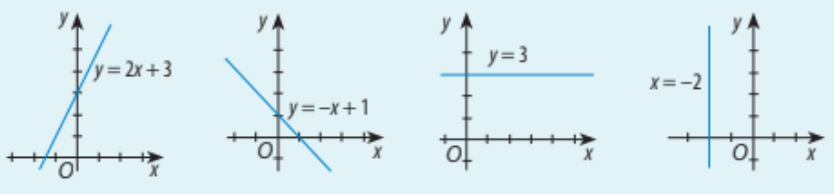
Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

Từ khoá: Vectơ pháp tuyến; Vectơ chỉ phương; Hệ số góc; Phương trình tham số;

Phương trình tổng quát; Góc giữa hai đường thẳng.

Tìm các giá trị của tham số a, b, c để phương trình ax + by + c = 0 có thể biểu diễn được các đường thẳng trong hình dưới đây.



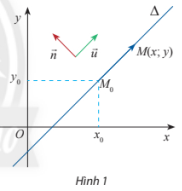
1. Phương trình đường thẳng

Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Trong mặt phăng Oxy, cho đường thẳng đi qua điểm M0 (xo; yo) và cho hai vectơ = (a; b) và = (b; -a) khác vectơ-không. Cho biết có giá song song hoặc trùng với .

a) Tính tích vô hướng . và và nêu nhận xét về phương của hai vectơ , .

b) Gọi M(x; y) là điểm di động trên . Chứng tỏ rằng vectơ luôn cùng phương với vectơ và luôn vuông góc với vectơ .



Vectơ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng nếu và giá của song song hoặc trùng với .

Vectơ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng nếu và vuông góc với vectơ chỉ phương của .

Chú ý:

* Nếu đường thẳng có vectơ pháp tuyến = (a; b) thì sẽ nhận = (b; -a) hoặc = (-b; a) là một vectơ chỉ phương.
* Nếu là vectơ chỉ phương của đường thẳng thì k (k O) cũng là vectơ chỉ phương của .
* Nếu là vectơ pháp tuyến của đường thẳng thì k (k O) cũng là vectơ pháp tuyển của .

blog hotrohoctap.com

Ví dụ 1

Cho đường thẳng có vectơ pháp tuyến = . Tìm vectơ chỉ phương của .

Giải

có vectơ pháp tuyến = , suy ra cũng có vectơ pháp tuyến 2 = (1;-5) và có vectơ chỉ phương = (5; 1).

Phương trình tham số của đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng đi qua điểm M0(x0; y0) và nhận = (u1; u2) làm vectơ chỉ phương. Với mỗi điểm M(x; y) thuộc , tìm toạ độ của M theo toạ độ của M0 và .

Trong mặt phẳng Oxy, ta gọi:

(với u12  + u22 > 0, t)

là phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm M0(x0; y0) có vectơ chỉ phương = (u1; u2).

Chú ý: Cho t một giá trị cụ thể thì ta xác định được một điểm trên đường thẳng và ngược lại.

Ví dụ 2

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A(2; 7) và nhận = (-3; 5) làm vectơ chỉ phương.

b) Tìm toạ độ điểm M trên , biết M có hoành độ bằng -4.

Giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng : .

b) Thay x = -4 vào phương trình x = 2 – 3t, ta được -4 = 2 – 3t, suy ra t = 2.

Thay t = 2 vào phương trình y = 7 + 5t, ta được y = 17.

Vậy M = (-4; 17).

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng d di qua điểm B(-9; 5) và nhận = (8; -4) làm vectơ chỉ phương.

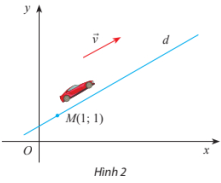
b) Tìm toạ độ điểm P trên , biết P có tung độ bằng 1.

blog hotrohoctap.com

Một trò chơi đua xe ô tô vượt sa mạc trên máy tính đã xác định trước một hệ trục toạ độ Oxy. Cho biết một ô tô chuyển động thăng đều từ điểm M(1; 1) với vectơ vận tốc = (40; 30).

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng d biểu diễn đường đi của ô tô.

b) Tìm toạ độ của xe ứng với t = 2; t = 4.



Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thắng đi qua điểm M0(x0; y0) và nhận = (a; b) làm vectơ pháp tuyến. Với mỗi điểm M(x; y) thuộc , chứng tỏ rằng điểm M(x; y) có toạ độ thỏa mãn phương trình:

ax + by + c = 0 (với c = -ax0 – by0).

Trong mặt phẳng Oxy, mỗi đường thắng đều có phương trình tổng quát dạng

ax + by + c= 0

với a và b không đồng thời bằng 0.

Chú ý:

* Mỗi phương trình ax + by + c = 0 (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một

đường thẳng có vectơ pháp tuyến = (a; b).

* Khi cho phương trình đường thẳng ax + by + c = 0, ta hiểu a và b không đồng thời

bằng 0.

Ví dụ 3

Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d trong các

trường hợp sau:

a) Đường thẳng d đi qua điểm A(2; 1) và có vectơ chỉ phương = (3; 2);

b) Đường thẳng d đi qua điểm B(3; 3) và có vectơ pháp tuyển = (5; -2);

c) Đường thẳng d đi qua hai điểm C(1; 1), D(3;5).

Giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm A(2; 1) và có vectơ chỉ phương = (3; 2), nên ta có phương trình tham số của d là:

.

blog hotrohoctap.com

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương = (3; 2) nên có vectơ pháp tuyền = (2; -3).

Phương trình tổng quát của d là: 2(x – 2) – 3(y – 1) = 0 ⬄ 2x – 3y – 1 = 0.

b) Đường thẳng d có vectơ pháp tuyến = (5; -2) nên có vectơ chỉ phương = (2; 5).

Phương trình tham số của d là:

.

Phương trình tổng quát của d là: 5(x – 3) – 2(y – 3) = 0 ⬄ 5x – 2y – 9 = 0.

c) Đường thẳng d đi qua hai điểm C(1; 1),D(3; 5) nên có vectơ chỉ phương = = (2; 4)

và có vectơ pháp tuyến = (4; -2).

Phương trình tham số của d là: .

Phương trình tổng quát của d là:

4(x – 1) – 2(y – 1) = 0 ⬄ 4x – 2y – 2 = 0 ⬄ 2x – y – 1 =0

Nhận xét:

* Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A(xA; yA), B(xB; yB) có dạng:

= (với xB xA, yB yA).

* Nếu đường thẳng cắt trục Ox và Oy tại A(a; 0) và B(0; b) (a, b khác O) thì phương trình có dạng.

= 1. (1)

Phương trình (1) còn được gọi là phương trình đoạn chắn.

Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) Đường thẳng đi qua điểm A(1; 1) và có vectơ pháp tuyến = (3; 5);

b) Đường thẳng đi qua gốc toạ độ O(0; 0) và có vectơ chỉ phương = (2; -7);

c) Đường thẳng đi qua hai điểm M(4; 0), N(0; 3).

Một người đang lập trình một trò chơi trên máy tính, Trên màn hình máy tính đã xác định trước một hệ trục toạ độ Oxy, Người đó viết lệnh để một điểm M(x; y) từ vị trí A(1; 2) chuyển động thẳng đều với vectơ vận tốc = (3; -4).

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng biểu diễn đường đi của điểm M.

b) Tìm toạ độ của điểm M khi cắt trục hoành.

blog hotrohoctap-com

Liên hệ giữa đồ thị hàm số bậc nhất và đường thẳng

Ta đã biết đồ thị của hàm số bậc nhất y = kx + y, (k 0) là một đường thẳng d đi qua điểm

M(0; y0) và có hệ số góc k. Ta có thể viết: y = kx + y0, ⬄ kx – y + y0 = 0.

Như vậy, đồ thị hàm bậc nhất y = kx + y0 là một đường thẳng có vectơ pháp tuyến = (k; -1) và có phương trình tổng quát là kx – y + y0 = 0. Đường thẳng này không vuông góc với Ox và Oy.

Ngược lại, cho đường thẳng d có phương trình tổng quát ax + by + c = 0 với a và b đều khác 0, khi đó ta có thể viết: ax + by + c = 0 ⬄ y = x – ⬄ y = kx + y0.

Như vậy d là đồ thị của hàm bậc nhất y = kx + y0, với hệ số góc k = và tung độ gốc y0 = - .

Chú ý:

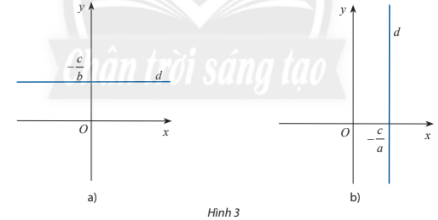
* Nếu a = 0 và b 0 thì phương trình tổng quát ax + by + c = 0 trở thành y = - .

Khi đó d là đường thẳng vuông góc với Oy tại điểm (0; - ) (Hình 3a).

* Nếu b = 0 và a 0 thì phương trình tổng quát ax + by + c = 0 trở thành x = - .

Khi đó d là đường thẳng vuông góc với Ox tại điểm (- ; 0) (Hình 3b).

Trong cả hai trường hợp này, đường thẳng d không phải là đồ thị của hàm số bậc nhất.



Ví dụ 4

Viết phương trình tổng quát của các đường thẳng là đồ thị các hàm số bậc nhất sau:

a) d1: y = 2x + 3; b) d2: y = x + 5; c) d3: y = x.

Giải

a) Ta có y = 2x + 3 ⬄ 2x – y + 3 = 0.

Vậy phương trình tổng quát của d1 là: 2x – y + 3 = 0.

blog hotrohoctap.com

b) Ta có y = x + 5 ⬄ x + 2y – 10 = 0.

Vậy phương trinh tổng quát của d2 là: x + 2y – 10 = 0.

c) Ta có y = x ⬄ x – y = 0.

Vậy phương trình tổng quát của d3 là: x – y = 0.

Tìm các hàm số bậc nhất có đồ thị là các đường thắng trong .

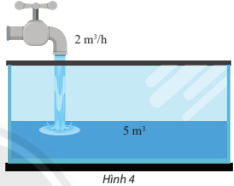
Một người bắt đầu mở một vỏi nước. Nước từ vòi chảy với tốc độ là 2 m3/h vào một cái bể đã

chứa sẵn 5 m3 nước.

a) Viết biểu thức tính thể tích y của nước có trong bề sau x giờ.

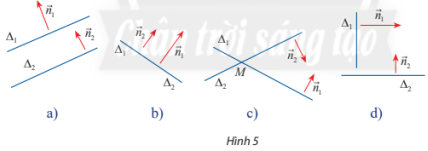
b) Gọi y = f(x) là hàm số xác định được từ câu a). Vẽ đồ thị d của hàm số này.

c) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d.



2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thắng 1 và 2 có vectơ pháp tuyển lần lượt là 1 và 2 .



Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa 1 và 2 trong các trường hợp sau:

a) 1 và 2 cùng phương (Hình 5a, b);

b) 1 và 2 không cùng phương (Hình 5c, d);

c) 1 và 2  vuông góc (Hình 5d).

Trong mặt phằng Oxy, cho hai đường thắng 1:a1x + b1y + c1 = 0 (a12 + b12 > 0) có vectơ pháp tuyến 1, và đường thẳng 2: a2x + b2y + c2 = 0 (a22 + b22 > 0) có vectơ pháp tuyển 2.

blog hotrohoctap.com

Ta có thể dùng phương pháp toạ độ để xét vị trí tương đối giữa 1 và 2 như sau:

Nếu 1 và 2 cùng phương thì 1 và 2 song song hoặc trùng nhau. Lấy một điểm P tuỳ ý trên 1.

* Nếu P 2 thì 1 2.
* Nếu P 2 thì 1 // 2.

Nếu 1 và 2 không cùng phương thì 1 và 2 cắt nhau tại một điểm M(x0; y0) với (x0; y0) là nghiệm của hệ phương trình:

.

Chú ý:

a) Nếu 1 . 2 = 0 thì 1 2, suy ra 1 2.

b) Đề xét hai vectơ 1 (a1; b1) và 2 (a2; b2) cùng phương hay không cùng phương, ta xét biểu thức a1b1 – a2b2:

* Nếu a1b1 – a2b2 = 0 thì hai vectơ cùng phương.
* Nếu a1b1 – a2b2  0 thì hai vectơ không cùng phương.

Trong trường hợp tất cả các hệ số a1, a2, b1, b2 đều khác 0, ta có thể xét hai trường hợp:

* Nếu = thì hai vectơ cùng phương.
* Nếu thì hai vecto không cùng phương.

Ví dụ 5

Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng 1 và 2 trong mỗi trường hợp sau:

a) 1: 2x + y – 2 = 0 và 2: x – 2 = 0; b) 1: 2x + y – 2 = 0 và 2: x – y – 1 = 0;

c) 1: 2x + y – 2 = 0 và 2: 4x + 2y + 3 = 0; d) 1: 2x + y – 2 = 0 và 2: ;

e) 1: và 1: .

Giải

a) 1 và 2 có vectơ pháp tuyển lần lượt là 1 = (2; 1) và 2 = (1; 0).

Ta có: a1b1 – a2b2 = 2 . 0 – 1 . 1 = -1 0, suy ra 1 và 2 là hai vectơ không cùng phương.

Vậy 1 và 2 cắt nhau tại một điểm M. Giải hệ phương trình:

ta được M(2; -2).

blog hotrohoctap.com

b) 1 và 2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là 1 = (2; 1) và 2 = (1; -1).

Ta có: , suy ra 1 và 2 là hai vectơ không cùng phương.

Vậy 1 và 2 cắt nhau tại một điểm M. Giải hệ phương trình:

ta được M(1; 0).

c) 1 và 2 có vectơ pháp tuyển lần lượt là 1 = (2; 1) và 2 = (4; 2).

Ta có , suy ra 1 và 2 là hai vectơ cùng phương. Vậy 1 và 2 song song hoặc

trùng nhau. Lấy điểm M(1; 0) thuộc 1,thay toạ độ của M vào phương trình 2, ta được

4 + 0 + 3 = 7 0, suy ra M không thuộc 2. Vậy 1 // 2.

d) 1 và 2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là 1 = (2; 1) và 2 = (6; 3).

Ta có , suy ra 1 và 2 là hai vectơ cùng phương. Vậy 1 và 2 song song hoặc

trùng nhau.

Lấy điểm P(0; 2) thuộc 2, thay toạ độ của P vào phương trình 1 ta được 0 + 2 – 2 = 0, suy ra P thuộc 2. Vậy 1 2.

e) 1 và 2 có phương trình tổng quát lần lượt là 2x + y – 2 = 0 và x – 2y – 1 = 0, có vectơ

pháp tuyến lần lượt là 1 = (2; 1) và 2 = (1; -2).

Ta có 1 . 2 = 2 . 1 + 1 . (-2) = 0 nên 1 và 2 là hai vectơ vuông góc, suy ra 1 2.

Giải hệ phương trình ta được nghiệm .

Vậy 1 và 2 vuông góc và cắt nhau tại M(1; 0).

Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d1 và d2 trong các trường hợp sau:

a) d1: x – 5y + 9 = 0 và d2: 10x + 2y + 7 = 10;

b) d1: 3x – 4y + 9 = 0 và d2: ;

c) d1: và .

Viết phương trình đường thẳng d1.

a) Đi qua điểm A(2; 3) và song song với đường thẳng d2: x + 3y + 2 = 0;

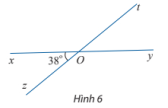
b) Đi qua điểm B(4; -1) và vuông góc với đường thẳng d3: 3x – y + 1 = 0.

blog hotrohoctap.com

3. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng xy và zt cắt nhau tại O và cho biết = 380 (Hình 6).

Tính số đo các góc , và .



Khái niệm góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng 1 và 2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

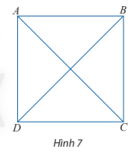
* Nếu 1 không vuông góc với 2 thì góc nhọn trong bốn góc đó được gọi là góc giữa hai đường thẳng 1 và 2.
* Nếu 1 vuông góc với 2 thì ta nói góc giữa 1 và 2 bằng 900.

Ta quy ước: Nếu 1 và 2 song song hoặc trùng nhau thì góc giữa 1 và 2 bằng 00. Như vậy góc giữa hai đường thẳng luôn thoả mãn: 00 900.

Góc giữa hai đường thẳng 1 và 2 được kí hiệu là ( ) hoặc (1, 2).

Ví dụ 6

Cho hình vuông ABCD (Hình 7), tính các góc: (AB, AC), (AB, AD), (AB, DC), (AC, CD).

Giải

Ta có:

* = 450, suy ra (AB, AC) = 450.
* AB vuông góc với AD, suy ra (AB, AD) = 900.
* AB // DC, suy ra (AB, DC) = 00.
* = 450, suy ra (AC, CD) = 450.

Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

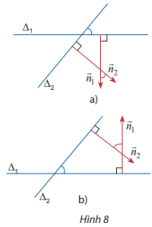
Cho hai đường thẳng

1 a1x + b1y + c1 = 0 (a12 + b12 > 0) và 2: a2x + b2y + c2 = 0 (a22 + b22 > 0) có vectơ pháp tuyến lần lượt là 1 và 2.

Tìm toạ độ của 1 , 2 và tính cos(1 , 2).

blog hotrohoctap.com

Ta thấy góc (1, 2) giữa hai đường thẳng và góc (1 , 2) giữa hai vectơ pháp tuyến luôn bằng nhau hoặc bù nhau (Hình 8).



Ta có công thức:

cos(1, 2) = .

Nhận xét: Nếu 1 và 2 có vectơ chỉ phương 1 , 2 thì cos(1, 2) = |cos(1 , 2)|

Chú ý: Ta đã biết hai đường thẳng vuông góc khi và chỉ khi chúng có hai vectơ pháp tuyến vuông góc. Do đó:

* Nếu 1 và 2 lần lượt có phương trình a1x + b1y + c1 = 0 và a2x + b2y + c2 = 0 thì ta có:

(1, 2) = 900 ⬄ a1a2 + b1b2 = 0.

* Nếu 1 và 2 lần lượt có phương trình y = k1x + m1 và y = k2x + m2 thì ta có:

(1, 2) = 900 ⬄ k1.k2 = -1.

Nói cách khác, hai đường thẳng có tích các hệ số góc bằng -1 thì vuông góc với nhau.

Ví dụ 7

Tim số đo của góc giữa hai đường thẳng d1 và d2 trong các trường hợp sau:

a) d1: 2x + 4y + 5 = 0 và d2: 3x + y + 2022 = 0;

b) d1: x + 2y + 1 = 0 và d2: ;

c) d1: và d2: ;

Giải

a) Ta có: cos(d1, d2) = = = . Suy ra (d1, d2) = 450.

b) d2 có phương trình tổng quát là 2x – y + 99 = 0. Ta có: a1 . a2 – b1 .b2 = 1. 2 + 2 . (-1) = 0, suy ra (d1, d2) = 900.

Hai đường thẳng d1, d2 lần lượt có vectơ chỉ phương là 1 = (2; -7), 2 = (4; -14). Ta có 2 = 21, do đó 1 // 2, suy ra (d1, d2) = 00.

blog hotrohoctap.com

Tìm số đo của góc giữa hai đường thắng 1 và 2 trong các trường hợp sau:

a) 1: x + 3y – 7 = 0 và 2: x – 2y + 3 = 0;

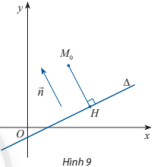
b) 1: 4x – 2y + 5 = 0 và 2: ;

c) 1: và 2: ;

Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng là đồ thị của hai hàm số y = x và y = 2x + 1.

4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng : ax + by + c = 0 (a2 + b2 > 0) có vectơ pháp tuyến và cho điểm M0(x0; y0) có hình chiếu vuông góc H(xH; yH) trên .



a) Chứng minh rằng hai vectơ và 0 cùng phương và tìm toạ độ của chúng.

b) Gọi p là tích vô hướng của hai vectơ và 0.Chứng minh rằng p = ax0 + by0 + c.

c) Giải thích công thức 0| = .

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng có phương trình ax + by + c = 0(a2 + b2 > 0) và điểm M0(x0; y0). Khoảng cách từ điểm M0 đến đường thắng , kí hiệu là d(M0, ), được tính bởi công thức:

d(M0, ) = .

Ví dụ 8

Tính khoảng cách từ các điểm O(0; 0), M(1; 2) đến đường thẳng : 4x + 3y + 5 = 0.

Giải

Ta có: d(O, ) = = = 1, d(M0, ) = = = 3.

Ví dụ 9

Trong một khu vực bằng phẳng, ta lấy hai xa lộ vuông góc với nhau làm hai trục toạ độ và mỗi đơn vị độ dài trên trục tương ứng với 1 km. Cho biết với hệ trục toạ độ vừa chọn thì một trạm viễn thông T có toạ độ (2; 3). Một người đang gọi điện thoại dị động trên chiếc xe khách chạy trên đoạn cao tốc có dạng một đường thẳng có phương trình 6x + 8y – 5 = 1. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông T.

blog hotrohoctap.com

Giải

Khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông T chính là khoảng cách từ T đến đường thẳng . Ta có:

d(T, ) = = = 3,1 (km).

Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là A(1; 1), B(5; 2), C(4; 4). Tính độ dài các đường cao của tam giác ABC.

Tính khoảng cách giữa hai đường thắng d1: 4x – 3y + 2 = 0 và d2: 4x – 3y + 12 = 0.

BÀI TẬP

Các bài toán sau đây được xét trong mặt phẳng Oxy.

1. Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d trong mỗi trường

hợp sau:

a) d đi qua điểm A(-1; 5) và có vectơ chỉ phương = (2; 1);

b) d đi qua điểm B(4; -2) và có vectơ pháp tuyến là = (3; -2);

c) d đi qua P(1; 1) và có hệ số góc k = -2;

d) d đi qua hai điểm Q(3; 0) và R(0; 2).

2. Cho tam giác ABC, biết A(2; 5), B(1; 2) và C(5; 4).

a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng BC.

b) Lập phương trình tham số của trung tuyến AM.

c) Phương trình của đường cao AH.

3. Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng trong mỗi trường

hợp sau:

a) đi qua A(2; 1) và song song với đường thẳng 3x + y + 9 = 0;

b) đi qua B(-1; 4) và vuông góc với đường thẳng 2x – y – 2 = 0.

4. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d1 và d2 sau đây:

a) d1: x – y + 2 = 0 và d2: x + y + 4 = 0; b) d1: và d2: 5x – 2y + 9 = 0;

c) d1: và d2: 3x + y – 11 = 0.

blog hotrohoctap.com

5. Cho đường thẳng d có phương trình tham số .

Tìm giao điểm của d với hai trục toạ độ.

6. Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng d1 và d2 trong các trường hợp sau:

a) d1: x – 2y + 3 = 0 và d2: 3x – y – 11 = 0;

b) d1: và d2: x + 5y – 5 = 0;

c) d1: và d2: .

7. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) M(1; 2) và : 3x – 4y + 12 = 0; b) M(4; 4) và :

c) M(0; 5) và : ; d) M(0; 0) và : 3x + 4y – 25 = 0;

8. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng: : 3x + 4y – 10 = 0 và ’: 6x + 8y – 1 = 0.

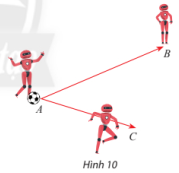
9. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm S(x; y) di động trên đường thẳng d: 12x – 5y + 16 = 0. Tính khoảng cách ngăn nhất từ điểm M(5; 10) đến điểm S.

10. Một người đang viết chương trình cho trò chơi bóng đá rô bốt. Gọi A(-1; 1), B(9; 6), C(5; -3) là ba vị trí trên màn hình.

a) Viết phương trình các đường thẳng AB, AC, BC.

b) Tính góc hợp bởi hai đường thẳng AB và AC.

c) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.



blog hotrohoctap-com