| | |
|---|---|
| **PHÒNG GD&ĐT TP VINH** | **KIỂM TRA HỌC SINH GIỎI LỚP 9** |
| **TRƯỜNG THCS ĐẶNG THAI MAI** | **Môn thi: Toán**<br>Thời gian làm bài: ***150 phút*** |

**Bài 1** ***(4,0 điểm).***

a) Cho biểu thức $A=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với $0\le x\le\frac{1}{4}$.

b) Cho $x,y,z$ là ba số thực dương thỏa mãn $x-2y+z=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}.$$

**Bài 2** ***(6,0 điểm).*** a) Giải phương trình $3x^2+6=9x-2x\sqrt{x-2}$.

b) Giải phương trình $(x-2)\sqrt{x-1}+(x+3)\sqrt{x+4}=x^2+x$.

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+7y^2=61+4x$.

d) Cho hai số nguyên dương $a,b$ thỏa mãn $a>b$ và $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Chứng minh $a,b$ là hai số chính phương liên tiếp.

**Bài 3** ***(2,0 điểm).*** a) Cho $a,b\ge 0, ab=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2(a^2+1)}+\sqrt{2(b^2+1)}\le 2(a+b).$$

b) Cho ba số không âm $a,b,c$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3\ge 3abc+\frac{9}{4}|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

**Bài 4** ***(7,0 điểm).*** Cho tam giác nhọn $ABC$ đường cao $AH$. Gọi $E,F$ là các điểm lần lượt thuộc các tia $HC,HB$ sao cho $\angle EAB=\angle FAC=90^o$.

a) Chứng minh $\frac{HB}{HC}=\frac{HF}{HE}=\frac{FB}{CE}$.

b) Gọi $P$ thuộc đoạn thẳng $AH$ ($P\ne A; P\ne H$). Trên tia đối của tia $PE$ lấy điểm $M$ sao cho $BM=BA$. Trên tia đối của tia $PF$ lấy $N$ sao cho $CN=CA$. Qua $C$ vẽ đường thẳng vuông góc với $PF$ cắt đường thẳng $AH$ tại $K$. Chứng minh $BP\perp KE$.

c) Các đường thẳng $BM, CN$ cắt nhau tại $S$. Chứng minh $SM = SN$.

**Bài 5** ***(1,0 điểm).*** Cho năm số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

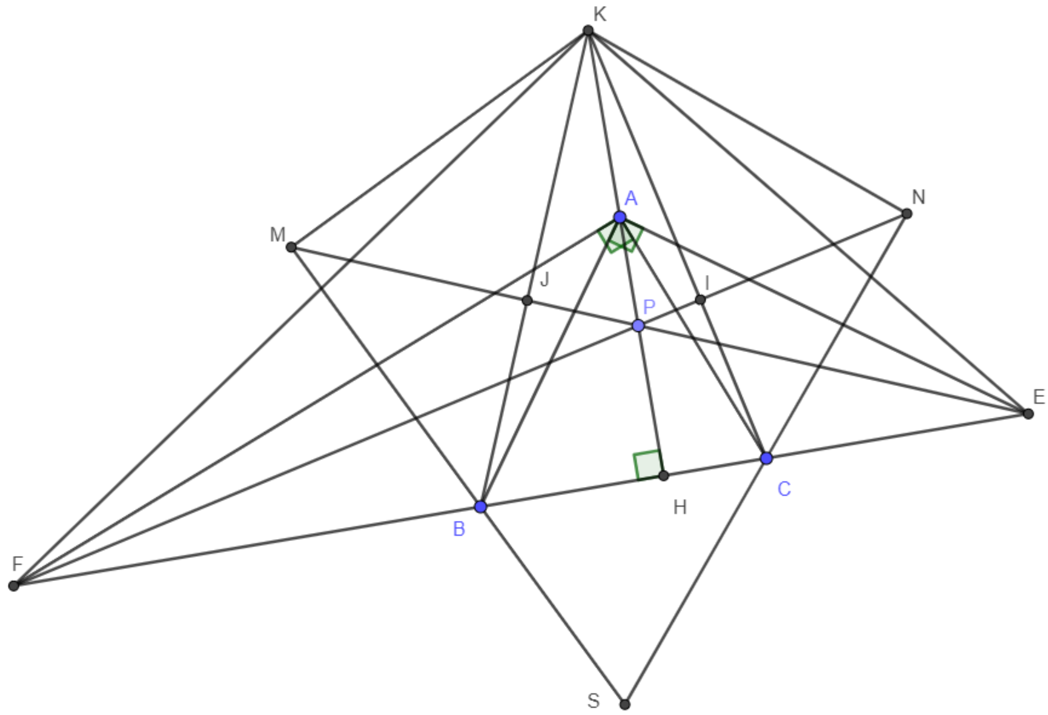
***Hết***

**ĐÁP ÁN**

| Bài | Câu | Đáp án | Điểm |
|---|---|---|---|
| 1 | a | Rút gọn A=2x | 1 |
| | | Thay vào<br>$B = 1 - \sqrt{4x - 4\sqrt{x} + 1}$<br>$= 1 - \left\|2\sqrt{x} - 1\right\|$<br>$= 1 - \left(1 - 2\sqrt{x}\right)$<br>$= 2\sqrt{x}$ | 0,5<br><br>0,5 |
| | b) | Ta có $2y = x + z$<br>$\Leftrightarrow (x+z) + 2\left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}\right) = 2y + 2\left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}\right)$<br>$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{z} + 2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{z}\right) = 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)$<br>$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{z} + 2\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{z}}$<br>$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} = \dfrac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{z}}$ | 0,5<br>0,5<br>0,5<br>0,5 |
| 2 | a | ĐKXĐ: $x \geq 2$. | 0,25 |
| | | Phương trình đã cho tương đương với<br>$4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 2x\sqrt{x-2} + x - 2$<br>$\Leftrightarrow (2x-2)^2 = \left(x - \sqrt{x-2}\right)^2$ | 0,5 |
| | | $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2 = x - \sqrt{x-2} \\ 2x - 2 = \sqrt{x-2} - x \end{array}\right.$<br>$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = -\sqrt{x-2}\ (1) \\ 3x - 2 = \sqrt{x-2}\ (2) \end{array}\right.$ | 0,25 |
| | | Với $x \geq 2, VT(1) \geq 0 \geq VP(1)$ | 0,5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Để (1) xảy ra thì $x=2$. | |
| | | Phương trình (2) tương đương với<br>$3(x-2)-\sqrt{x-2}+4=0 \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+5\sqrt{x-2}+1=0$<br>(vô nghiệm vì vế trái dương với mọi $x\geq 2$. | 0,5 |
| | | Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{2\}$. | |
| | b | Điều kiện $x\geq 1$. | 0,25 |
| | | $(1)\Leftrightarrow (x-2)\left(\sqrt{x-1}-2\right)+(x+3)\left(\sqrt{x+4}-3\right)=x^2-4x-5$<br>$\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{(x-5)(x+3)}{\sqrt{x+4}+3}=(x-5)(x+1)$<br>$\Leftrightarrow (x-5)\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}-x-1\right)=0$<br>$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}=x+1\ (2) \end{array}\right.$ | 0,5 |
| | | Ta có $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}<\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}+2}\leq\dfrac{x-1}{2};\ \dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}\leq\dfrac{x+3}{3}$.<br>Suy ra $VT(2)<\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{5x+3}{6}<\dfrac{6x+6}{6}=x+1=VP(2)$.<br>Do đó (2) vô nghiệm.<br>Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{5\}$. | 0,25 |
| | c | $2x^2+7y^2=61+4x$<br>$\Leftrightarrow 2(x-1)^2+7y^2=63$<br>$\Rightarrow 7y^2\leq 63\Rightarrow y^2\leq 9$<br>$\Rightarrow y^2\in\{0;1;4;9\}$ | 0,5<br><br>0,5 |
| | | Mà 65 lẻ, $2(x-1)^2$ chẵn nên $\Rightarrow y^2\in\{1;9\}$.<br>TH1: $y^2=1\Rightarrow (x-1)^2=28$ (loại).<br>TH2: $y^2=9\Rightarrow (x-1)^2=0\Rightarrow y=\pm 3; x=1$ | 0,25<br>0,25<br><br>0,25 |
| | | Vậy $(x;y)\in\{(1;3);(1;-3)\}$ | 0,25 |
| | d | $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)\Leftrightarrow (a-b-1)^2=4a\Leftrightarrow a=\left(\dfrac{a-b-1}{2}\right)^2$<br>$a^2+b^2+1=2(ab+a+b)\Leftrightarrow b=\left(\dfrac{a-b+1}{2}\right)^2$ | 0,5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Suy ra a, b đều chính phương. Lại có $\frac{a-b+1}{2}-\frac{a-b-1}{2}=1$ nên $a,b$ là hai số chính phương liên tiếp. | 0,5 |
| 3 | a | Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:<br>$\sqrt{2\left(a^2+1\right)}=\sqrt{2\left(a^2+ab\right)}=\sqrt{2(a+b)a}=\sqrt{2a(a+b)}\le\frac{2a+a+b}{2}=\frac{3a}{2}+\frac{b}{2}$.<br>Tương tự, ta có $\sqrt{2\left(b^2+1\right)}\le\frac{a}{2}+\frac{3b}{2}$.<br>Do đó $\sqrt{2\left(a^2+1\right)}+\sqrt{2\left(b^2+1\right)}\le 2a+2b=2(a+b)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$. | 0,5<br>0,25<br>0,25 |
| | b | Ta có $\lvert a-b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert=a+b$.<br>Tương tự $\lvert b-c\rvert\le\lvert b\rvert+\lvert c\rvert=b+c;\lvert c-a\rvert\le\lvert c\rvert+\lvert a\rvert=c+a$. | 0,25 |
| | | Suy ra $2(a+b+c)\ge\lvert a-b\rvert+\lvert b-c\rvert+\lvert c-a\rvert\ge 3\sqrt[3]{\lvert(a-b)(b-c)(c-a)\rvert}$<br>(theo BĐT Cô si cho ba số không âm $\lvert a-b\rvert,\lvert b-c\rvert,\lvert c-a\rvert$). (1) | 0,25 |
| | | Lại có<br>$2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$<br>$\ge 3\sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$<br>(theo BĐT Cô si cho ba số không âm $(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2$). (2)<br>Nhân theo vế (1) và (2) suy ra<br>$4\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)\ge 9\lvert(a-b)(b-c)(c-a)\rvert\Rightarrow a^3+b^3+c^3$<br>$\ge 3abc+\frac{9}{4}\lvert(a-b)(b-c)(c-a)\rvert$.<br>Dấu bằng xảy ra khi a=b=c | 0,25<br>0,25 |

<table>
<tr><td rowspan="9">4</td><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">a</td><td>a) Xét tam giác ABE vuông tại A, đường cao AH: $HB.HE = AH^2$<br><br>Xét tam giác ACF vuông tại A, đường cao AH: $HC.HF = AH^2$</td><td>0,5<br>0,5</td></tr>
<tr><td>Từ đây ta suy ra $HB.HE = HC.HF$<br>$\Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{HF}{HE} = \dfrac{HF - HB}{HE - HC} = \dfrac{FB}{CE}$</td><td>1<br>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">b</td><td>Gọi J là giao điểm của KB và EM; I là giao điểm của KC và FN.<br><br>Xét tam giác KFC: KH, FI là các đường cao nên P là trực tâm.<br><br>Khi đó $\Delta HPF \backsim \Delta HCK\left(g.g\right) \Rightarrow HP.HK = HF.HC$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Lại có $HF.HC = HE.HB \Rightarrow HP.HK = HE.HB \Rightarrow \Delta HBK \backsim \Delta HPE\left(c.g.c\right)$.<br><br>$\Rightarrow \angle KBH = \angle HPE \Rightarrow \angle JKP + \angle KPJ = \angle JKP + \angle KBH = 90^o \Rightarrow EJ \perp BK$<br><br>Suy ra P cũng là trực tâm tam giác KBE.</td><td>0,5<br>0,5</td></tr>
<tr><td>Do đó $BP \perp KE$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">c</td><td>Ta có $BM = BA \Rightarrow BM^2 = BA^2 = BH.BC = BJ.BK \Rightarrow BM \perp MK$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow KM^2 = KJ.KB = KI.KC = KN^2$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow KS^2 - KM^2 = KS^2 - KN^2 \Rightarrow MS = NS$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | | Bài 5- Theo nguyên lý Đi rích lê, 5=2.2+1 nên trong năm số có ba số có lũy thừa của 3 cùng tính chẵn lẻ.<br>Vì 3=2.1+1 nên trong ba số này lại có hai số mà lũy thừa của 2 cùng tính chẵn lẻ.<br>Khi đó hai số này có tổng lũy thừa của 2 hay 3 đều chẵn nên tích là số chính phương. Từ đó ta có điều phải chứng minh. | 0,5<br><br><br>0,5 |