

BÀI 2. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình bậc hai một ẩn

- Phương trình bậc hai một ẩn (hay còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

trong đó a, b, c là các số thực cho trước, x là ẩn số.

- Giải phương trình bậc hai một ẩn là đi tìm tập nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn đó.

2. thức nghiệm của phương trình bậc hai

Trường hợp 1. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Trường hợp 3. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3. Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) với $b = 2b'$. Gọi biệt thức $A' = b'^2 - ac$.

Trường hợp 1. Nếu $A' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $A' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}.$$

Trường hợp 3. Nếu $A' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{A'}}{a}.$$

Chú ý: Trong trường hợp hệ số b có dạng $2b'$ ta nên sử dụng để giải phương trình sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Dạng 1. Không dùng công thức nghiệm, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước

Phương pháp giải: Ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1. Đưa phương trình đã cho về dạng tích.

Cách 2. Đưa phương trình đã cho về phương trình mà vế trái một bình phương còn vế phải là một hằng số.

1A. Giải các phương trình:

a) $5x^2 - 7x = 0;$

b) $-3x^2 + 9 = 0;$

c) $x^2 - 6x + 5 = 0;$

d) $3x^2 + 12x + 1 = 0.$

1B. Giải các phương trình:

a) $-\sqrt{3}x^2 + 6x = 0;$

b) $-\frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{2} = 0;$

c) $x^2 - x - 9 = 0;$

d) $3x^2 + 6x + 5 = 0.$

2A. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4x^2 + m^2x + 4m = 0$ có nghiệm $x = 1$?

2B. Cho phương trình $4mx^2 - x - 10m^2 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x = 2$.

Dạng 2. Giải phương trình bậc hai bằng cách sử dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn:

Phương pháp giải: Sử dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai để giải.

3A. Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình:

a) $2x^2 - 3x - 5 = 0;$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0;$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0;$

d) $-3x^2 + 4x - 4 = 0.$

3B. Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức A (hoặc A' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình:

a) $x^2 - x - 11 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0;$

c) $-5x^2 - 4x + 1 = 0;$

d) $-2x^2 + x - 3 = 0$

4A. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0;$

2.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$c) \sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0;$$

$$d) -3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0.$$

4B. Giải các phương trình sau:

$$a) 2x^2 + 2\sqrt{11}x - 7 = 0;$$

$$b) 152x^2 - 5x + 1 = 0;$$

$$c) x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0;$$

$$d) 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0.$$

Dạng 3. Sử dụng công thức nghiệm, xác định số nghiệm của phương trình dạng bậc hai

Phương pháp giải: Xét phương trình dạng bậc hai:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

1. Phương trình có hai nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

3. Phương trình có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$.

4. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta < 0 \end{cases}$.

Chú ý: Nếu $b = 2b'$ ta có thể thay điều kiện của Δ tương ứng bằng Δ' .

5A. Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m-3 = 0$ (m là tham số).

Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt;

c) Vô nghiệm;

e) Có nghiệm.

b) Có nghiệm kép;

d) Có đúng một nghiệm;

5B. Cho phương trình $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (m là tham số).

Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt;

c) Vô nghiệm;

e) Có nghiệm.

b) Có nghiệm kép;

d) Có đúng một nghiệm;

Dạng 4. Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai

Phương pháp giải:

3. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

* Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai theo tham số m là tìm tập nghiệm của phương trình tùy theo sự thay đổi của m .

* Xét phương trình dạng bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac \text{ (hoặc } \Delta' = b'^2 - ac).$$

- Nếu $a = 0$, ta đưa về biện luận phương trình bậc nhất.

- Nếu $a \neq 0$, ta biện luận phương trình bậc hai theo Δ .

6A. Giải và biện luận các phương trình sau: (ra là tham số).

a) $x^2 + (1 - m)x - ra = 0$;

b) $(m - 3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$.

6B. Giải và biện luận các phương trình sau: (ra là tham số).

a) $mx^2 + (2m - 1)x + ra + 2 = 0$;

b) $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$.

Dạng 5. Một số bài toán liên quan đến tính có nghiệm của phương trình bậc hai; Nghiệm chung của các phương trình dạng bậc hai; Hai phương trình dạng bậc hai tương đương

Phương pháp giải:

1. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \text{ (hoặc } \Delta' \geq 0).$$

2. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ và $a'x^2 + b'x + c' = 0$ có nghiệm chung, ta làm như sau:

Bước 1. Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Thay x_0 vào 2 phương trình để tìm được điều kiện của tham số.

Bước 2. Với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem 2 phương trình có nghiệm chung hay không và kết luận.

3. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ và $a'x^2 + b'x + c' = 0$ tương đương, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Hai phương trình cùng vô nghiệm.

Trường hợp 2. Hai phương trình cùng có nghiệm. Khi đó:

- Điều kiện cần để hai phương trình tương đương là chúng có nghiệm chung. Từ đó tìm được điều kiện của tham số.

- Điều kiện đủ với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem 2 phương trình tập nghiệm bằng nhau hay không và kết luận.

4. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

7A. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình $b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ luôn vô nghiệm.

7B. Cho phương trình $x^2 + (a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$ với a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình trên luôn vô nghiệm.

8A. Cho hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + cx + d = 0$. Chứng minh nếu hai phương trình trên có nghiệm chung thì:

$$(b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0.$$

8B. Cho hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + bx + a = 0$ trong đó $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

9A. Cho hai phương trình $x^2 + x - m = 0$ và $x^2 - mx + 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) Hai phương trình có nghiệm chung;

b) Hai phương trình tương đương.

9B. Cho hai phương trình $x^2 - 2ax + 3 = 0$ và $x^2 - x + a = 0$, (a là tham số). Với giá trị nào của a thì:

a) Hai phương trình trên có nghiệm chung?

b) Hai phương trình trên tương đương?

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

10. Giải các phương trình:

a) $2x^2 - (1 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0;$

b) $3x^2 + 3 = 2(x + 1);$

c) $(2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x + 1)(x - 1);$

d) $\frac{1}{2}x(x + 1) = (x - 1)^2.$

11. Cho phương trình $2x^2 - (4m + 3)x + 2m^2 - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt;

b) Có nghiệm kép;

c) Vô nghiệm;

d) Có đúng một nghiệm;

e) Có nghiệm.

12. Biện luận theo m số nghiệm phương trình:

$$mx^2 - 4(m - 1)x + 4m + 8 = 0 \quad (m \text{ là tham số}).$$

5.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

13. Cho hai phương trình $x^2 + mx + 2 = 0$ và $x^2 + 2x + m = 0$. Xác định các giá trị của tham số m để hai phương trình:

a) Có nghiệm chung;

b) Tương đương.

BÀI 2. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1A. a) Ta có $5x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(5x - 7) = 0$. Tìm được $x \in \left\{0; \frac{7}{5}\right\}$

b) Ta có $-3x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3$. Tìm được $x = \pm\sqrt{3}$

c) Ta có $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) = 0$. Tìm được $x \in \{1; 5\}$

d) Ta biến đổi thành $3(x + 2)^2 = 11$. Tìm được $x = \frac{-6 \pm \sqrt{33}}{3}$

1B. Tương tự 1A.

a) Tìm được $x = \{2\sqrt{3}; 0\}$.

b) Vô nghiệm.

c) Tìm được $x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$.

d) Vô nghiệm.

2A. Thay $x = 1$ vào phương trình ta có $4.1^2 + m^2 + 4m = 0$. Tìm được $m = -2$.

2B. Tương tự 2A.

Tìm được $m = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{5}$

3A. a) Ta có $a = 2$, $b = -3$, $c = -5$. Tính được $\Delta = 49 > 0$. Phương trình có hai

nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x \in \left\{-1; \frac{5}{2}\right\}$

b) ta có $a = 1$, $b = -6$, $b' = -3$, $c = 8$. Tính được $\Delta' = 1$. Ta tìm được $x \in \{4; 2\}$.

c) Ta có $a = 9$, $b = -12$, $c = 4$. Tính được $\Delta = 0$. Phương trình có nghiệm kép là $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$.

d) Ta có $a = -3$, $b = 4$, $c = -4$. Tính được $\Delta = -32 < 0$. Phương trình vô nghiệm.

3B. Tương tự 3A.

6.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) Tìm được $x_{1,2} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

b) Tìm được $x = 2$.

c) Tìm được $x \in \left\{ -1; \frac{1}{5} \right\}$

d) Tìm được $x \in \emptyset$.

4A. Tương tự 3A

a) Tìm được $x \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right\}$

b) Tìm được $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Tìm được $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -1$

d) Tìm được $x \in \left\{ \frac{6 + 2\sqrt{6}}{3}; \frac{-6 + 2\sqrt{6}}{3} \right\}$

4B. Tương tự 3A, 4A

a) Tìm được $x_{1,2} = \frac{-\sqrt{11} \pm 5}{2}$

b) Tìm được $x \in \emptyset$

c) Tìm được $x \in \left\{ 2; \sqrt{3} \right\}$

b) Tìm được $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5A. Xét $\Delta' = (m - 1)^2 - m(m - 3) = m + 1$

a) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ Tìm được $m \neq 0, m > -1$.

b) Xét $m = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (TM)$

Xét $m \neq 0$. Phương trình có nghiệm kép khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

c) Tương tự, ta tìm được $m < -1$

d) Tìm được $m = 0$

e) Tìm được $m \geq 1; m \neq 0$.

5B. Tương tự 5A

7. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) Tìm được $m > \frac{-1}{4}, m \neq 2$ b) Tìm được $m = \frac{-1}{4}$

d) Tìm được $m < \frac{-1}{4}$ d) Tìm được $m = 2$

e) Tìm được $m = 2$ hoặc $m > \frac{-1}{4}$.

6A. a) Ta có $\Delta = m^2 + 2m + 1 \geq 0, \forall m \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |m+1|$

* $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$: Phương trình đã cho có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{m-1}{2}$

* $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$: Phương trình đã cho có nghiệm phân biệt: $x_1 = m, x_2 = -1$

b) Với $m = 3 \Rightarrow$ Phương trình có dạng: $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Với $m \neq 3 \Rightarrow \Delta' = 9m - 18$

* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 2$: Phương trình vô nghiệm.

* $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 2$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{m}{m-3}$

* $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 2 \end{cases}$: Phương trình có nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{9m-18}}{m-3}$

6B. Tương tự 6A

a) Với $m = 0 \Rightarrow x = 2$;

Với $n \neq 0 \Rightarrow \Delta = -12m + 1$

* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{12}$: Phương trình vô nghiệm.

* $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{12}$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{1-2m}{2m}$

* $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{12} \end{cases}$: Phương trình hai có nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{1-2m \pm \sqrt{1-12m}}{2m}$

8.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Với $m = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$;

Với $m \neq 2 \Rightarrow \Delta' = 4m + 1$:

* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < \frac{-1}{4}$: Phương trình vô nghiệm.

* $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{4}$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{m+1}{m-2}$

* $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > \frac{-1}{4} \end{cases}$: Phương trình có hai nghiệm kép: $x_{1,2} = \frac{m+1 \pm \sqrt{4m+1}}{m-2}$

7A. Ta có $\Delta = (b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)$. Từ đó chứng minh được $\Delta < 0$.

7B. Ta có $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

Vì $a < b+c \Rightarrow a^2 < ab+ca$. Tương tự ta có $b^2 < ab+bc$ và $c^2 < ca+bc$. Từ đó suy ra $\Delta < 0$.

8A. Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Ta có: $(a-c)x_0 = d-b$

Nếu $a \neq c$ thì $x_0 = \frac{d-b}{a-c}$. Thay x_0 vào phương trình ta được ĐPCM.

Nếu $a = c$ thì $b = d \Rightarrow$ ĐPCM.

8B. Ta có $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a+b)$. Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow a+b = \frac{1}{2}ab$.

Từ đó ta có $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow$ ĐPCM.

9A. a) Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Ta biến đổi được $(1+m)x_0 = m+1$. Tìm được $m = -1$ hoặc $m = 2$.

b) Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Hai phương trình cùng vô nghiệm $\Rightarrow -2, m < \frac{-1}{4}$

Trường hợp 2: Hai phương trình cùng có nghiệm và tập nghiệm giống nhau $\Rightarrow m = -1$.

Vậy $-2 < m < \frac{-1}{4}$ thì hai phương trình tương đương.

9. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

9B. Tương tự 9A

a) Tìm được $a \in \emptyset$

b) Tìm được $\frac{1}{4} < a < \sqrt{3}$

10. Tương tự 1A

a) Tìm được $x \in \left\{ \frac{1}{2}; -\sqrt{2} \right\}$

b) Tìm được $x \in \emptyset$.

c) Tìm được $x \in \left\{ \sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{3} \right\}$

d) Tìm được $x \in \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$

11. Tương tự 5A

a) $m > \frac{-17}{24}$

b) $m = \frac{-17}{24}$

c) $m < \frac{-17}{24}$

d) $m \in \emptyset$

e) $m \geq \frac{-17}{24}$

12. a) $m \neq 0, m > -1$

b) $m = -1$

c) $m < -1$.

d) $m = 0$

e) $m \geq -1$

13. Tương tự 9A

a) Tìm được $m = 2$ hoặc $m = -3$.

b) Tìm được $1 < m < 2\sqrt{2}$