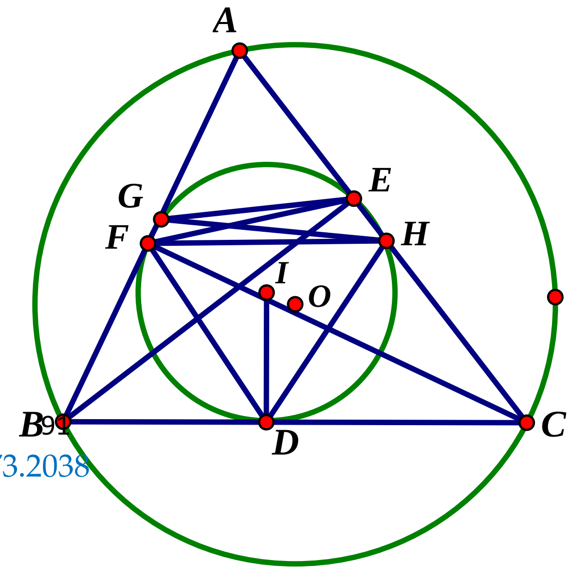
$\Rightarrow a = b+1 \Rightarrow p = (b+1)^3 - b^3 = 3b^2+3b+1 \Rightarrow 4p = 12b^2+12b+4 \equiv 1(mod 3)$

Nếu lấy $4p$ chia 3 và loại bỏ phần dư ta được $A = 4b^2+4b+1 = (2b+1)^2$ là số chính phương lẻ.

Câu 5. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Gọi E, F lần lượt là các chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Đường tròn (I) đi qua E, F và tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng: $\frac{DB^2}{DC^2} = \frac{BF.BE}{CF.CE}$.

Lời giải:



Gọi $H = AC \cap (I)$, $G = AB \cap (I)$.

Trước hết ta chứng minh được $\Delta CDH \backsim \Delta CED\left(g-g\right)$ do $\begin{cases} \widehat{C} \text{ chung} \\ \widehat{CDH} = \widehat{CED} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{CH} = \dfrac{CE}{CD} \Rightarrow CD^2 = CH.CE \ (1)$.

Chứng minh tương tự $\Rightarrow \Delta BDF \backsim \Delta BGD\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{BD}{BF} = \dfrac{BG}{BD} \Rightarrow BD^2 = BG.BF \ (2)$.

Ta có $\widehat{GBE} = \widehat{HCF}$ (cùng phụ với $\widehat{A}$) và $\widehat{BGE} = \widehat{CHF}$ (cùng bù với $\widehat{EHF}$)

$\Rightarrow \Delta BGE \backsim \Delta CHF \ \left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{BG}{CH} = \dfrac{BE}{CF}$ (3). Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$

$\dfrac{DB^2}{DC^2} = \dfrac{BG.BF}{CH.CE} = \dfrac{BG}{CH}.\dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BE}{CF}.\dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BF.BE}{CF.CE}$ (đpcm).

Câu 6. *(2,0 điểm)*

Trên bàn có n ($n \in \mathbb{N}, n > 1$). viên bi. Có hai người lần lượt lấy bi. Mỗi người đến lượt mình được lấy một số bi tùy ý (ít nhất 1 viên bi) trong những viên bi còn lại trên bàn, nhưng không vượt quá số viên bi mà người lấy trước vừa lấy, biết rằng người lấy đầu tiên lấy không quá $n-1$ viên bi. Người nào lấy viên bi cuối cùng được xem là người chiến thắng. Tìm các số n sao cho người lấy trước có chiến lược chiến thắng.

Lời giải:

+ Ta thấy rằng nếu n lẻ thì người đi trước luôn thắng, bằng cách ở nước đi đầu tiên, người đó chỉ lấy một viên bi, do đó ở những nước đi tiếp theo, mỗi người chỉ được lấy một viên bi.

+ Xét trường hợp n chẵn. Rõ ràng người nào lấy một số lẻ viên bi đầu tiên sẽ thua, vì để lại cho người đi nước tiếp theo một số lẻ viên bi, trở về trường hợp trên. Do đó, người chiến thắng phải luôn lấy một số chẵn viên bi. Như vậy, các viên bi gắn thành từng cặp và mỗi người đến lượt sẽ lấy một số cặp nào đó.

TH1: Nếu chỉ có một cặp $\left(n=2\right)$: người đi trước thua vì chỉ được lấy một viên.

TH2: Nếu số cặp lẻ và lớn hơn 1 $\left(n \equiv 2 \bmod 4\right)$: ta sẽ trở về trường hợp n lẻ (vì các viên bi đã được gắn thành cặp) và người đi trước sẽ thắng.

TH3: Nếu số cặp chẵn $\left(n \equiv 0 \bmod 4\right)$: mỗi người muốn thắng thì luôn phải lấy một số chẵn cặp (nếu ngược lại thì trở về TH2). Khi đó các viên bi được gắn thành từng nhóm 4 viên. Tương tự TH1 và TH2 ta thấy nếu số nhóm là một $\left(n=4\right)$; nếu $n>4$ và số nhóm lẻ $\left(n \equiv 4 \bmod 8\right)$ thì người đi trước thắng. Nếu số nhóm là chẵn $\left(n \equiv 0 \bmod 8\right)$, ta lại gắn các viên bi thành từng nhóm 8 viên,…

+ Như vậy người đi trước có chiến lược thắng khi và chỉ khi n không phải là một lũy thừa của 2 $\left(n \neq 2^k\right)$.

ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH PHÚ THỌ

NĂM HỌC 2017-2018

A. **PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)**

Câu 1: Cho phương trình $x^2+mx+4=0$. Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm kép là

A. $\{4;-4\}$. **B.** $\{4\}$. **C.** $\{-4\}$. **D.** $\{16\}$.

Câu 2: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, góc tạo bởi hai đường thẳng có phương trình $y=5-x$ và $y=5+x$ bằng

A. 70°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Câu 3: Cho $x=\dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Giá trị của biểu thức $\left(x^3-4x-2\right)^{2018}$ bằng

A. -2^{2018}. **B.** 2^{2018}. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 4: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2018;-1)$ và $B(-2018;1)$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $y=-\dfrac{x}{2018}$. **B.** $y=\dfrac{x}{2018}$. **C.** $y=2018x$. **D.** $y=-2018x$.

Câu 5: Cho biểu thức $P=\sqrt{2x-\sqrt{8x-4}}-\sqrt{2x+\sqrt{8x-4}}$, khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $P=-2$ với mọi $x\geq\dfrac{1}{2}$. **B.** $P=-2$ với mọi $x\geq 1$.

C. $P=-2\sqrt{2x-1}$ với mọi $x\leq 1$. **D.** $P=-2\sqrt{2x-1}$ với mọi $\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1$.

Câu 6: Trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy cho điểm M, biết rằng M cách đều trục tung, trục hoành và đường thẳng $y=2-x$. Hoành độ của điểm M bằng

A. $2+\sqrt{2}$. **B.** $2-\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khoảng cách từ điểm $M\left(2018;2018\right)$ đến đường thẳng $y=x-2$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A\left(\dfrac{2}{3}m;m\text{-}10\right)$. Khi m thay đổi thì khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. Điểm A thuộc một đường thẳng cố định.
B. Điểm A thuộc một đường tròn cố định.
C. Điểm A thuộc một đoạn thẳng cố định.
D. Điểm A thuộc đường thẳng $y = x - 10$.

Câu 9: Cho tam giác ABC có $AB = 3\ cm, AC = 4\ cm$ và $BC = 5\ cm$. Kẻ đường cao AH, gọi I, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác HAB và tam giác HAC. Độ dài của đoạn thẳng KI bằng

A. $1,4\ cm$. **B.** $2\sqrt{2}\ cm$. **C.** $1,45\ cm$. **D.** $\sqrt{2}\ cm$.

Câu 10: Cho AB là một dây cung của đường tròn $(O;\ 1\ cm)$ và $\widehat{AOB} = 150^o$. Độ dài của đoạn thẳng AB bằng

A. $2\ cm$. **B.** $\sqrt{2+\sqrt{3}}\ cm$. **C.** $\sqrt{1+\sqrt{5}}\ cm$. **D.** $\sqrt{2-\sqrt{3}}\ cm$.

Câu 11: Cho hai đường tròn $(I;3)$ và $(O;6)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau cắt hai đường tròn đã cho tại B và C. Diện tích lớn nhất của tam giác ABC bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 20.

Câu 12: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi x, y lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và tam giác ABD. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$ bằng

A. 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 13: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;\ R)$ đường kính AC và dây cung $BD = R\sqrt{2}$. Gọi $x,\ y,\ z,\ t$ lần lượt là khoảng cách từ điểm O tới $AB,\ CD,\ BC,\ DA$. Giá trị của biểu thức $xy + zt$ bằng

A. $2\sqrt{2}R^2$. **B.** $\sqrt{2}R^2$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}R^2$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}R^2$.

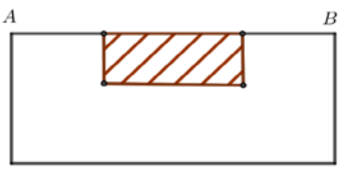
Câu 14: Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $(I;2\ cm)$ và nội tiếp đường tròn $(O;6\ cm)$. Tổng khoảng cách từ điểm O tới các cạnh của tam giác ABC bằng

A. $8\ cm$. **B.** $12\ cm$. **C.** $16\ cm$. **D.** $32\ cm$.

Câu 15: Nếu một tam giác có độ dài các đường cao bằng $12,15,20$ thì bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6 .

Câu 16: Trên một khu đất rộng, người ta muốn rào một mảnh đất nhỏ hình chữ nhật để trồng rau an toàn, vật liệu cho trước là $60m$ lưới để rào. Trên khu đất đó người ta tận dụng một bờ rào AB có sẵn (*tham khảo hình vẽ bên*) để làm một cạnh hàng rào. Hỏi mảnh đất để trồng rau an toàn có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?



A. $400\ m^2$. **B.** $450\ m^2$. **C.** $225\ m^2$. **D.** $550\ m^2$.

B. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 17: (3,0 điểm).

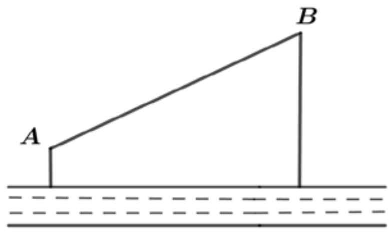
a) Cho $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2018$ với a,b,c đôi một khác nhau và khác không. Tính giá trị của biểu thức $c^2(a+b)$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=91$ và $b^2=ca$.

Câu 18: (3,5 điểm).

a) Giải phương trình $x^2+2x-\sqrt{x^2+2x+2}=0$.

b) Hai vị trí A và B cách nhau $615\,m$ và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A,B đến bờ sông lần lượt là $118\,m$ và $487\,m$ (*tham khảo hình vẽ bên*). Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi được bằng bao nhiêu mét (*làm tròn đến đơn vị mét*).



Câu 19: (4,0 điểm).

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B,C là các tiếp điểm). Một cát tuyến thay đổi qua A cắt (O) tại D và E ($AD<AE$). Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ tại các điểm M và N.

a) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng bốn điểm M,E,N,I cùng thuộc một đường tròn (T).

b) Chứng minh rằng hai đường tròn (O) và (T) tiếp xúc nhau.

c) Chứng minh rằng đường thẳng IT luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 20: (1,5 điểm).

Chứng minh rằng $(a+b+c)\left[\dfrac{3a-b}{a^2+ab}+\dfrac{3b-c}{b^2+bc}+\dfrac{3c-a}{c^2+ca}\right]\le 9$ với a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

----------------- HẾT ------------------

LỜI GIẢI ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH PHÚ THỌ

NĂM HỌC 2017-2018

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8 điểm: Mỗi câu 0,5 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	C	B	C	B,D	A,B	B	A
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
	D	B	C	A	C	A	A	B

B. PHẦN TỰ LUẬN (12 điểm)

Câu 17: a) Ta có $a^2(b+c)=b^2(c+a) \Leftrightarrow \dfrac{a}{bc+ab}=\dfrac{b}{ab+ca}=\dfrac{a-b}{c(b-a)}=-\dfrac{1}{c}.$

Suy ra $ab+bc+ca=0 \Leftrightarrow bc=-a(b+c) \Leftrightarrow -abc=a^2(b+c)=2018.(1)$

$ab+bc+ca=0 \Leftrightarrow ab=-c(a+b) \Leftrightarrow -abc=c^2(a+b).(2)$

Từ (1) và (2) ta được $c^2(a+b)=2018.$

b) Đặt $b=qa; c=q^2a\,(q>1)$ thì ta được $\mathrm{a}(1+q+q^2)=91=13.7.$

Trường hợp 1: Nếu q là số tự nhiên thì ta được

$$\begin{cases} a=1 \\ 1+q+q^2=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ q=9 \end{cases} \Rightarrow a=1; b=9; c=81.$$

$$\begin{cases} a=7 \\ 1+q+q^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ q=3 \end{cases} \Rightarrow a=7; b=21; c=63.$$

$$\begin{cases} a=13 \\ 1+q+q^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=13 \\ q=2 \end{cases} \Rightarrow a=13; b=26; c=52.$$

Trường hợp 2: Nếu q là số hữu tỷ thì giả sử $q=\dfrac{x}{y}(x\ge 3; y\ge 2).$

Khi đó $\mathrm{a}(1+q+q^2)=91 \Leftrightarrow a(x^2+xy+y^2)=91y^2\ (x^2+xy+y^2\ge 19)$

Ta có $c=\dfrac{ax^2}{y^2}\in\mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{a}{y^2}\in\mathbb{N} \Rightarrow a=ty^2 \Rightarrow x^2+xy+y^2=91 \Rightarrow x=6; y=5.$

và $a=25; b=30; c=36.$

Vậy có 8 bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn $(1;9;81),(81;9;1),(7;21;63),(63;21;7);...$

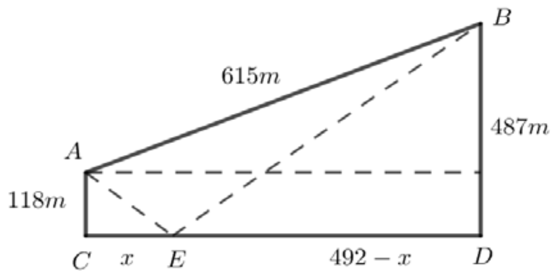
Câu 18: a) $x^2+2x-\sqrt{x^2+2x+2}=0 \Leftrightarrow (x^2+2x+2)-\sqrt{x^2+2x+2}-2=0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2x+2}=-1(L)\\ \sqrt{x^2+2x+2}=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+2=4 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{3}\\ x=-1+\sqrt{3}\end{array}\right..$$

b) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B lên bờ sông. Đặt $CE = x\left(0<x<492\right)$



Ta có $CD=\sqrt{615^2-\left(487-118\right)^2}=492.$

Quãng đường di chuyển của người đó bằng $AE+EB$

$=\sqrt{x^2+118^2}+\sqrt{\left(492-x\right)^2+487^2}$

Ta có với mọi a,b,c,d thì $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{\left(a+c\right)^2+\left(b+d\right)^2}$ (1).

Thật vậy $(1)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}\ge\left(a+c\right)^2+\left(b+d\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}\ge ac+bd$ (2)

Nếu $ac+bd<0$ thì (2) luôn đúng. Nếu $ac+bd\ge 0$ bình phương hai vế ta được

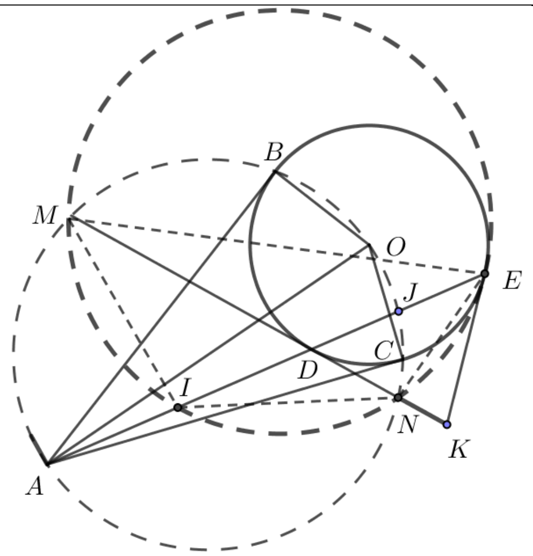
(2) trở thành $\left(ad-bc\right)^2\ge 0.$ Dấu đẳng thức sảy ra khi $ad=bc.$

Áp dụng (1) thì $AE+EB\ge\sqrt{\left(x+492-x\right)^2+\left(487+118\right)^2}=\sqrt{608089}\approx 779{,}8m$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $487x=118\left(492-x\right)\Leftrightarrow x\approx 96m$

Vậy quãng đường nhỏ nhất là 780 m

Câu 19:



a) Ta có $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^o$ nên tứ giác $ABON$ nội tiếp

Gọi J là giao điểm của AD với đường tròn $(ABOC)$.Suy ra ΔDMA đồng dạng ΔDNJ

Suy ra $DM.DN = DA.DJ$

Mà $DA = 2DI; DJ = \dfrac{1}{2}DE.$

Nên $DM.DN = DI.DE \Rightarrow \Delta DMI$ đồng dạng ΔDEN

Vậy tứ giác $MINE$ nội tiếp hay có đpcm.

b) Dễ thấy khi $MN \perp OA$ thì (O) và (T) tiếp xúc nhau tại E.

Khi MN không vuông góc OA. Gọi K là giao điểm của MN với tiếp tuyến của (O) tại E.

Ta có O, J, K thẳng hàng

Trong tam giác $OEK : KJ.KO = KE^2$ (1) (Định lý hình chiếu)

Trên đường tròn $(ABOC)$ ta có $KJ.KO = KN.KM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $KE^2 = KN.KM$ nên KE tiếp xúc (T)

c) Ta có $\widehat{OED}=\widehat{ODE}=\widehat{TIE}$

Nên $IT//OD$. Gọi $W = OA \cap IT$.

Vì I là trung điểm của AD nên W là trung điểm OA (đpcm)

Khi $MN \perp OA$ thì $W \in IT$.

Câu 20: Giả sử $a+b+c=t$ và đặt $a=tx; b=ty; c=tz \Rightarrow x+y+z=1$.

Ta chứng minh $t(x+y+z)\left[\frac{t(3x-y)}{t^2(x^2+xy)}+\frac{t(3y-z)}{t^2(y^2+yz)}+\frac{t(3z-x)}{t^2(z^2+zx)}\right]\le 9$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-y}{x^2+xy}+\frac{3y-z}{y^2+yz}+\frac{3z-x}{z^2+zx}\le 9.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-(x+y)}{x(x+y)}+\frac{4y-(y+z)}{y(y+z)}+\frac{4z-(z+x)}{z(z+x)}\le 9 \Leftrightarrow \frac{4}{1-z}-\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{1-y}-\frac{1}{z}\le 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2}+\frac{5y-1}{y-y^2}+\frac{5y-1}{z-z^2}\le 9$$

Vì a,b,c là ba cạnh của một tam giác nên $a+b>c\Rightarrow x,y,z\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có:

$\frac{5x-1}{x-x^2}\le 18x-3\Leftrightarrow (3x-1)^2(2x-1)\le 0$ đúng $\forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$\frac{5y-1}{y-y^2}\le 18y-3\Leftrightarrow (3y-1)^2(2y-1)\le 0$ đúng $\forall y\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$\frac{5z-1}{z-z^2}\le 18z-3\Leftrightarrow (3z-1)^2(2z-1)\le 0$ đúng $\forall z\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Suy ra $\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2}+\frac{5y-1}{y-y^2}+\frac{5y-1}{z-z^2}\le 18(x+y+z)-9\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2}+\frac{5y-1}{y-y^2}+\frac{5y-1}{z-z^2}\le 9$

------- Hết------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LẠNG SƠN	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 - 2018**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn thi: Toán 9 THCS** Thời gian: **150** phút (*không kể thời gian giao đề*) Ngày thi: **05/4/2018** *(Đề thi gồm 01 trang, 05 câu)*

Câu 1: Cho biểu thức: $A=\frac{x\sqrt{x}-x-4\sqrt{x}+4}{2-3\sqrt{x}+x\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}-4}{2+3\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$ với $x\ge 0$, $x\ne 1$, $x\ne 4$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-1}$.

Lời giải

a) $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)^2}+\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{2x-4}{x-1}$.

b) $x=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

Vậy $A=\dfrac{2x-4}{x-1}=2-\sqrt{2}$.

Câu 2: Cho phương trình: $x^2-2mx+2m-1=0$.

a) Chứng minh phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$B=\frac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(1+x_1x_2\right)}.$$

Lời giải

a) PT có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0 \Leftrightarrow m^2-2m+1\ge 0 \Leftrightarrow \left(m-1\right)^2\ge 0,\ \forall m$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=2m-1 \end{cases}$.

$\Rightarrow B=\dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(1+x_1x_2\right)}=\dfrac{2x_1x_2+3}{(x_1+x_2)^2+2}=\dfrac{2(2m-1)+3}{4m^2+2}=\dfrac{4m+1}{4m^2+2}$.

Có $B=\dfrac{4m+1}{4m^2+2}=\dfrac{2\left(m^2+2m+1\right)-2m^2-1}{4m^2+2}=\dfrac{\left(m+1\right)^2}{2m^2+1}-\dfrac{1}{2}$.

Vì $\left(m+1\right)^2\ge 0 \Rightarrow \dfrac{(m+1)^2}{2m^2+1}\ge 0 \Rightarrow B\ge -\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\min B=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m=-1$.

Câu 3: a) Giải phương trình: $x^2-4x+1+\sqrt{3x-1}=0$

b) Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(2017).f(2018)=2019$. Chứng minh phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

a) Điều kiện $x\geq\frac{1}{3}$.

Pt $\Leftrightarrow x^2-(3x-1)-x+\sqrt{3x-1}=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3x-1}\right)\left(x-1+\sqrt{3x-1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{3x-1}=0 \\ x-1+\sqrt{3x-1}=0 \end{array}\right..$$

Với $x-\sqrt{3x-1}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3x-1} \Leftrightarrow x^2=3x-1$ (do $x\geq\frac{1}{3}$)

$\Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn).

Với $x-1+\sqrt{3x-1}=0 \Leftrightarrow 1-x=\sqrt{3x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ (1-x)^2=3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-5x+2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$, $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

b) Giả sử phương trình $f(x)=0$ có nghiệm nguyên $x=\alpha$.

Suy ra $f(x)=(x-\alpha).g(x)$ với $g(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên.

Ta có: $f(2017)=(2017-\alpha)g(2017)$; $f(2018)=(2018-\alpha)g(2018)$.

Suy ra $f(2017).f(2018)=(2017-\alpha).(2018-\alpha).g(2017).g(2018)=2019$.

Do $2017-\alpha$; $2018-\alpha$ là hai số nguyên liên tiếp nên $f(2017).f(2018)$ là số nguyên chẵn.

Mà 2019 là số nguyên lẻ suy ra vô lí.

Vậy phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên.

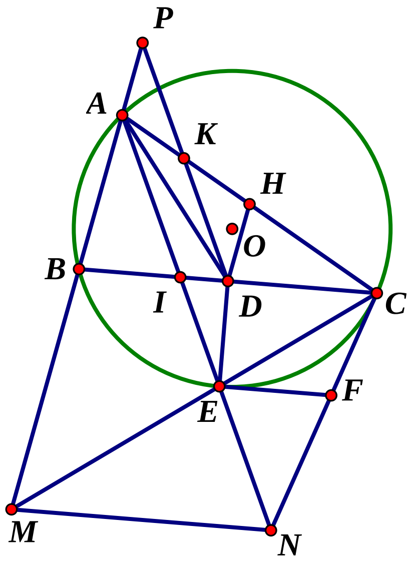
Câu 4: Cho tam giác nhọn ABC có $AC > AB$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ phân giác trong AI của tam giác ABC $(I \in BC)$ cắt (O) ở E. Tại E và C kẻ hai tiếp tuyến với (O) cắt nhau ở F, AE cắt CF tại N, AB cắt CE tại M.

a) Chứng minh tứ giác $AMNC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\dfrac{1}{CN}+\dfrac{1}{CI}=\dfrac{1}{CF}$.

c) Gọi AD là trung tuyến của tam giác ABC, kẻ $DK // AI$ $(K \in AC)$. Chứng minh $2AK = AC - AB$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ANC}=\dfrac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{AC}-sđ\,\overset{\frown}{EC}\right)$ (1); $\widehat{AMC}=\dfrac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{AC}-sđ\,\overset{\frown}{EB}\right)$ (2).

Mà $sđ\,\overset{\frown}{EB}=sđ\,\overset{\frown}{EC}$ (Do $\widehat{CAE}=\widehat{BAE}$) (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{ANC}=\widehat{AMC} \Rightarrow CAMN$ nội tiếp đường tròn.

b) Theo a) ta được $\widehat{NMC}=\widehat{CAN}=\widehat{NAM}=\widehat{NCM}=\widehat{FEC} \Rightarrow EF // MN$

và $MN = CN$, $FE = FC$ (4).

Lại có $\widehat{NCM}=\widehat{CBE}=\widehat{NMC} \Rightarrow MNCI$ là hình thang

$\Rightarrow CI // MN \Rightarrow CI // MN // FE$ nên ta có: $\dfrac{EF}{CI}+\dfrac{EF}{MN}=\dfrac{NF}{NC}+\dfrac{CF}{CN}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{CI}+\dfrac{1}{MN}=\dfrac{1}{EF}$ (5)

.

Từ (4) và (5) ta được $\dfrac{1}{CN}+\dfrac{1}{CI}=\dfrac{1}{CF}$.

c) Dựng $DH//AB\left(H\in AC\right)\Rightarrow DH=\dfrac{1}{2}AB\ (6);\ AH=\dfrac{1}{2}AC\ (7)$.

Lại có $AK=AH-HK\ (8)$. Gọi P là giao điểm của DK và AB.

Do $\widehat{CKD}=\widehat{CAI}=\widehat{BAI}=\widehat{BPD}=\widehat{HDK}\Rightarrow HK=HD\ (9)$.

Từ (6), (7), (8) và (9) $\Rightarrow AK=\dfrac{1}{2}AC-\dfrac{1}{2}AB$ hay $2AK=AC-AB$.

Câu 5: Trường trung học phổ thông A tổ chức giải bóng đá cho học sinh nhân kỷ niệm ngày thành lập đoàn $26-3$. Biết rằng có n đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ đấu với nhau đúng một trận). Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không được điểm nào. Kết thúc giải, ban tổ chức nhận thấy số trận thắng – thua gấp bốn lần số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 336. Hỏi có tất cả bao nhiêu đội bóng tham gia?

Lời giải

Từ cách tính điểm ta nhận thấy sau mỗi trận đấu tổng số điểm hai đội có được là 3 nếu là trận thắng – thua và là 2 nếu là trận hòa. Vì số trận thắng – thua gấp 4 lần số trận hòa nên tổng số điểm trận thắng – thua gấp 6 lần tổng số điểm trận hòa.

Do đó tổng số điểm các trận hòa là: $336:\left(6+1\right)=48$ (điểm).

Số trận hòa là: $48:2=24$ (trận) $\Rightarrow$ số trận thắng – thua là: $24.4=96$ (trận).

Vậy tổng số trận đấu của giải đấu là: $24+96=120$ (trận).

Một đội đấu với $\left(n-1\right)$ đội còn lại có $\left(n-1\right)$ (trận).

Vì có n đội tham gia và 2 đội bất kỳ gặp nhau đúng 1 lần nên tổng số trận đấu là $\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$.

Ta có phương trình: $\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}=120\Leftrightarrow n^2-n-240=0\Rightarrow n=16$.

Vậy có tất cả 16 đội tham gia.

---------------------**Hết**---------------------

STT 27. ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH VĨNH PHÚC NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Trần Văn Quảng

Người phản biện: Tạ Thị Huyền Trang

Câu 25: Rút gọn biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a}+2018}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2018}{a-1}\right)\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$.

Câu 26: Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2, \sqrt{x}+\sqrt{y}\neq\sqrt{z}$ và $y\neq z$. Chứng minh đẳng thức $\dfrac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}$.

Câu 27: Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$.

Câu 28: Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ x+2y=2\end{cases}$ (m là tham số và x,y là ẩn số)

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm (x,y) trong đó x,y là các số nguyên.

Câu 29: Giải phương trình $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=3$.

Câu 30: Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB=12cm, AC=16cm$. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng đường thẳng BI vuông góc với đường thẳng MI.

Câu 31: Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{BAD}=50^0$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M (điểm M không trùng với điểm B), trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho đường thẳng HM song song với đường thẳng AN.

a) Chứng minh rằng: $MB.DN=BH.AD$

b) Tính số đo góc $\widehat{MON}$

Câu 32: Cho đường tròn (O) cố định và hai điểm phân biệt B, C cố định thuộc đường tròn (O). Gọi A là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) (điểm A không trùng với điểm B và C), M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Từ điểm M kẻ đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB, đường thẳng (d) cắt đường thẳng AB tại điểm H. Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi trên đường tròn (O) thì điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Câu 33: Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\le 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le\frac{2}{3}.$$

Câu 34: Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

1) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

2) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\dfrac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong 2018 đường thẳng đó có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

STT 27. LỜI GIẢI ĐỀ THI HSG TỈNH VĨNH PHÚC NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Trần Văn Quảng

Câu 1: Rút gọn biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a}+2018}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2018}{a-1}\right)\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1\end{cases}$

Khi đó: $P=\left[\dfrac{\sqrt{a}+2018}{(\sqrt{a}+1)^2}-\dfrac{\sqrt{a}-2018}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right]\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$

$=\dfrac{(\sqrt{a}+2018)(\sqrt{a}-1)-(\sqrt{a}-2018)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$

$=\dfrac{2.2017\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{2017}{a-1}$

Câu 2: Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2, \sqrt{x}+\sqrt{y}\neq\sqrt{z}$ và $y\neq z$. Chứng minh đẳng thức $\dfrac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2-y+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2-x+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-2\sqrt{z}\right)}{\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-2\sqrt{z}\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}$.

Câu 3: Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$.

Lời giải

Ta có: $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321 \Leftrightarrow 1111a+111b+11c+d=4321 \quad (1)$

Vì $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ và $1\le a\le 9, 0\le b,c,d\le 9$ nên $3214\le 1111a\le 4321$

$\Rightarrow a=3$. Thay vào (1) ta được: $111b+11c+d=988 \quad (2)$

Lập luận tương tự ta có: $880\le 111b\le 988\Rightarrow b=8$. Thay vào (2) ta được: $11c+d=100$

Mà $91\le 11c\le 100 \Rightarrow c=9$ và $d=1$.

Câu 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ x+2y=2\end{cases}$ (m là tham số và x,y là ẩn số)

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm (x,y) trong đó x,y là các số nguyên.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai ta có: $x=2-2y$ thế vào phương trình thứ nhất được:

$(m-1)(2-2y)+y=2$

$\Leftrightarrow (2m-3)y=2m-4$ (3)

Hệ có nghiệm x,y là các số nguyên $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm y là số nguyên.

Với $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2m-3\neq 0\Rightarrow (3)$ có nghiệm $y=\dfrac{2m-4}{2m-3}=1-\dfrac{1}{2m-3}$

$y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m-3=1\\2m-3=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\m=1\end{array}\right.$. Vậy có 2 giá trị m thoả mãn là 1; 2.

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=3.$

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases}1-x\geq 0\\4+x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -4\leq x\leq 1 \quad (*)$

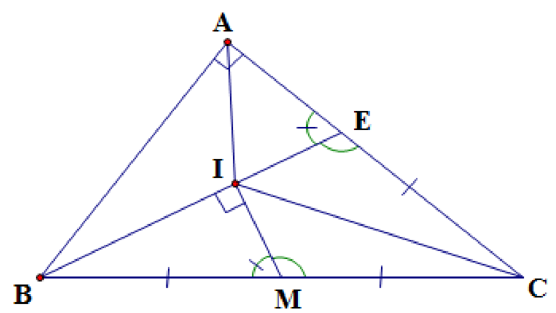
Với điều kiện (*), phương trình đã cho tương đương với:

$5+2\sqrt{1-x}.\sqrt{4+x}=9\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(4+x)}=2\Leftrightarrow (1-x)(4+x)=4\Leftrightarrow x^2+3x=0$

$\Leftrightarrow x(x+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\end{array}\right.$. Đối chiếu với điều kiện (*) ta được $x=0;\ x=-3.$

Câu 6: Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB=12cm, AC=16cm.$ Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng đường thẳng BI vuông góc với đường thẳng MI.

Lời giải



Ta có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=20cm$. Gọi E là giao điểm của BI với AC.

Theo tính chất đường phân giác ta có: $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{EC}{BC}=\dfrac{AE+EC}{AB+BC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow EC=\dfrac{BC}{2}=10cm$

Ta có $\Delta ICE=\Delta ICM(c-g-c)$ do: $EC=MC=10$; $\widehat{ICE}=\widehat{ICM}$; IC chung.

Suy ra: $\widehat{IEC}=\widehat{IMC}\Rightarrow \widehat{IEA}=\widehat{IMB}$

Mặt khác $\widehat{IBM}=\widehat{IBA}\Rightarrow$ hai tam giác IBM, ABE đồng dạng

$\Rightarrow \widehat{BIM}=\widehat{BAE}=90^0\Rightarrow BI\perp MI$

Câu 7: Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{BAD}=50^0$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M (điểm M không trùng với điểm B), trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho đường thẳng HM song song với đường thẳng AN.

a) Chứng minh rằng: $MB.DN=BH.AD$

b) Tính số đo góc $\widehat{MON}$

Lời giải

a) Ta có $\widehat{MBH}=\widehat{ADN}, \widehat{MHB}=\widehat{AND}$

$\Delta MBH \backsim \Delta ADN \Rightarrow \dfrac{MB}{AD}=\dfrac{BH}{DN} \Rightarrow MB.DN=BH.AD \quad (1)$

b) Ta có: $\Delta OHB \backsim \Delta AOD \Rightarrow \dfrac{BH}{DO}=\dfrac{OB}{AD} \Rightarrow DO.OB=BH.AD\ (2)$

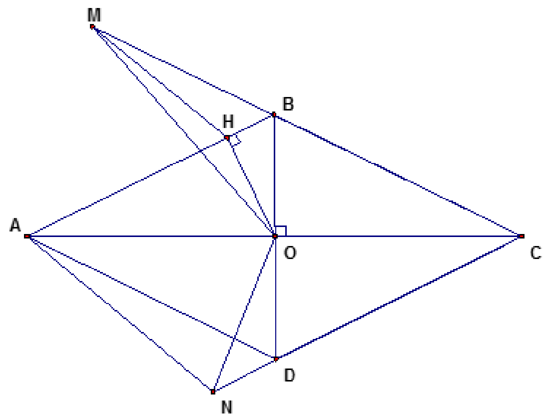
Từ (1) và (2) ta có: $MB.DN=DO.OB \Rightarrow \dfrac{MB}{DO}=\dfrac{OB}{DN}$

Ta lại có: $\widehat{MBO}=180^0-\widehat{CBD}=180^0-\widehat{CDB}=\widehat{ODN}$

nên $\Delta MBO \backsim \Delta ODN \Rightarrow \widehat{OMB}=\widehat{NOD}$.

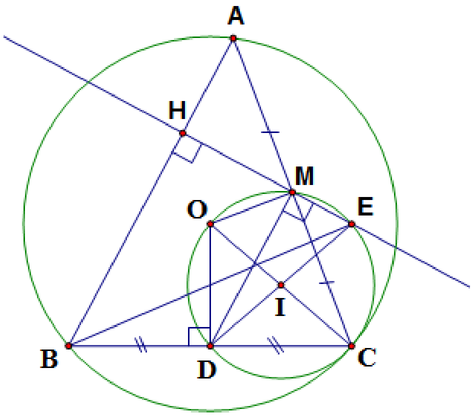
Từ đó suy ra: $\widehat{MON}=180^0-\left(\widehat{MOB}+\widehat{NOD}\right)=180^0-\left(\widehat{MOB}+\widehat{OMB}\right)$

$=180^0-\widehat{OBC}=115^0$



Câu 8: Cho đường tròn (O) cố định và hai điểm phân biệt B, C cố định thuộc đường tròn (O). Gọi A là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) (điểm A không trùng với điểm B và C), M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Từ điểm M kẻ đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB, đường thẳng (d) cắt đường thẳng AB tại điểm H. Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi trên đường tròn (O) thì điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Lời giải



Gọi D là trung điểm của đoạn BC, vì tam giác BOC, AOC là các tam giác cân tại O nên $OD \perp BC, OM \perp AC$.

Ta có: $\widehat{ODC} = \widehat{OMC} = 90^0 \Rightarrow$ Bốn điểm O, D, C, M cùng nằm trên đường tròn (I) có tâm I cố định, đường kính OC cố định.

Gọi E là điểm đối xứng với D qua tâm I, khi đó E cố định và DE là đường kính của đường tròn (I).

Nếu $H \neq E, H \neq B$:

- Với $M \equiv E \Rightarrow \widehat{BHE} = 90^0$

- Với $M \neq E$, do $DM \,//\, BH \Rightarrow \widehat{DMH} = 90^0$. Khi đó $\widehat{DME} = \widehat{DMH} = 90^0 \Rightarrow H, M, E$ thẳng hàng. Suy ra $\widehat{BHE} = 90^0$

Vậy ta luôn có: $\widehat{BHE} = 90^0$ hoặc $H \equiv E$ hoặc $H \equiv B$ do đó H thuộc đường tròn đường kính BE cố định.

Câu 9: Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \le \frac{2}{3}.$$

Lời giải

Với $\forall x,y,z > 0$ ta có : $x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

$\Rightarrow (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge 9 \Rightarrow \frac{1}{x + y + z} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$

Ta có: $5a^2 + 2ab + 2b^2 = (2a + b)^2 + (a - b)^2 \ge (2a + b)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \le \frac{1}{2a + b} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$

Tương tự: $\frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \le \frac{1}{2b + c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ Đẳng thức xảy ra khi $b = c$

$\frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \le \frac{1}{2c + a} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$ Đẳng thức xảy ra khi $c = a$

Do đó:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le\frac{1}{9}\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}\right)$$

$$\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le\frac{2}{3}$$

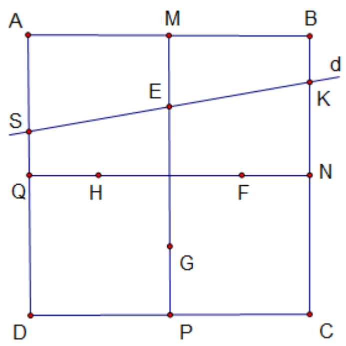
Đẳng thức xảy rakhi $a=b=c=\frac{3}{2}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 10: Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:
1) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

2) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong 2018 đường thẳng đó có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

Lời giải



Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh là a ($a>0$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi d là một đường thẳng bất kỳ trong 2018 đường thẳng đã cho thỏa
mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát, giả sử d cắt các đoạn thẳng AD, MP, BC lần lượt tại S, E, K sao cho $S_{CDSK}=3S_{ABKS}$

Từ $S_{CDSK}=3S_{ABKS}$ ta suy ra được: $DS+CK=3(AS+BK)$

$$\Leftrightarrow a-AS+a-BK=3(AS+BK)\Leftrightarrow AS+BK=\frac{1}{2}a$$

$\Leftrightarrow EM=\frac{1}{4}a$ suy ra E cố định và d đi qua E.

Lấy F, H trên đoạn NQ và G trên đoạn MP sao cho $FN=GP=HQ=\frac{a}{4}$.

Lập luận tương tự như trên ta có các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong bốn điểm cố định E, F, G, H.

Theo nguyên lý Dirichlet từ 2018 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải có ít nhất $\left[\frac{2018}{4}\right]+1=505$ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm E, F, G, Hcố định, nghĩa là 505 đường thẳng đó đồng quy.

Hết.

STT 28. ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH KIÊN GIANG NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Tạ Thị Huyền Trang

Người phản biện: Nguyễn Dương

Câu 1. (3 điểm)

1) Cho biểu thức $A=n^2+4n+5$ (n là số tự nhiên lẻ). Chứng minh rằng A không chia hết cho 8.

2) Cho số x $(x\in\mathbb{R}; x>0)$ thỏa mãn điều kiện: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị các biểu thức: $B=x^5+\dfrac{1}{x^5}$.

Câu 2. (3 điểm)

Rút gọn biểu thức:

$$X=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}.$$

Câu 3. (4 điểm)

1) Giải phương trình: $3x+2\sqrt{27x^3+8}=9x^2+6$.

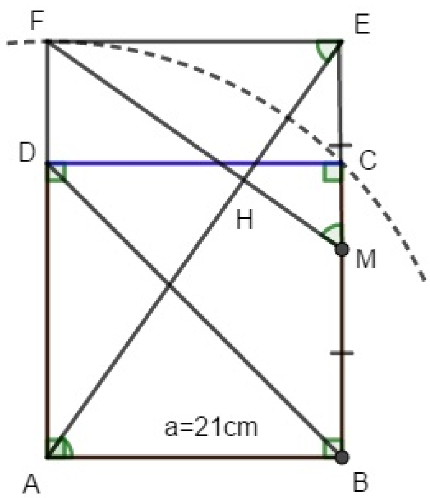
2) Tìm 2 số m, n cùng dấu thỏa mãn điều kiện: $|m|+2|n|$ đạt giá trị nhỏ nhất sao cho hai phương trình sau có nghiệm chung: $x^2+mx+2=0$; $x^2+2nx+6=0$.

Câu 4. (3 điểm)

1) Cho phương trình: $x^2+2(m-3)x-m-3=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

2) Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+t}+\dfrac{z}{t+x}+\dfrac{t}{x+y}\ge 2$.

Câu 5. (3,5 điểm) Để có được tờ giấy khổ A4 (kích thước xấp xỉ $21\,\text{cm}\times 29,7\,\text{cm}$) người ta thực hiện như hình vẽ minh họa bên.



Bước 1: Tạo ra hình vuông $ABCD$ cạnh $a=21\,\text{cm}$.

Bước 2: Vẽ cung tròn tâm A bán kính AC cắt tia AD tại F.

Bước 3: Tạo hình chữ nhật $ABEF$.

Khi đó hình chữ nhật $ABEF$ chính là tờ giấy A4 thông dụng hiện nay.

Bạn An ngồi nghịch xếp tờ giấy A4 này theo đường thẳng AE, rồi xếp theo đường thẳng FM (M là trung điểm BE) khi mở tờ giấy ra. An ngạc nhiên thấy hai đường thẳng FM và AE vuông góc với nhau. Em hãy chứng minh giúp bạn An vẽ điều đó.

Câu 6. (4 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, trên dây cung DC lấy điểm E sao cho $DC = 3DE$, nối AE cắt cung nhỏ CD tại M. Trên cung nhỏ CB lấy điểm N sao cho cung nhỏ DM bằng cung nhỏ CN, nối AN cắt dây cung BC tại F. Chứng minh rằng: F là trung điểm của BC.

---------------------HẾT------------------

STT 28. LỜI GIẢI ĐỀ THI HSG TỈNH KIÊN GIANG NĂM HỌC 2017-2018

Người giải đề: Tạ Thị Huyền Trang

Câu 1. (3 điểm)

1) Cho biểu thức $A = n^2 + 4n + 5$ (n là số tự nhiên lẻ). Chứng minh rằng A không chia hết cho 8.

2) Cho số x $(x \in \mathbb{R}; x > 0)$ thỏa mãn điều kiện: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị các biểu thức: $B = x^5 + \dfrac{1}{x^5}$.

Lời giải

1) Ta có: $n^2 + 4n + 5 = n^2 - 1 + 4n + 6$

$$= (n-1)(n+1) + 2(2n+3).$$

Do n lẻ nên $n-1$ và $n+1$ là 2 số chẵn liên tiếp.

$\Rightarrow (n-1)(n+1)$ chia hết cho 8.

Mà $2n+3$ lẻ $\Rightarrow$ $2n+3$ không chia hết cho 4.

$\Rightarrow$ $2(2n+3)$ không chia hết cho 8.

$\Rightarrow (n-1)(n+1) + 2(2n+3)$ không chia hết cho 8.

$\Rightarrow$ đpcm.

2) Ta có: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$ $\Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = 3$ (do $x > 0$).

$\Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 = 27$ $\Leftrightarrow x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 27$

$\Leftrightarrow x^3+\dfrac{1}{x^3}=18$

$\Rightarrow\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)=18.7=126$

$\Leftrightarrow x^5+\dfrac{1}{x^5}+x+\dfrac{1}{x}=126$

$\Rightarrow x^5+\dfrac{1}{x^5}=123$.

Câu 2. (3 điểm)

Rút gọn biểu thức:

$$X=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}.$$

Lời giải

❖ Tổng quát: $\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\dfrac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{[n(n+1)]^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{[n(n+1)]^2+2n(n+1)+1}{[n(n+1)]^2}}=\sqrt{\dfrac{[n(n+1)+1]^2}{[n(n+1)]^2}}$

$=\dfrac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{n(n+1)}+\dfrac{1}{n(n+1)}=1+\dfrac{1}{n(n+1)}$

❖ Vậy:

$$X=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}$$

$$=\underbrace{1+\frac{1}{1.2}+1+\frac{1}{2.3}+1+\frac{1}{3.4}+....+1+\frac{1}{2017.2018}}_{2017\ \text{số } 1}$$

$$=2017+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}=2018-\frac{1}{2018}=\frac{4072323}{2018}.$$

❖ Vậy

$$X=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}=\frac{4072323}{2018}.$$

Câu 3. (4 điểm)

1) Giải phương trình: $3x+2\sqrt{27x^3+8}=9x^2+6$.

2) Tìm 2 số m, n cùng dấu thỏa mãn điều kiện: $|m|+2|n|$ đạt giá trị nhỏ nhất sao cho hai phương trình sau có nghiệm chung: $x^2+mx+2=0$; $x^2+2nx+6=0$.

Lời giải

1) $3x+2\sqrt{27x^3+8}=9x^2+6$

$\Leftrightarrow 3x+2\sqrt{(3x+2)(9x^2-6x+4)}=9x^2+6$ (Điều kiện $x \geq \frac{-2}{3}$)

$\Leftrightarrow 9x^2+6-2\sqrt{(3x-2)(9x^2-6x+4)}-3x=0$

$\Leftrightarrow 9x^2-6x+4-2\sqrt{(3x+2)(9x^2-6x+4)}+3x+2=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9x^2-6x+4}-\sqrt{3x+2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 9x^2-6x+4=3x+2$

$\Leftrightarrow 9x^2-9x+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là: $x \in \left\{\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right\}$.

2) Do m, n cùng dấu nên:

- Nếu $m>0$; $n>0$ thì: $|m|+2|n|=m+2n$.

- Nếu $m<0$; $n<0$ thì: $|m|+2|n|=-m-2n=-(m+2n)$.

+ Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình ta được:

$$\begin{cases} x_0^2+mx_0+2=0 \\ x_0^2+2nx_0+6=0 \end{cases} \text{ có nghiệm chung}$$

$\Rightarrow 2x_0^2+(m+2n)x_0+8=0$ có nghiệm x_0.

$\Rightarrow \Delta=(m+2n)^2-4.2.8 \geq 0$

$\Leftrightarrow (m+2n)^2 \geq 64$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2n \geq 8 \\ m+2n \leq -8 \end{array}\right.$

$\Rightarrow |m|+2|n| \geq 8$

Vậy $|m|+2|n|$ đạt GTNN là 8 khi:

$\left[\begin{array}{l} m+2n=8 \\ m+2n=-8 \end{array}\right.$

+ TH1: $m+2n=8$, ta được: $2x_0^2+8x_0+8=0 \Leftrightarrow x_0^2+4x_0+4=0 \Leftrightarrow x_0=-2$. Ta có:

$\begin{cases} (-2)^2+m(-2)+2=0 \\ (-2)^2+2n(-2)+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=\frac{5}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn)

+ TH2: $m+2n=-8$, ta được: $2x_0^2-8x_0+8=0 \Leftrightarrow 2(x_0-2)^2=0 \Leftrightarrow x_0=2$. Ta có:

$\begin{cases}2^2+m.2+2=0\\2^2+2n.2+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\n=\dfrac{-5}{2}\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy với $m=3$ và $n=\dfrac{5}{2}$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x_0=-2$.

Với $m=-3$ và $n=\dfrac{-5}{2}$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x_0=2$.

Câu 4. (3 điểm)

1) Cho phương trình: $x^2+2(m-3)x-m-3=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

2) Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+t}+\dfrac{z}{t+x}+\dfrac{t}{x+y}\geq 2$.

Lời giải

1) Xét phương trình: $x^2+2(m-3)x-m-3=0$

Giả sử: $x_1<2<x_2$

Áp dụng Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1.x_2=-m-3\\x_1+x_2=-2(m-3)\end{cases}$

Để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2 thì:

$\begin{cases}\Delta'>0\\(x_1-2)(x_2-2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-3)^2+m+3>0\\x_1.x_2-2(x_1+x_2)+4<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m+9+m+3>0\\-m-3-2(-2(m-3))+4<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-5m+12>0\\3m-11<0\end{cases}$

$\Rightarrow m<\dfrac{11}{3}$ (do $m^2-5m+12$ luôn lớn hơn 0).

Vậy với $m<\dfrac{11}{3}$ thì phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

2) Đặt:

$A=\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+t}+\dfrac{z}{t+x}+\dfrac{t}{x+y}$

$M=\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{z+t}+\dfrac{t}{t+x}$

$N=\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{z}{y+z}+\dfrac{t}{z+t}+\dfrac{x}{t+x}$

$$\Rightarrow M+N=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+t}+\frac{t}{t+x}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{t}{z+t}+\frac{x}{t+x}=4.$$

Ta có:

$$N+A=\frac{y+t}{x+y}+\frac{x+z}{y+z}+\frac{y+t}{z+t}+\frac{x+z}{t+x}$$

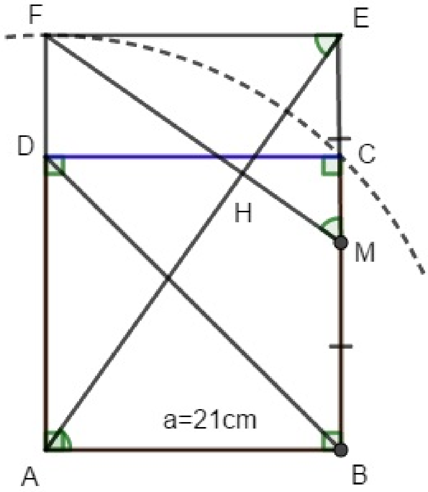
$$=(y+t)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+t}\right)+(x+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{t+x}\right)\ge\frac{4(y+t)}{x+y+z+t}+\frac{4(x+z)}{x+y+z+t}=4.$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $A+M\ge 4$.

$\Rightarrow A+M+A+N\ge 8\Rightarrow A\ge 2.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t>0$.

Câu 5. (3,5 điểm) Để có được tờ giấy khổ A4 (kích thước xấp xỉ $21\,\text{cm}\times 29,7\,\text{cm}$) người ta thực hiện như hình vẽ minh họa bên.



Bước 1: Tạo ra hình vuông $ABCD$ cạnh $a=21\,\text{cm}$.

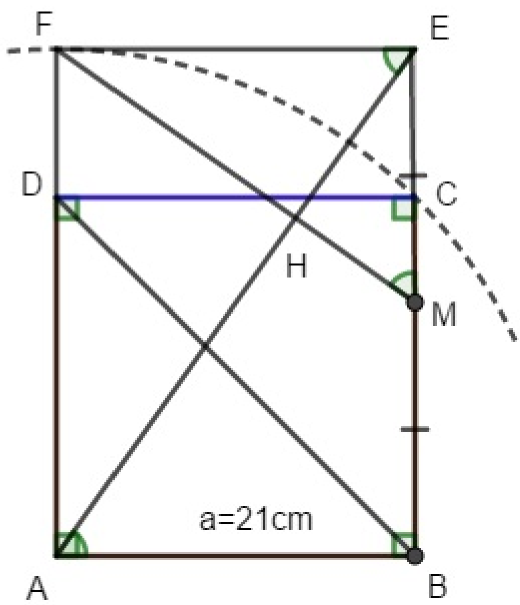
Bước 2: Vẽ cung tròn tâm A bán kính AC cắt tia AD tại F.

Bước 3: Tạo hình chữ nhật $ABEF$.

Khi đó hình chữ nhật $ABEF$ chính là tờ giấy A4 thông dụng hiện nay.

Bạn An ngồi nghịch xếp tờ giấy A4 này theo đường thẳng AE, rồi xếp theo đường thẳng FM (M là trung điểm BE) khi mở tờ giấy ra. An ngạc nhiên thấy hai đường thẳng FM và AE vuông góc với nhau. Em hãy chứng minh giúp bạn An về điều đó.

Lời giải



Ta có: $AC = DB = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 21\sqrt{2}$ (cm).

Mà $AC = AF$ (C, F thuộc đường tròn tâm A)

$\Rightarrow AF = AC = 21\sqrt{2} = EB$.

Xét ΔABE vuông tại B.

Áp dụng định lý Pi – ta – go ta có:

$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{21^2 + \left(21\sqrt{2}\right)^2} = 21\sqrt{3}$$

Xét ΔFME vuông tại E có: $EM = \dfrac{1}{2}EB = \dfrac{21\sqrt{2}}{2}$

Áp dụng định lý Pi – ta – go ta có:

$$FM = \sqrt{FE^2 + ME^2} = \sqrt{21^2 + \left(\frac{21\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{21\sqrt{6}}{2}$$

Ta có: $\dfrac{AE}{EF} = \dfrac{21\sqrt{3}}{21} = \sqrt{3}$; $\dfrac{FM}{ME} = \dfrac{\frac{21\sqrt{6}}{2}}{21\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

Xét ΔAEF và ΔFME ta có:

$\widehat{AFE} = \widehat{FEM} = 90^\circ$

$\dfrac{AE}{EF} = \dfrac{FM}{ME}$

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta FME$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{FEA} = \widehat{FME}$

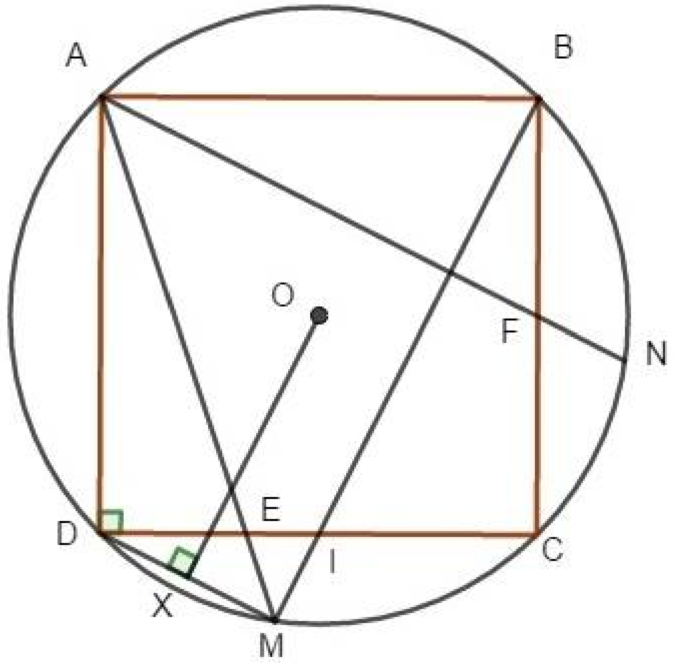
Mà $\widehat{FEA} + \widehat{HEM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FME} + \widehat{MEH} = 90^\circ$

$\Rightarrow FM \perp AE$ (đpcm).

Câu 6. (4 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, trên dây cung DC lấy điểm E sao cho $DC = 3DE$, nối AE cắt cung nhỏ CD tại M. Trên cung nhỏ CB lấy điểm N sao cho cung nhỏ DM bằng cung nhỏ CN, nối AN cắt dây cung BC tại F. Chứng minh rằng: F là trung điểm của BC.

Lời giải



Gọi I là giao điểm BM và CD:

$EI \parallel AB \Rightarrow \frac{EI}{AB} = \frac{ME}{AM}$

Kẻ OX vuông góc với DM $\Rightarrow \Delta OXD \backsim \Delta ADE$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{DX}{OD} = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{\sqrt{DE^2 + AD^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow DX = \frac{1}{\sqrt{10}}R$

$\Rightarrow DM = \frac{2}{\sqrt{10}}R$

Xét $\Delta DEM \backsim \Delta AEC$ $\Rightarrow \frac{ME}{CE} = \frac{DE}{AE} = \frac{MD}{AC}$

$\Rightarrow \frac{ME}{AE}.\frac{DE}{CE} = \frac{MD^2}{AC^2} = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{ME}{AM} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow EI = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6}CD \Rightarrow ID = EI + DE = \frac{1}{2}CD$.

$\Rightarrow \Delta CMI = \Delta BNF$ (g.c.g)

$\Rightarrow BF = CI = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow$ đpcm.

Hết.