

Bài 11. Hàm số liên tục

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN D. CÂU HỎI ĐÚNG-SAI

Câu 1. Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4,5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \frac{2}{x - 1}$. Khi đó:

*a) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.*b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.d) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.**Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

-Ta có: $g(2) = \frac{2}{2-1} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2$; suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

- Ta có: $f(2) = 4,5$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$.

Vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Câu 2. Cho hàm số $g(x) = 4x^2 - x + 1$. Khi đó:

*a) Ta có $f(1) = 2$ *b) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ *c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ d) Hàm số $y = f(x) - g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$ **Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

-Ta có: $f(x_0) = f(1) = 1 + 1 = 2$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 = f(x_0).$$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

-Ta có: $g(x_0) = g(1) = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 - x + 1) = 4 = g(1)$$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Câu 3. Xét được tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của nó:

*a) $f(x) = x^3 - x^2 + 8x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x}$ là hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

c) $f(x) = \frac{\sin x + 1}{x + 1}$ là hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; +\infty)$.

*d) $f(x) = \sqrt{x - 2}$ là hàm số liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Vì $f(x) = x^3 - x^2 + 8x$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Vì $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x}$ là hàm phân thức có tập xác định $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$ nên hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; 3), (3; +\infty)$.

c) Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{\sin x + 1}{x + 1}$ là $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Trên các khoảng đó, hàm lượng giác $y = \sin x + 1$ (tử thức) và hàm số đa thức $y = x + 1$ (mẫu thức) đều liên tục. Do vậy hàm $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$.

d) Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{x - 2}$ là $[2; +\infty)$.

Với mỗi x_0 tùy ý thuộc $(2; +\infty)$, ta luôn có $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{x_0 - 2}$; vì vậy hàm số liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$. (1)

Mặt khác: $f(2) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ nên $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; suy ra hàm số liên tục tại điểm $x = 2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Câu 4. Cho các hàm số sau: $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$ và $h(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$

*a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

*b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

c) Hàm số $h(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

d) Hàm số $y = f(x).g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

-Ta có: $f(1) = -\frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x}{2} = -\frac{1}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

-Ta có: $g(1) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ nên $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

- Ta có: $h(2) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$ nên $h(2) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Vậy hàm số $h(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x-7}-1}{x^2-4} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{5x-9}{2} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2-x} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{1-x}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

Câu 5. Cho các hàm số . Khi đó:

*a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

b) Hàm số $g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = 2$.

c) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{1}{4}$.

*d) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

-Ta có: $f(x_0) = f(2) = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4x-7}-1}{x^2-4} = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

- Ta có: $g(2) = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1-x}{4} \right) = -\frac{1}{4}$;

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2-4}{(2-x)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{\sqrt{x+2}+2} = -\frac{1}{4}.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\frac{1}{4} = g(2)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Câu 6. Cho hàm số và $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Khi đó:

*a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

*b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

c) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

*d) Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

-Ta có: $f(1) = -\frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x}{2} = -\frac{1}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

- Ta có: $g(1) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ nên $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$. Khi đó:

*a) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$

*b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

*c) Khi $a = 1$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$

d) Khi $a = 0$ thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

-Ta có: $f(2) = \frac{2a+1}{6}$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2}.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{2a+1}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

-Ta có: $g(2) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$ nên $g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5x+11}}{2x^2-5x-18} & \text{khi } x > -2 \\ 4-x^2 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 2x+a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$, khi đó:

*a) Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{5}{26}$

b) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$

c) Để hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $a = 1$

*d) Khi $a = -1$ thì hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

-Ta có: $f(x_0) = f(-2) = 0 = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1 - \sqrt{5x+11}}{2x^2 - 5x - 18} = \frac{5}{26} \neq \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \Rightarrow \text{Không tồn tại } \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$

-Ta có: $g(x_0) = g(-2) = -4 + a$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = g(-2)$
 $\Rightarrow -4 + a = -5 \Leftrightarrow a = -1$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+5}}{x^2 - 5x - 4} & \text{khi } x > -1 \\ x^2 - 9x & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 2a + 1 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$. Khi đó:

*a) Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{8}$

*b) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$

c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$ khi $a = \frac{1}{2}$

d) Khi $a = -\frac{1}{2}$ hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

-Ta có: $f(x_0) = f(-1) = 10 = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2 - \sqrt{x+5}}{x^3 - 5x - 4} = \frac{1}{8} \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$

-Ta có: $g(-1) = 2a - 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1)$

$$\Rightarrow 2a - 1 = -2 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2}.$$

Câu 10. Xét được tính liên tục của hàm số:

- *a) $f(x) = \frac{3x-2}{x-5}$ là hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 5), (5; +\infty)$.
 *b) $f(x) = \sin x - 2\cos x + 3$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
 *c) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.
 *d) $f(x) = \sqrt{2-x} + 3\sqrt{x+1}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$ và $f(x)$ là hàm phân thức nên nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 5), (5; +\infty)$.

b) Hàm số $f(x) = \sin x - 2\cos x + 3$ là hàm số lượng giác có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

c) Tập xác định của hàm số là $D = [-2; 2]$.

Với mỗi $x_0 \in (-2; 2)$; ta luôn có $f(x_0) = \sqrt{4-x_0^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, vì vậy hàm số liên tục trên khoảng $(-2; 2)$.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \sqrt{4-2^2} = 0$ và $f(2) = 0$ nên hàm số liên tục về bên trái tại điểm $x_0 = 2$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \sqrt{4-(-2)^2} = 0$ và $f(-2) = 0$ nên hàm số liên tục về bên phải tại điểm $x_0 = -2$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

d) Tập xác định của hàm số là $D = [-1; 2]$.

Với mỗi $x_0 \in (-1; 2)$, ta luôn có $f(x_0) = \sqrt{2-x_0} + 3\sqrt{x_0+1} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, vì vậy hàm số liên tục trên khoảng $(-1; 2)$.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \sqrt{2-2} + 3\sqrt{2+1} = 3\sqrt{3}$ và $f(2) = 3\sqrt{3}$ nên hàm số liên tục về bên trái tại điểm $x_0 = 2$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{2+1} + 3\sqrt{-1+1} = \sqrt{3}$ và $f(-1) = \sqrt{3}$ nên hàm số liên tục về bên phải tại điểm $x_0 = -1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

---HẾT---