

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình lượng giác cơ bản

a) Phương trình $\sin x = m$ (1)

- Với $|m| > 1$, phương trình (1) vô nghiệm.

- Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$.

Khi đó, ta có:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý

- Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\sin x = m$:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z});$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z});$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\sin x = \sin a^\circ$ như sau:

$$\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Phương trình $\cos x = m$ (2)

- Với $|m| > 1$, phương trình (2) vô nghiệm.

- Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $[0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

Khi đó, ta có:

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý

- Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\cos x = m$:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z});$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cos x = \cos a^\circ$ như sau:

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k360^\circ \\ x = -a + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Phương trình $\tan x = m$

Gọi α là số thực thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$. Khi đó, ta có:

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\tan x = \tan a$ như sau:

$$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Phương trình $\cot x = m$

Gọi α là số thực thuộc đoạn $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$. Khi đó, ta có:

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cot x = \cot a$ như sau:

$$\cot x = \cot a \Leftrightarrow x = a + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Phương trình lượng giác đưa về dạng cơ bản

$$\bullet \sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\bullet \cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

- Với phương trình có dạng:

$\sin^2 u(x) = \sin^2 v(x), \cos^2 u(x) = \cos^2 v(x), \sin^2 u(x) = \cos^2 v(x)$, ta có thể dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình dạng $\cos f(x) = \cos g(x)$.

- Với một số phương trình lượng giác, ta có thể dùng các công thức lượng giác và các biến đổi để đưa về phương trình dạng tích $A(x) \cdot B(x) = 0$.

II. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. Phương trình mũ

Với $a > 0, a \neq 1$ thì:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \text{ với } b > 0;$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

2. Phương trình lôgarit

Với $a > 0, a \neq 1$ thì:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \vee g(x) > 0. \end{cases}$$

3. Bất phương trình mũ

Với $a > 0, a \neq 1$ thì:

a) Xét bất phương trình: $a^{f(x)} > b$.

- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là tập xác định của $f(x)$;

- Nếu $b > 0, a > 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) > \log_a b$;

- Nếu $b > 0, 0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) < \log_a b$.

b) Xét bất phương trình: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

- Nếu $a > 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) > g(x)$;

- Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) < g(x)$.

Các bất phương trình mũ khác cùng loại được giải tương tự.

4. Bất phương trình lôgarit

Với $a > 0, a \neq 1$ thì:

a) Xét bất phương trình: $\log_a f(x) > b$.

- Nếu $a > 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) > a^b$;

- Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về: $0 < f(x) < a^b$.

b) Xét bất phương trình: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

- Nếu $a > 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) > g(x) > 0$;

- Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về: $0 < f(x) < g(x)$.

Các bất phương trình lôgarit khác cùng loại được giải tương tự.