

## Môc lôc

### Môc Trang

|     |                                                                          |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.  | PhÇn mẽ ®Çu                                                              | 2  |
| 2.  | Néi dung s,ng kiÕn kinh nghiÕm                                           | 3  |
| 2.1 | Ap dông quy t <sup>3/4</sup> c ®Õm chøng minh<br>c«ng thøc Van- §ec- Mon | 3  |
| 2.2 | Ap dông quy t <sup>3/4</sup> c ®Õm ®Ó tÝnh tæng                          | 3  |
| 2.3 | KÕt hîp cÊp sè céng vµ c«ng thøc Van-§ec-Mon<br>®Ó tÝnh tæng             | 14 |
| 2.4 | C, c bµi tËp ®Ò nghÞ                                                     | 15 |
| 3.  | KÕt luËn                                                                 | 16 |
| 4.  | Tµi liÖu tham kh¶o                                                       | 18 |

## 1.

## MỞ ĐẦU

### LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong chương trình Đại số và giải tích lớp 11 Đại số tổ hợp là phần kiến thức cơ sở hết sức quan trọng. Phần này không những có tác dụng rèn luyện tư duy trừu tượng cho học sinh mà còn là kiến thức cơ sở cho việc hình thành phẩm chất tư duy trong lĩnh vực khoa học kỹ thuật và kinh tế sau này.

Qua thực tế giảng dạy tôi thấy rằng: Học sinh gặp nhiều khó khăn, chưa chủ động và thiếu tự tin trong quá trình học Đại số tổ hợp. Đặc biệt học sinh gặp khó khăn nhất khi gặp những bài toán tính tổng. Loại toán này lại thường xuất hiện nhiều trong các đề thi học sinh giỏi và thi đại học. Để giúp học sinh chủ động và tự tin hơn trong quá trình học và làm bài tập về dạng toán này, tôi xin đề xuất một phương pháp tính tổng thông qua bài viết : ***“Áp dụng quy tắc đếm để giải bài toán tính tổng trong đại số tổ hợp”***.

### MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Nhằm giúp học sinh chủ động tự tin hơn trong khi giải bài toán tính tổng trong các kỳ thi tốt nghiệp THPT Quốc gia và thi học sinh giỏi các cấp.

Đây là phần kiến thức khó trong khi học sinh kỹ năng tư duy logic chưa tốt, nên cần phải có một phương pháp tính tổng để chuyển một bài toán khó thành một bài toán quen biết và dễ hơn. Và thông qua phương pháp này học sinh có thể tự ra đề toán và giải bài toán đó một cách chủ động.

### ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

Đối tượng nghiên cứu trong đề tài là học sinh lớp 11 qua các khóa trực tiếp giảng dạy.

Thông qua việc tìm mối quan hệ giữa một tổng cần tính với một bài toán Đếm và giải bài toán đó bằng hai cách mà trong đó có một cách làm xuất hiện tổng cần tính.

### PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Phương pháp nghiên cứu là xây dựng cơ sở lý thuyết, thống kê, tổng hợp ,khái quát hóa và đưa ra bài toán tổng quát.

## 2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

### 2.1 ÁP DỤNG QUY TẮC ĐẾM ĐỂ

#### CHỨNG MINH CÔNG THỨC VAN-ĐEC-MON

**Bài toán :** Một lớp học có  $n$  nam và  $m$  nữ. Có bao nhiêu cách chọn  $k$  học sinh vào đội cờ đỏ ( $k \leq n; k \leq m$ )

Giải bài toán này bằng hai cách.

Cách 1: Ta có  $C_{m+n}^k$  cách chọn

Cách 2:

TH1 : Chọn 0 bạn nam và  $k$  bạn nữ ta có  $C_n^0 C_m^k$  cách chọn

TH2 : Chọn 1 bạn nam và  $k-1$  bạn nữ ta có  $C_n^1 C_m^{k-1}$  cách chọn

TH3: Chọn 2 bạn nam và  $k-2$  bạn nữ ta có  $C_n^2 C_m^{k-2}$  cách chọn

.....

TH $k$ : Chọn  $k$  bạn nam và 0 bạn nữ ta có  $C_n^k C_m^0$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có  $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \dots + C_n^k C_m^0$  cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có công thức Van Đéc Mon sau

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{m+n}^k$$

Áp dụng công thức Van- Đec-Mon cho trường hợp  $n = m = k$  ta có:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

### 2.2 ÁP DỤNG QUY TẮC ĐẾM ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN

#### TÍNH TỔNG

## Tính tổng sau

$$S_1 = C_n^1 C_m^{k-1} + 2C_n^2 C_m^{k-2} + 3C_n^3 C_m^{k-3} + \dots + kC_n^k C_m^0$$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách:

**Bài toán 1:** Một lớp học có  $n$  nam và  $m$  nữ. Có bao nhiêu cách chọn  $k$  học sinh vào đội cờ đỏ ( $k \leq n; k \leq m$ ) sao cho trong đó có một bạn nam làm đội trưởng

Cách 1: Ta có  $nC_{m+n-1}^{k-1}$  cách chọn

Cách 2:

TH1 : Chọn 1 bạn nam và có 1 cách chọn 1 nam để làm tổ trưởng và  $k-1$  bạn nữ ta có  $C_n^1 C_m^{k-1}$  cách chọn

TH2: Chọn 2 bạn nam và có 2 cách chọn 1 trong 2 nam để làm tổ trưởng và  $k-2$  bạn nữ ta có  $2C_n^2 C_m^{k-2}$  cách chọn

.....

TH $k$ -1: Chọn  $k$  bạn nam và có  $k$  cách chọn 1 trong  $k$  nam để làm tổ trưởng và 0 bạn nữ ta có  $kC_n^k C_m^0$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có  $C_n^1 C_m^{k-1} + 2C_n^2 C_m^{k-2} + \dots + kC_n^k C_m^0$  cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có  $S_1 = nC_{m+n-1}^{k-1}$

## Tính tổng sau

$$S_2 = C_i^i C_n^i C_m^{k-i} + C_{i+1}^i C_n^{i+1} C_m^{k-i-1} + C_{i+2}^i C_n^{i+2} C_m^{k-i-2} + \dots + C_k^i C_n^k C_m^0; (i \leq k)$$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách

**Bài toán 2 :** Một lớp học có  $n$  nam và  $m$  nữ. Có bao nhiêu cách chọn  $k$  học sinh vào đội cờ đỏ ( $k \leq n; k \leq m$ ) sao cho trong đó có  $i$  bạn nam làm quản lý. ( $i \leq k$ )

Cách 1: Ta có  $C_n^i C_{m+n-i}^{k-i}$  cách chọn

Cách 2:

TH1 : Chọn i bạn nam và có  $C_i^i$  cách chọn i nam để làm quản lý và k-i bạn nữ trong m bạn nữ , vậy ta có  $C_i^i C_n^i C_m^{k-i}$  cách chọn

TH2: Chọn i+1 bạn nam và có  $C_{i+1}^i$  cách chọn i nam để làm quản lý và k-i-1 bạn nữ trong m bạn nữ , vậy ta có  $C_{i+1}^i C_n^{i+1} C_m^{k-i-1}$  cách chọn

.....

THk-i-1: Chọn k bạn nam và có  $C_k^i$  cách chọn i nam để làm quản lý vậy ta có  $C_k^i C_n^k C_m^0$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có

$$C_i^i C_n^i C_m^{k-i} + C_{i+1}^i C_n^{i+1} C_m^{k-i-1} + C_{i+2}^i C_n^{i+2} C_m^{k-i-2} + \dots + C_k^i C_n^k C_m^0; (i \leq k) \text{ cách chọn}$$

$$\text{Từ hai cách giải trên ta có } S_2 = C_n^i C_{m+n-i}^{k-i}$$

**Tính tổng sau**

$$S_3 = C_i^i C_{k-i}^j C_n^i C_m^{k-i} + C_{i+1}^i C_{k-i-1}^j C_n^{i+1} C_m^{k-i-1} + C_{i+2}^i C_{k-i-2}^j C_n^{i+2} C_m^{k-i-2} + \dots + C_{k-j}^i C_j^j C_n^{k-j} C_m^j; (i+j \leq k)$$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách

**Bài toán 3: Một lớp học có n nam và m nữ. Có bao nhiêu cách chọn k học sinh vào đội cờ đỏ ( $k \leq n; k \leq m$ ) sao cho trong đó có i bạn nam và j bạn nữ làm quản lý. ( $i+j \leq k$ )**

Cách 1: Ta có  $C_n^i C_m^j C_{m+n-i-j}^{k-i-j}$  cách chọn

Cách 2:

TH1: Có  $C_n^i$  cách chọn i bạn nam trong n bạn nam và có  $C_i^i$  cách chọn i bạn nam làm nhiệm vụ quản lý và có  $C_m^{k-i}$  cách chọn bạn nữ trong m bạn nữ và có  $C_{k-i}^j$  cách chọn j bạn nữ làm nhiệm vụ

TH2: Có  $C_n^{i+1}$  cách chọn i+1 bạn nam trong n bạn nam và có  $C_{i+1}^i$  cách chọn i bạn nam làm nhiệm vụ quản lý và có  $C_m^{k-i-1}$  cách chọn bạn nữ trong m bạn nữ và có  $C_{k-i-1}^j$  cách chọn j bạn nữ làm nhiệm vụ quản lý Vậy ta có  $C_{i+1}^i C_{k-i-1}^j C_n^{i+1} C_m^{k-i-1}$  cách chọn

.....

TH k-i-j+1: Có  $C_n^{k-j}$  cách chọn k-j bạn nam trong n bạn nam và có  $C_{k-j}^i$  cách chọn i bạn nam làm nhiệm vụ quản lý và có  $C_m^j$  cách chọn bạn nữ trong m bạn

nữ và có  $C_j^j$  cách chọn j bạn nữ làm nhiệm vụ quản lý. Vậy ta có  $C_{k-j}^i C_j^j C_n^{k-j} C_m^j$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có

$C_i^i C_{k-i}^j C_n^i C_m^{k-i} + C_{i+1}^i C_{k-i-1}^j C_n^{i+1} C_m^{k-i-1} + C_{i+2}^i C_{k-i-2}^j C_n^{i+2} C_m^{k-i-2} + \dots + C_{k-j}^i C_j^j C_n^{k-j} C_m^j; (i+j \leq k)$   
cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có:  $S_3 = C_n^i C_m^j C_{m+n-i-j}^{k-i-j}$

**Tính tổng sau**

$$S_4 = A_2^2 C_n^2 C_m^{k-2} + A_3^2 C_n^3 C_m^{k-3} + \dots + A_k^2 C_n^k C_m^0$$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách:

**Bài toán 4: Một lớp học có n nam và m nữ. Có bao nhiêu cách chọn k học sinh vào đội cờ đỏ ( $k \leq n; k \leq m$ ) sao cho trong đó có một bạn nam làm đội trưởng và có một bạn nam làm đội phó.**

Cách 1: Ta có  $A_n^2 C_{m+n-2}^{k-2}$  cách chọn

Cách 2:

TH1: Có  $C_n^2$  cách chọn 2 bạn nam trong n bạn nam và có  $A_2^2$  cách chọn một nam để làm tổ trưởng và một nam để làm tổ phó và có  $C_m^{k-2}$  cách chọn bạn nữ vậy ta có  $A_2^2 C_n^2 C_m^{k-2}$  cách chọn

TH2: Có  $C_n^3$  cách chọn 3 bạn nam trong n bạn nam và có  $A_3^2$  cách chọn một nam để làm tổ trưởng và một nam để làm tổ phó và có  $C_m^{k-3}$  cách chọn bạn nữ vậy ta có  $A_3^2 C_n^3 C_m^{k-3}$  cách chọn

.....

TH k-1: Có  $C_n^k$  cách chọn k bạn nam trong n bạn nam và có  $A_k^2$  cách chọn một nam để làm tổ trưởng và một nam để làm tổ phó vậy ta có  $A_k^2 C_n^k C_m^0$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có  $A_2^2 C_n^2 C_m^{k-2} + A_3^2 C_n^3 C_m^{k-3} + \dots + A_k^2 C_n^k C_m^0$  cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có:  $S_4 = A_n^2 C_{m+n-2}^{k-2}$

**Tính tổng sau**

$$S_5 = A_i^i C_n^i C_m^{k-i} + A_{i+1}^i C_n^{i+1} C_m^{k-i-1} + A_{i+2}^i C_n^{i+2} C_m^{k-i-2} + \dots + A_k^i C_n^k C_m^0$$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách:

**Bài toán 5:** Một lớp học có  $n$  nam và  $m$  nữ. Có bao nhiêu cách chọn  $n$  học sinh vào đội cờ đỏ ( $k \leq n; k \leq m$ ) sao cho trong đó có  $i$  bạn nam mỗi bạn nhận một nhiệm vụ trong  $i$  nhiệm vụ khác nhau quản lý đội ( $i \leq k$ )

Cách 1: Ta có  $A_n^i C_{m+n-i}^{k-i}$  cách chọn

Cách 2:

TH1: Có  $C_n^i$  cách chọn  $i$  bạn nam trong  $n$  bạn nam và có  $A_i^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm 1 nhiệm vụ quản lý trong  $i$  nhiệm vụ quản lý khác nhau và có  $C_m^{k-i}$  cách chọn bạn nữ trong  $m$  bạn nữ

Vậy ta có  $A_i^i C_n^i C_m^{k-i}$

TH2: Có  $C_n^{i+1}$  cách chọn  $i+1$  bạn nam trong  $n$  bạn nam và có  $A_{i+1}^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm 1 nhiệm vụ quản lý trong  $i$  nhiệm vụ quản lý khác nhau và có  $C_m^{k-i-1}$  cách chọn bạn nữ trong  $m$  bạn nữ vậy ta có  $A_{i+1}^i C_n^{i+1} C_m^{k-i-1}$  cách chọn

.....

TH  $k-j+1$ : Có  $C_n^k$  cách chọn  $k$  bạn nam trong  $n$  bạn nam và có  $A_k^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm 1 nhiệm vụ quản lý trong  $i$  nhiệm vụ quản lý khác nhau và có  $C_m^0$  cách chọn bạn nữ trong  $m$  bạn nữ vậy ta có  $A_k^i C_n^k C_m^0$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có  $A_i^i C_n^i C_m^{k-i} + A_{i+1}^i C_n^{i+1} C_m^{k-i-1} + A_{i+2}^i C_n^{i+2} C_m^{k-i-2} + \dots + A_k^i C_n^k C_m^0$  cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có :  $S_5 = A_n^i C_{m+n-i}^{k-i}$

**Tính tổng sau**

$$S_6 = A_i^i A_{k-i}^j C_n^i C_m^{k-i} + A_{i+1}^i A_{k-i-1}^j C_n^{i+1} C_m^{k-i-1} + A_{i+2}^i A_{k-i-2}^j C_n^{i+2} C_m^{k-i-2} + \dots + A_{k-j}^i A_j^j C_n^k C_m^j$$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách:

**Bài toán 6:** Một lớp học có  $n$  nam và  $m$  nữ. Có bao nhiêu cách chọn  $k$  học sinh vào đội cờ đỏ sao cho trong đó có  $i$  bạn nam, mỗi bạn nam nhận một nhiệm vụ trong  $i$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nam và có  $j$  bạn nữ, mỗi bạn nữ nhận một nhiệm vụ trong  $j$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nữ ( $i+j \leq k; k \leq n; k \leq m$ )

Cách 1: Ta có  $A_n^i A_n^j C_{m+n-i-j}^{k-i-j}$  cách chọn

Cách 2:

TH1: Có  $C_n^i$  cách chọn  $i$  bạn nam trong  $n$  bạn nam và có  $A_i^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm một nhiệm vụ quản lý trong  $i$  nhiệm vụ khác nhau quản lý các bạn nam và có  $C_m^{k-i}$  cách chọn bạn nữ trong  $m$  bạn nữ và có  $A_{k-i}^j$  cách chọn mỗi bạn nữ để làm một nhiệm vụ quản lý trong  $j$  nhiệm vụ khác nhau quản lý các bạn nữ. Vậy ta có  $A_i^i A_{k-i}^j C_n^i C_m^{k-i}$

TH2: : Có  $C_n^{i+1}$  cách chọn  $i+1$  bạn nam trong  $n$  bạn nam và có  $A_{i+1}^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm một nhiệm vụ quản lý trong  $i$  nhiệm vụ khác nhau quản lý các bạn nam và có  $C_m^{k-i-1}$  cách chọn bạn nữ trong  $m$  bạn nữ và có  $A_{k-i-1}^j$  cách chọn mỗi bạn nữ để làm một nhiệm vụ quản lý trong  $j$  nhiệm vụ khác nhau quản lý các bạn nữ. Vậy ta có  $A_{i+1}^i A_{k-i-1}^j C_n^{i+1} C_m^{k-i-1}$  cách chọn

.....

TH  $k-i-j+1$ : Có  $C_n^{k-j}$  cách chọn  $k-j$  bạn nam trong  $n$  bạn nam và có  $A_{k-j}^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm một nhiệm vụ quản lý trong  $i$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nam và có  $C_m^j$  cách chọn bạn nữ trong  $m$  bạn nữ và có  $A_j^j$  cách chọn mỗi bạn nữ để làm một nhiệm vụ quản lý trong  $j$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nữ. Vậy ta có  $A_{k-j}^i A_j^j C_n^{k-j} C_m^j$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có

$A_i^i A_{k-i}^j C_n^i C_m^{k-i} + A_{i+1}^i A_{k-i-1}^j C_n^{i+1} C_m^{k-i-1} + A_{i+2}^i A_{k-i-2}^j C_n^{i+2} C_m^{k-i-2} + \dots + A_{k-j}^i A_j^j C_n^{k-j} C_m^j$   
cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có :  $S_6 = A_n^i A_m^j C_{m+n-i-j}^{k-i-j}$

**Tính tổng sau:**  $S_7 = (C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách:

**Bài toán 7: Một lớp học có  $n$  nam và  $n$  nữ. Có bao nhiêu cách chọn  $n$  học sinh vào đội cờ đỏ sao cho trong đó có 1 bạn nam làm đội trưởng**

Cách 1: Ta có  $n C_{2n-1}^{n-1}$  cách chọn

Cách 2:

TH 1 : Chọn 1 bạn nam và có 1 cách chọn 1 nam để làm tổ trưởng và  $C_n^{n-1}$  cách chọn  $n-1$  bạn nữ, vậy ta có  $C_n^1 C_n^{n-1} = (C_n^n)^2$  cách chọn

TH 2: Chọn 2 bạn nam và có 2 cách chọn 1 trong 2 nam để làm tổ trưởng và có  $C_n^{n-1}$  cách chọn  $k-2$  bạn nữ, vậy ta có  $2 C_n^2 C_n^{n-2} = 2(C_n^n)^2$  cách chọn

.....

TH n: Chọn n bạn nam và có n cách chọn 1 trong n nam để làm tổ trưởng và 0 bạn nữ ta có  $nC_n^n C_n^0 = n(C_n^n)^2$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có  $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$  cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có:  $S_7 = nC_{2n-1}^{n-1}$

**Tính tổng sau**  $S_8 = C_k^k (C_n^k)^2 + C_{k+1}^k (C_n^{k+1})^2 + \dots + C_n^k (C_n^n)^2$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách:

**Bài toán 8:** Một lớp học có n nam và n nữ. Có bao nhiêu cách chọn n học sinh vào đội cờ đỏ sao cho trong đó có k bạn nam làm nhiệm vụ quản lý đội. ( $k \leq n$ )

Cách 1: Ta có  $C_n^k C_{2n-k}^{n-k}$  cách chọn

Cách 2:

TH 1 : Chọn k bạn nam và có  $C_k^k$  cách chọn k nam để làm quản lý và  $C_n^{n-k}$  cách chọn n-k bạn nữ, vậy ta có  $C_k^k C_n^k C_n^{n-k} = C_k^k (C_n^k)^2$  cách chọn

TH 2: Chọn k+1 bạn nam và có  $C_{k+1}^k$  cách chọn k nam để làm quản lý và  $C_n^{n-k-1}$  cách chọn n-k-1 bạn nữ, vậy ta có  $C_{k+1}^k C_n^{k+1} C_n^{n-k-1} = C_{k+1}^k (C_n^{k+1})^2$  cách chọn

.....

TH n-k+1: Chọn n bạn nam và có  $C_n^k$  cách chọn k trong n nam để làm quản lý và 0 bạn nữ ta có  $C_n^k C_n^n C_n^0 = C_n^k (C_n^n)^2$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có  $C_k^k (C_n^k)^2 + C_{k+1}^k (C_n^{k+1})^2 + \dots + C_n^k (C_n^n)^2$  cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có:  $S_8 = C_n^k C_{2n-k}^{n-k}$

**Tính tổng sau**  $S_9 = C_i^i C_{n-i}^j (C_n^i)^2 + C_{i+1}^i C_{n-i-1}^j (C_n^{i+1})^2 + \dots + C_{n-j}^i C_j^j (C_n^{n-j})^2$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách:

**Bài toán 9:** Một lớp học có n nam và n nữ. Có bao nhiêu cách chọn n học sinh vào đội cờ đỏ sao cho trong đó có i bạn nam và j bạn nữ làm nhiệm vụ quản lý đội. ( $i+j \leq n$ )

Cách 1: Ta có  $C_n^i C_n^j C_{2n-i-j}^{n-i-j}$  cách chọn

Cách 2:

TH 1 : Chọn i bạn nam và có  $C_n^i$  cách chọn i nam để làm quản lý và  $C_n^{n-i}$  cách chọn n-i bạn nữ và có  $C_{n-i}^j$  cách chọn j nữ để làm quản lý vậy ta có  $C_n^i C_{n-i}^j C_n^{n-i-j} = C_{n-j}^i C_j^j (C_n^i)^j$  cách chọn

TH 2 : Chọn i+1 bạn nam và có  $C_{i+1}^i$  cách chọn i nam để làm quản lý và  $C_n^{n-i-1}$  cách chọn n-i-1 bạn nữ và có  $C_{n-i-1}^j$  cách chọn j nữ để làm quản lý vậy ta có  $C_{i+1}^i C_{n-i-1}^j C_n^{n-i-1-j} = C_{i+1}^i C_{n-i-1}^j (C_n^{i+1})^j$  cách chọn

.....

TH n-k-j +1: Chọn n-j bạn nam và có  $C_{n-j}^i$  cách chọn i nam để làm quản lý và có  $C_n^j$  cách chọn j bạn nữ và có  $C_j^j$  cách chọn j nữ để làm quản lý vậy ta có  $C_{n-j}^i C_j^j C_n^{n-j-j} = C_{n-j}^i C_j^j (C_n^{n-j})^j$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có  $C_{n-j}^i C_j^j (C_n^i)^j + C_{i+1}^i C_{n-i-1}^j (C_n^{i+1})^j + \dots + C_{n-j}^i C_j^j (C_n^{n-j})^j$  cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có:  $S_9 = C_n^i C_n^j C_{2n-i-j}^{n-i-j}$

**Tính tổng sau**

$$S_{10} = A_2^2 (C_n^2)^2 + A_3^2 (C_n^3)^2 + \dots + A_n^2 (C_n^n)^2$$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách:

**Bài toán 10: Một lớp học có n nam và n nữ. Có bao nhiêu cách chọn n học sinh vào đội cờ đỏ sao cho trong đó có một bạn nam làm đội trưởng và có một bạn nam làm đội phó.**

Cách 1: Ta có  $A_n^2 C_{2n-2}^{n-2}$  cách chọn

Cách 2:

TH1: Có  $C_n^2$  cách chọn 2 bạn nam trong n bạn nam và có  $A_2^2$  cách chọn một nam để làm tổ trưởng và một nam để làm tổ phó và có  $C_n^{n-2}$  cách chọn bạn nữ vậy ta có  $A_2^2 (C_n^2)^2$  cách chọn

TH2: Có  $C_n^3$  cách chọn 3 bạn nam trong n bạn nam và có  $A_3^2$  cách chọn một nam để làm tổ trưởng và một nam để làm tổ phó và có  $C_n^{n-3}$  cách chọn ban nữ vậy ta có  $A_3^2(C_n^3)^2$  cách chọn

.....

TH k-1: Có  $C_n^n$  cách chọn n bạn nam trong n bạn nam và có  $A_n^2$  cách chọn một nam để làm tổ trưởng và một nam để làm tổ phó và có  $C_n^0$  cách chọn ban nữ vậy ta có  $A_n^2(C_n^n)^2$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có  $A_2^2(C_n^2)^2 + A_3^2(C_n^3)^2 + \dots + A_n^2(C_n^n)^2$  cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có :  $S_{10} = A_n^2 C_{2n-2}^{n-2}$

**Tính tổng sau**

$$S_{11} = A_i^i (C_n^i)^2 + A_{i+1}^i (C_n^{i+1})^2 + \dots + A_n^i (C_n^n)^2$$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách:

**Bài toán 11: Một lớp học có n nam và n nữ. Có bao nhiêu cách chọn n học sinh vào đội cờ đỏ sao cho trong đó có i bạn nam mỗi bạn nhận một nhiệm vụ trong i nhiệm vụ khác nhau quản lý đội ( $i \leq n$ )**

Cách 1: Ta có  $A_n^i C_{2n-i}^{n-i}$  cách chọn

Cách 2:

TH1: Có  $C_n^i$  cách chọn i bạn nam trong n bạn nam và có  $A_i^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm một nhiệm vụ quản lý trong i nhiệm vụ quản lý khác nhau và có  $C_n^{n-i}$  cách chọn ban nữ trong n bạn nữ

Vậy ta có  $A_i^i (C_n^i)^2$  cách chọn

TH1: Có  $C_n^{i+1}$  cách chọn i+1 bạn nam trong n bạn nam và có  $A_{i+1}^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm một nhiệm vụ quản lý trong i nhiệm vụ quản lý khác nhau và có  $C_n^{n-i-1}$  cách chọn ban nữ trong n bạn nữ. Vậy ta có  $A_{i+1}^i (C_n^{i+1})^2$  cách chọn

.....

TH  $n-i+1$ : Có  $C_n^n$  cách chọn  $n$  bạn nam trong  $n$  bạn nam và có  $A_n^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm một nhiệm vụ quản lý trong  $i$  nhiệm vụ quản lý khác nhau và có  $C_n^0$  cách chọn bạn nữ trong  $n$  bạn nữ. Vậy ta có  $A_n^i(C_n^n)^i$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có  $A_i^i(C_n^i)^i + A_{i+1}^i(C_n^{i+1})^i + \dots + A_n^i(C_n^n)^i$  cách chọn

$$\text{Từ hai cách giải trên ta có : } S_{11} = A_n^i C_{2n-i}^{n-i}$$

**Tính tổng sau**

$$S_{12} = A_i^i A_{n-i}^j (C_n^i)^j + A_{i+1}^i A_{n-i-1}^j (C_n^{i+1})^j + \dots + A_{n-j}^i A_j^j (C_n^{n-j})^j$$

Ta tính tổng trên thông qua giải bài toán sau bằng 2 cách:

**Bài toán 12:** Một lớp học có  $n$  nam và  $n$  nữ. Có bao nhiêu cách chọn  $n$  học sinh vào đội cờ đỏ sao cho trong đó có  $i$  bạn nam, mỗi bạn nam nhận một nhiệm vụ trong  $i$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nam và có  $j$  bạn nữ, mỗi bạn nữ nhận một nhiệm vụ trong  $j$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nữ ( $i + j \leq n$ )

Cách 1: Ta có  $A_n^i A_n^j C_{2n-i-j}^{n-i-j}$  cách chọn

Cách 2:

TH1: Có  $C_n^i$  cách chọn  $i$  bạn nam trong  $n$  bạn nam và có  $A_i^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm một nhiệm vụ quản lý trong  $i$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nam và có  $C_n^{n-i}$  cách chọn bạn nữ trong  $n$  bạn nữ và có  $A_{n-i}^j$  cách chọn mỗi bạn nữ để làm 1 nhiệm vụ quản lý trong  $j$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nữ. Vậy ta có  $A_i^i A_{n-i}^j (C_n^i)^j$

TH2: : Có  $C_n^{i+1}$  cách chọn  $i+1$  bạn nam trong  $n$  bạn nam và có  $A_{i+1}^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm một nhiệm vụ quản lý trong  $i$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nam và có  $C_n^{n-i-1}$  cách chọn bạn nữ trong  $n$  bạn nữ và có  $A_{n-i-1}^j$  cách chọn mỗi bạn nữ để làm 1 nhiệm vụ quản lý trong  $j$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nữ. Vậy ta có  $A_{i+1}^i A_{n-i-1}^j (C_n^{i+1})^j$  cách chọn

.....

TH  $k-i-j+1$ : Có  $C_n^{n-j}$  cách chọn  $n-j$  bạn nam trong  $n$  bạn nam và có  $A_{n-j}^i$  cách chọn mỗi bạn nam để làm một nhiệm vụ quản lý trong  $i$  nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nam và có  $C_n^j$  cách chọn  $j$  bạn nữ trong  $n$  bạn nữ và có  $A_j^j$  cách

chọn mỗi bạn nữ để làm một nhiệm vụ quản lý trong j nhiệm vụ khác nhau để quản lý các bạn nữ. Vậy ta có  $A_{n-j}^i A_j^j (C_n^{n-j})^2$  cách chọn

Theo quy tắc cộng ta có  $A_i^i A_{n-i}^j (C_n^i)^2 + A_{i+1}^i A_{n-i-1}^j (C_n^{i+1})^2 + \dots + A_{n-j}^i A_j^j (C_n^{n-j})^2$  cách chọn

Từ hai cách giải trên ta có :  $S_{12} = A_n^i A_n^j C_{2n-i-j}^{n-i-j}$

## 2.3 KẾT HỢP CẤP SỐ CỘNG VỚI CÔNG THỨC VAN- ĐEC- MON ĐỂ TÍNH TỔNG

**Tính tổng sau**

$$S_{13} = 2(C_n^0)^2 - 3(C_n^1)^2 - 8(C_n^2)^2 - 13(C_n^3)^2 - \dots + (2 - 5n)(C_n^n)^2$$

**Giải:** Nhận thấy 2; -3; -8; -13;...; 2-5n là một cấp số cộng với công sai là d = -5

Ta có  $S_{13} = 2(C_n^0)^2 - 3(C_n^1)^2 - 8(C_n^2)^2 - \dots + (2 - 5n)(C_n^n)^2$

$$S_{13} = (2 - 5n)(C_n^n)^2 + (7 - 5n)(C_n^{n-1})^2 + (12 - 5n)(C_n^{n-2})^2 - \dots + 2(C_n^n)^2$$

Cộng vế hai đẳng thức trên và để ý rằng  $C_n^k = C_n^{n-k}$  ta có

$$2S_{13} = (4 - 5n)(C_n^0)^2 + (4 - 5n)(C_n^{n-1})^2 + (4 - 5n)(C_n^{n-2})^2 - \dots + (4 - 5n)(C_n^n)^2$$

$$\Leftrightarrow 2S_{13} = (4 - 5n)((C_n^0)^2 + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^{n-2})^2 - \dots + (C_n^n)^2)$$

$$\Leftrightarrow 2S_{13} = (4 - 5n)C_{2n}^n \text{ vậy } S_{13} = \frac{1}{2}(4 - 5n)C_{2n}^n$$

**Tính tổng sau**

$$S_{14} = U_1(C_n^0)^2 + U_2(C_n^1)^2 + U_3(C_n^2)^2 + \dots + U_{n+1}(C_n^n)^2$$

Trong đó :  $U_1; U_2; \dots; U_n; U_{n+1}$  là một cấp số cộng công sai là  $d \neq 0$

**Giải:**

Ta có  $S_{14} = U_1(C_n^0)^2 + U_2(C_n^1)^2 + U_3(C_n^2)^2 + \dots + U_{n+1}(C_n^n)^2$

$$S_{14} = U_{n+1}(C_n^n)^2 + U_n(C_n^{n-1})^2 + U_{n-1}(C_n^{n-2})^2 + \dots + U_1(C_n^1)^2$$

Cộng về hai đẳng thức trên và để ý rằng  $C_n^k = C_n^{n-k}$  và

$$U_1 + U_{n+1} = U_2 + U_n = U_3 + U_{n-1} = \dots = U_{n+1} + U_1 \quad \text{ta có}$$

$$2S_{14} = (U_1 + U_{n+1})(C_n^0)^2 + (U_2 + U_n)(C_n^{n-1})^2 + (U_3 + U_{n-1})(C_n^{n-2})^2 + \dots + (U_{n+1} + U_1)(C_n^n)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2S_{14} = (U_1 + U_{n+1})C_{2n}^n \quad \text{Vậy} \quad S_{14} = \frac{1}{2}(U_1 + U_{n+1})C_{2n}^n.$$

## 2.4

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Tính các tổng sau:**

$$S_1 = C_{2015}^1 C_{2016}^{2013} + 2C_{2015}^2 C_{2016}^{2012} + 3C_{2015}^3 C_{2016}^{2011} + \dots + 2014C_{2015}^{2014} C_{2016}^0$$

$$S_2 = C_{10}^{10} C_{2015}^{10} C_{2016}^{2000} + C_{11}^{10} C_{2015}^{11} C_{2016}^{1999} + C_{12}^{10} C_{2015}^{12} C_{2016}^{1998} + \dots + C_{2010}^{10} C_{2015}^{2010} C_{2016}^0$$

$$S_3 = C_{10}^{10} C_{2000}^{20} C_{2015}^{10} C_{2016}^{2000} + C_{11}^{10} C_{1999}^{20} C_n^{11} C_m^{1999} + C_{12}^{10} C_{1998}^{20} C_{2015}^{10} C_{2016}^{1998} + \dots + C_{1990}^{10} C_{20}^{20} C_{2015}^{1990} C_{2016}^{20}$$

$$S_4 = A_2^2 C_{2015}^2 C_{2016}^{1998} + A_3^2 C_{2015}^3 C_{2016}^{1997} + \dots + A_{2000}^2 C_{2015}^{2000} C_{2016}^0$$

$$S_5 = A_{10}^{10} C_{2015}^{10} C_{2016}^{1990} + A_{11}^{10} C_{2015}^{11} C_{2016}^{1989} + A_{12}^{10} C_{2015}^{12} C_{2016}^{1988} + \dots + A_{2000}^{10} C_{2015}^{2000} C_{2016}^0$$

$$S_6 = A_{10}^{10} A_{1990}^{20} C_{2015}^{10} C_{2016}^{1990} + A_{11}^{10} A_{1989}^{20} C_{2015}^{11} C_{2016}^{1989} + \dots + A_{1980}^{10} A_{20}^{20} C_{2015}^{1980} C_{2016}^{20}$$

$$S_7 = (C_{2016}^1)^2 + 2(C_{2016}^2)^2 + 3(C_{2016}^3)^2 + \dots + 2016(C_{2016}^{2016})^2$$

$$S_8 = C_{10}^{10} (C_{2016}^{10})^2 + C_{11}^{10} (C_{2016}^{11})^2 + C_{12}^{10} (C_{2016}^{12})^2 + \dots + C_{2016}^{10} (C_{2016}^{2016})^2$$

$$S_9 = C_{10}^{10} C_{2006}^{20} (C_{2016}^{10})^2 + C_{11}^{10} C_{2005}^{20} (C_{2016}^{11})^2 + \dots + C_{1996}^{10} C_{20}^{20} (C_{2016}^{1996})^2$$

$$S_{10} = A_2^2 (C_{2016}^2)^2 + A_3^2 (C_{2016}^3)^2 + \dots + A_{2016}^2 (C_{2016}^{2016})^2$$

$$S_{11} = A_{10}^{10} (C_{2016}^{10})^2 + A_{11}^{10} (C_{2016}^{11})^2 + \dots + A_{2016}^{10} (C_{2016}^{2016})^2$$

$$S_{12} = A_{10}^{10} A_{2006}^{20} (C_{2016}^{10})^2 + A_{11}^{10} A_{2005}^{20} (C_{2016}^{i+1})^2 + \dots + A_{1996}^{10} A_{20}^{20} (C_{2016}^{1996})^2$$

$$S_{13} = (C_n^0)^2 - 5(C_n^1)^2 - 11(C_n^2)^2 - 17(C_n^3)^2 - \dots + (7 - 6n)(C_n^n)^2$$

$$S_{14} = 5(C_n^1)^2 + 10(C_n^2)^2 + 15(C_n^3)^2 + \dots + (5n - 5)(C_n^n)^2$$

-----

### 3.

## KẾT LUẬN

### 3.1 Kết quả thực nghiệm

#### 3.1.1 Kết quả kiểm tra

| Lớp   | Số số | Điểm TB |    | Điểm Khá |    | Điểm giỏi |    | Đạt yêu cầu |    |
|-------|-------|---------|----|----------|----|-----------|----|-------------|----|
|       |       | SL      | %  | SL       | %  | SL        | %  | SL          | %  |
| 11B3  | 44    | 18      | 41 | 14       | 32 | 8         | 18 | 40          | 90 |
| 11B7  | 42    | 20      | 48 | 12       | 29 | 5         | 12 | 37          | 88 |
| 11B10 | 45    | 24      | 53 | 10       | 22 | 4         | 8  | 38          | 84 |

#### 3.1.2 Kết quả chung

Qua thực tiễn giảng dạy ở các lớp 11B3 - 11B7 - 11B10 của trường THPT Hạm Rạng, khi áp dụng  $\Phi$  ở bài tập toán học sinh cần nắm vững kiến thức chuyên “L<sup>1</sup>” thành “Quen” và giải quyết một số bài tập liên quan tính toán các bài toán. Để biết rõ hơn về phương pháp này học sinh cần nắm vững từ ra đề nhúng bài toán tính toán lý thuyết và  $\Phi$  a d<sup>1</sup>ng.

### 3.2 Bài học kinh nghiệm

Từ thực tế áp dụng đề tài này vào giảng dạy, một kinh nghiệm được rút ra là trước hết học sinh phải nắm vững các quy tắc đếm và các khái niệm trong đại số tổ hợp để có thể đặt ra một bài toán đếm có liên quan đến tổng cần tìm. Rèn luyện kỹ năng giải một bài toán đếm bằng nhiều cách khác nhau.

### 3.3 kết luận

#### 3.3.1 Ưu điểm

Trong phạm vi của bụi viÔt nuy ®· kh<sup>1</sup>/<sub>4</sub>ng ®Pnh ®íc vai trß quan träng của quy t<sup>3</sup>/<sub>4</sub>c ®Ôm trong viÔc tÝnh tæng. B»ng ph-  
ng ph, p nuy cho phĐp chóng ta thay thÕ viÔc tÝnh mét tæng “Phøc t<sup>1</sup>p” thñnh viÔc gi¶i mét bụi to, n “Quen”

Qua thüc tÕ gi¶ng d<sup>1</sup>y ẽ c, c líp 11B3 - 11B7 - 11B10 của tr-  
êng THPT Hùm Răng, khi , p đông ®Ò tui nuy t«i thËy hãc sinh  
chñ ®éng chuyón “L<sup>1</sup>” thñnh “Quen” vµ gi¶i quyÕt mét m¶ng  
bụi tËp lín vÒ tÝnh tæng mét c, ch chñ ®éng, tù tin vµ hòng thó  
hãc tËp phÇn to, n tÝnh tæng. §Æc biÕt tã ph- ng ph, p nuy hãc  
sinh cũn cũ thÓ tù ra đề nh÷ng bụi to, n tÝnh tæng lý thó vµ ®a  
d<sup>1</sup>ng.

### 3.3.2 *Hạn chế*

Phạm vi áp dụng phương pháp còn hẹp mới dừng lại ở một số tổng có tính  
chất đặc biệt.

### 3.3.3 *Hướng phát triển đề tài*

Kết hợp quy tắc đếm với cấp số nhân và các dãy số đặc biệt để mở rộng các  
dạng tính tổng hơn nữa.

Trong thời gian tới rất mong ®íc sù céng t, c của c, c ®ảng  
nghịÖp ®Ó chóng ta cũ thÓ ®a ra nh÷ng ph- ng ph, p tÝnh  
tæng kh, c, nh»m chuyón ho, viÔc tÝnh mét tæng “Khã” thñnh  
viÔc gi¶i mét bụi to, n “Quen biÕt”.

§iÒu mong muèn h- n c¶ lµ ®íc l<sup>3</sup>/<sub>4</sub>ng nghe sù gãp ý ch©n  
thñnh của c, c ®ảng nghịÖp cho ®Ò tui nuy . Mét lÇn n÷a xin  
c¶m - n sù quan t©m ®ãc vµ gãp ý của mãi ngài ./.

-----

#### 4. **tại liÖu tham kh¶o**

1. S, ch gi, o khoa ®¹i sè vµ gi¶i tÝch n©ng cao líp 11 (SGK §S-GT 11 NC)
2. S, ch bµi tËp ®¹i sè vµ gi¶i tÝch n©ng cao líp 11 (SBT §S-GT 11 NC)
3. S, ch gi¶i to, n ®¹i sè vµ gi¶i tÝch 11 , c¶ t, c gi¶ TrÇn Th¶nh Minh viÖt cho hãc sinh c, c líp chuyªn vµ hãc sinh kh, giái (Nhµ xuÊt b¶n gi, o dõc)
4. §¹i sè tæ híp vµ c, c vËn ®Ò liªn quan c¶ t, c gi¶ Lª S, ng ( Nhµ xuÊt b¶n §µ N½ng - 1994 )
5. B, o to, n hãc vµ tuæi tr¶
6. TËp c, c ®Ò thi HSG c¶ c, c trêng THPT trong c¶ níc, ®Æc biÖt lµ tËp ®Ò thi c¶ trêng THPT Hµm R¶ng Th¶nh phè Thanh Hoã.

Nh©n dÞp hµn th¶nh bµi viÖt. T«i xin ch©n th¶nh c¶m ¬n tÊt c¶ c, c t, c gi¶ ®· viÖt s, ch vµ xuÊt b¶n nh÷ng tµi liÖu tham kh¶o quý b, u cung cÊp cho bµi viÖt nµy !

T«i xin cam ®oan SKKN nµy kh«ngph¶i lµ SKKN cò hay lµ b¶n sao chÐp c¶a ngêi kh, c, t«i xin chÞu hµn toµn tr, ch nhiÖm nÖu cã sù m¶n tr, .

5 Năm 2016

Thủ trưởng cơ quan

Trên THPT Hạm Rạng ngày 10 Tháng

Ngôi viết

Nguyễn Hằng Quang