

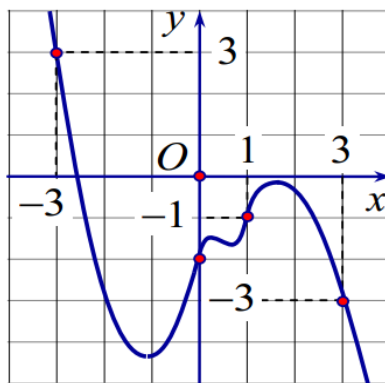
CHỦ ĐỀ 5

TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT HÀM SỐ $y = f'(x)$

DẠNG 1

HÀM SỐ KHÔNG CHỨA THAM SỐ m

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x) = \frac{3}{2f(x) + x^2 + 4}$. Biết rằng $f(1) = -24$. Hỏi trên đoạn $[-3; 3]$ đồ thị hàm số $y = h(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn D.

$$g(x) = 2f(x) + x^2 + 4 \Rightarrow g'(x) = 2(f'(x) + x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Xét hàm số

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ ta được:

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	-	0	+	0
$g(x)$	$g(-3)$				$g(3)$

Gọi a là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. Ta có:

$$\int_{-3}^a |f'(x)| dx < \int_a^3 |f'(x)| dx \Leftrightarrow f(a) - f(-3) < -(f(3) - f(a)) \Leftrightarrow f(-3) > f(3) \Leftrightarrow g(-3) > g(3).$$

3

$$\int_1^3 g'(x) dx < 4 \Leftrightarrow g(3) - g(1) < 4 \Leftrightarrow g(3) < g(1) + 4 \Leftrightarrow g(3) < -39 \Rightarrow g(3) < 0.$$

Lại có:

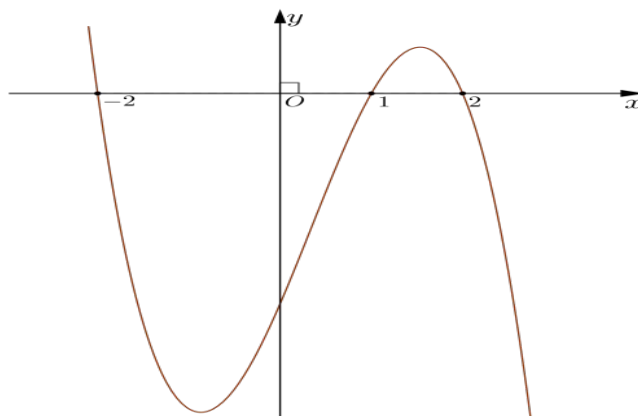
S_{ABCD} là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi 4 đường thẳng: $x = -3; x = 1; y = -5; y = 3$.

$$\int_{-3}^1 (-g'(x)) dx < S_{ABCD} = 32 \Leftrightarrow g(-3) - g(1) < 32 \Leftrightarrow g(-3) < -11.$$

Mặt khác:

Do đó phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm, vậy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(1) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên.



$$g(x) = \frac{2203x}{f^2(x) + f(x)}$$

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A.3.

B.2.

C.5.

D.4.

Lời giải

Chọn C.

$$f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}, \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Ta lập được bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow -\infty$
			0		

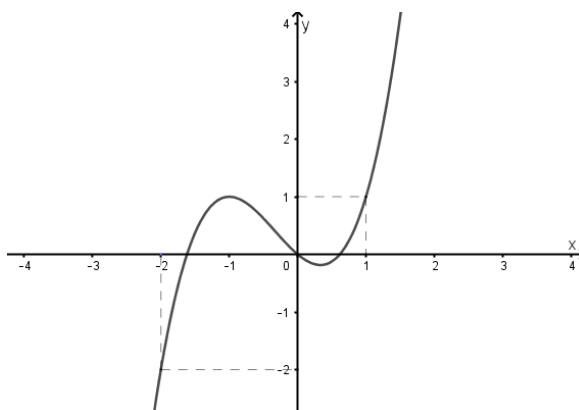
Từ bảng biến thiên ta có:

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0

Phương trình $f(x) = -1$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2203x}{f^2(x) + f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Xét hàm số $y = \frac{1}{f(x) - \frac{x^2}{2}}$. Đặt $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x) - \frac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

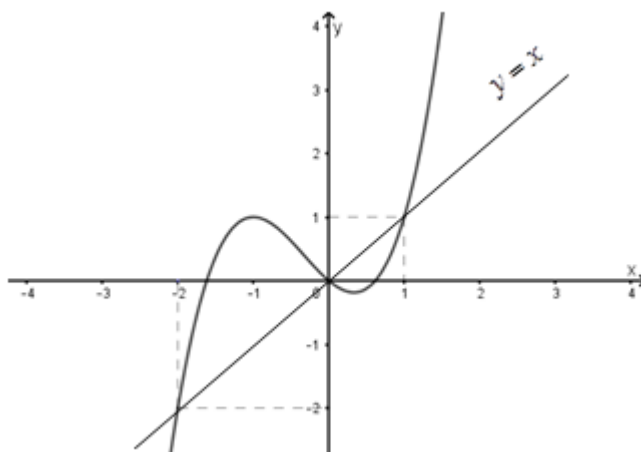
- A. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(1) \cdot g(-2) > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn b.

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x) - \frac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng $\Rightarrow$ Phương trình $f(x) - \frac{x^2}{2} = 0$ phải có 4

nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.



Ta có: $g'(x) = f'(x) - x$

$$g'(0) = f'(0) - 0 = 0, \quad g'(1) = f'(1) - 1 = 0, \quad g'(-2) = f'(-2) + 2 = 0.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra

$$f'(x) < x, \forall x \in (0; 1) \cup (-\infty; -2) \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0; 1) \cup (-\infty; -2).$$

$$f'(x) > x; \forall x \in (1; +\infty) \cup (-2; 0) \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (1; +\infty) \cup (-2; 0).$$

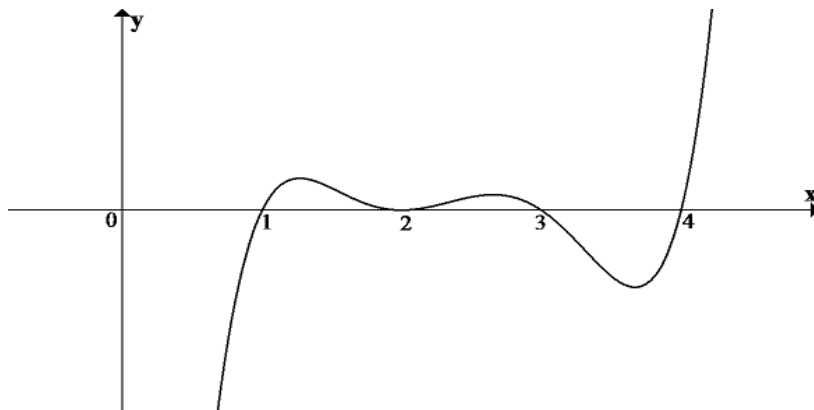
Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$				
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$g(x)$	$+\infty$		$g(-2)$		$g(0)$		$g(1)$		$+\infty$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases}.$$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(1) - 2 < 0$ và $3f(a) - a^3 + 3a > 0, \forall a > 2$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x+1}{3f(x+2) - x^3 + 3x}$ có có số tiệm cận đứng là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn b.

Phương trình $f(x) = 20$ có một nghiệm $x = a > 3$ vì $f(-1) < 20$.

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra $f(x)$ là đa thức bậc 6 và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

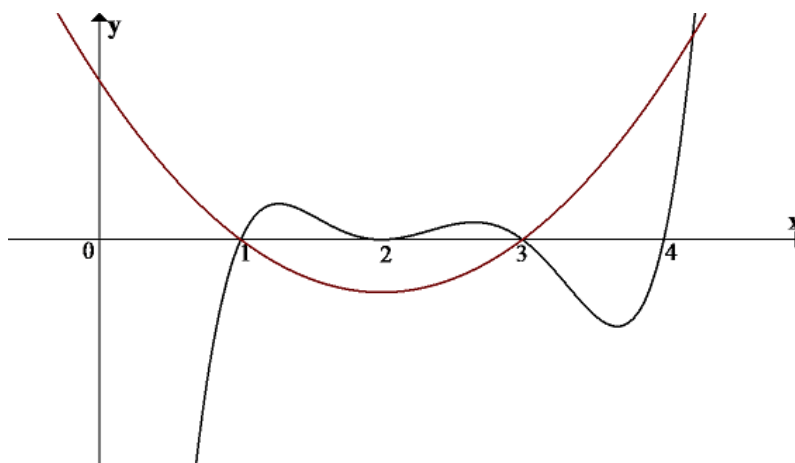
ĐK: $h(x) = 3f(x+2) - x^3 + 3x \neq 0$.

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm $g(x)$ bằng số nghiệm của $h(x)$ khác -1 .

Ta đi tìm số nghiệm của phương trình $h(x) = 0$.

$h'(x) = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3$. Đặt $t = x+2 \Rightarrow h'(x) = k(t) = 3(f'(t) - t^2 + 4t - 3)$.

Khi đó $k(t) = 3(f'(t) - t^2 + 4t - 3) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t^2 - 4t + 3 (*)$



Sử dụng đồ thị nhận thấy (*) có 3 nghiệm là $t = 1; t = 3; t = a > 4 \Rightarrow x = -1; x = 1; x = a - 2 = b > 2$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau :

x	$-\infty$	-1	1	b	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	$+\infty$	$h(-1)$	$h(1)$	$h(b)$	$+\infty$

Ta có: $h(-1) = 3f(1) - 2 < 0; h(b) = 3f(a) - a^3 + 3a > 0; a > 2$.

Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$ ta thấy $h(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

Vậy $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng.

DẠNG 2

HÀM SỐ CHỨA THAM SỐ m

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+		+	0	-	
y	1		3		2		-1

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) - m = 0$ phải có nghiệm.

Từ bbt của hàm số $y = f'(x)$ suy ra tồn tại a, b sao cho $\begin{cases} -1 < a < 1 < b \\ f'(a) = f'(b) = 0 \end{cases}$

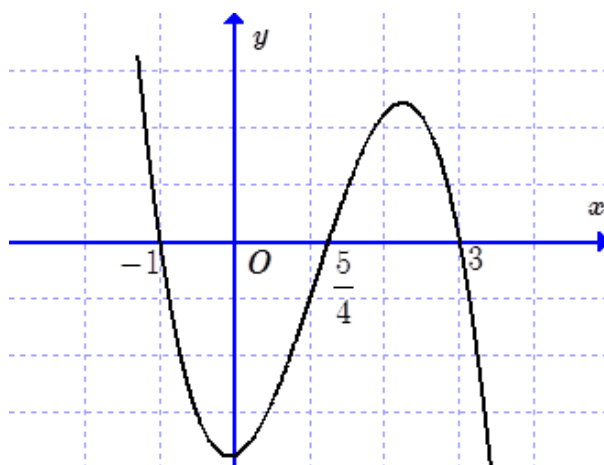
Từ đó ta có bbt của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	a	1	b	$+\infty$
y'		+	-	+	-	
$f(x)$						

Suy ra phương trình $f(x) - m = 0$ có nhiều nhất là 4 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có nhiều nhất 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 6. Cho hàm số $g(x) = \frac{2019}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$), $h(0) = 0$. Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng ?

A. 2 .

B. 10 .

C. 71 .

D. 2019 .

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị suy ra $h'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3) = m(4x^3 - 13x^2 - 2x + 15)$ và $m < 0$.

Ta được $h(x) = m\left(x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x\right)$.

Đồ thị $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $h(x) = m^2 - m$ có 2 nghiệm phân biệt.

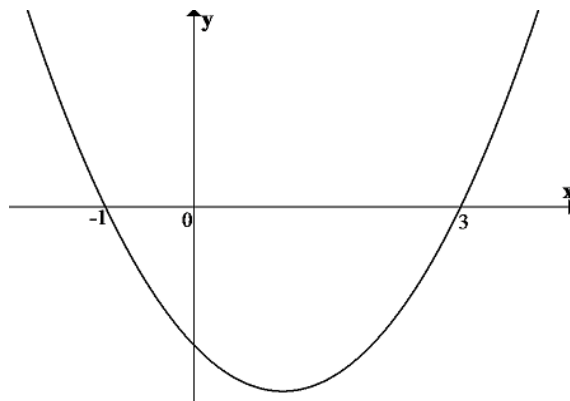
$\Leftrightarrow f(x) = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x = m + 1$
có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$.

x	$-\infty$	-1		$\frac{5}{4}$		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{8575}{768}$			$+\infty$
			$\frac{-32}{3}$			0	

Do đó $m+1 \in \left(\frac{-32}{3}; 0\right) \Leftrightarrow m \in \left(\frac{-35}{3}; -1\right)$. Vậy có 10 số nguyên m .

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 3. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ và $f(-1) < 20$.



Giá trị của m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x) - 20}{f(x) - m}$ có 4 tiệm cận là

- A. $m < f(3)$. B. $f(3) < m < f(-1)$. C. $m > f(-1)$. D. $f(3) \leq m \leq f(-1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	$f(-1)$	$f(3)$	$+\infty$	

ĐK: $f(x) \neq m$

Nếu $m \neq 20$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Nếu $m = 20$ thì

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - 20}{f(x) - m} = 1 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = 1$ là TCN của đồ thị hàm số.

Phương trình $f(x) = 20$ có một nghiệm $x = a > 3$ vì $f(-1) < 20$.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 tiệm cận khi phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt khác a .

Suy ra $f(3) < m < f(-1)$.