

Người làm: Trần Hoa
Zalo: Trần Hoa - số đt zalo:
Email: tranhoatt1512@gmail.com

CD9: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1. Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (Đề HSG 7 LDP huyện Yên Thế 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{y} = \frac{9}{11}$ và $x + y = 60$. Tính $2x + 3y$?

- A. 50. B. 60. C. 120. **D. 153.**

Lời giải

$\frac{x}{y} = \frac{9}{11} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{11}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{11} = \frac{x+y}{9+11} = \frac{60}{20} = 3$$

Do đó $x = 9 \cdot 3 = 27; y = 11 \cdot 3 = 33$
 $\Rightarrow 2x + 3y = 2 \cdot 27 + 3 \cdot 33 = 153$

Đáp án: D

Câu 2. (Đề HSG 7 LDP huyện Yên Thế 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{5} = \frac{y}{4}$ và $x^2 - y^2 = 9$. Tính tổng bình phương hai số x, y .

- A. 41.** B. 81. C. 9. D. 25.

Lời giải

$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{16}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{16} = \frac{x^2 - y^2}{25 - 16} = \frac{9}{9} = 1$$

Do đó $x^2 = 1 \cdot 25 = 25$
 $y^2 = 1 \cdot 16 = 16$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = 41$

Đáp án: A

Câu 3. (Đề HSG 7 LDP huyện Yên Thế 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{y} = 4$ và $xy = 9$. Khi đó $x^2 + y^2$ bằng bao nhiêu ?

- A. 97. B. 81. C. $\frac{153}{4}$. D. 13.

Lời giải

$$\frac{x}{y} = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{1} = k \Rightarrow x = 4k, y = k$$

$$xy = 9 \Rightarrow 4k \cdot k = 9 \Rightarrow k = \pm \frac{3}{2}$$

Do

$$k = \pm \frac{3}{2} \text{ thì } x^2 + y^2 = (4k)^2 + k^2 = \frac{153}{4}$$

Với

Đáp án: C

B. Tự luận

Câu 1. (Đề HSG 7 LDP huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

a) Tìm x, y biết $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và $x - 2y + 3z = 14$

b) Cho $x, y, z \neq 0$ thoả mãn: $\frac{x+y+2023z}{z} = \frac{y+z+2023x}{x} = \frac{x+z+2023y}{y}$. Tính giá trị của

biểu thức: $A = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$.

Lời giải

a) Ta có $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và $x - 2y + 3z = 14 \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{2(y-2)}{2 \cdot 3} = \frac{3(z-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x-1}{2} = \frac{2(y-2)}{2 \cdot 3} = \frac{3(z-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{x-1-2(y-2)+3(z-3)}{2-2 \cdot 3+3 \cdot 4} = \frac{(x-2y+3z)+(-1+4-9)}{8}$$

$$= \frac{14+(-6)}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = 1$$

Tính được $x = 3; y = 5; z = 7$

Vậy $x = 3; y = 5; z = 7$

b) $\frac{x+y+2023z}{z} = \frac{y+z+2023x}{x} = \frac{x+z+2023y}{y}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+2023z}{z} - 2022 = \frac{y+z+2023x}{x} - 2022 = \frac{x+z+2023y}{y} - 2022$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+z}{z} = \frac{y+z+x}{x} = \frac{x+z+y}{y} \quad (1)$$

- Nếu $x+y+z \neq 0$, từ (1) suy ra $x=y=z$ từ đó tính được $A = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) = 8$
- Nếu $x+y+z = 0$, suy ra :

$$\begin{cases} x+y = -z \\ z+y = -x \\ x+z = -y \end{cases}$$

$$\text{từ đó ta có } A = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{y+z}{z} \cdot \frac{x+z}{x} = \frac{(-z) \cdot (-x) \cdot (-y)}{y \cdot z \cdot x} = -1$$

$$\text{Vậy } A = \begin{cases} 8 & \text{khi } x+y+z \neq 0 \\ -1 & \text{khi } x+y+z = 0 \end{cases}$$

Câu 2. (HSG 7 thị xã Hương Trà năm 2022 - 2023)

$$\text{Cho } \frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \text{ và } 4x^3 - 3 = 29. \text{ Tính } x - 2y + 3z$$

Lời giải

$$\text{Cho } \frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \text{ và } 4x^3 - 3 = 29. \text{ Tính } x - 2y + 3z$$

$$\text{Ta có } 4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

Thay vào tỉ lệ thức ta được:

$$\frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2 \Rightarrow y = -7; z = 1$$

$$\text{Vậy: } x - 2y + 3z = 2 - 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 1 = 19$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Mỹ Đức năm 2022 - 2023)

$$\text{Tìm các số } x, y, z \text{ biết: } \frac{2x-1}{5} = \frac{3y+2}{4} = \frac{4z-2}{3} \text{ và } 3x^3 - 1 = 80$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3x^3 - 1 = 80 \Rightarrow 3x^3 = 81 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Khi đó: } \frac{3y+2}{4} = \frac{4z-2}{3} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3y+2}{4} = 1 \Rightarrow 3y+2 = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4z-2}{3} = 1 \Rightarrow 4z-2 = 3 \Rightarrow z = \frac{5}{4}$$

$$\text{Kết luận } x = 3; y = \frac{2}{3}; z = \frac{5}{4}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Cẩm Khê năm 2022 - 2023)

$$\text{Cho } \frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} \text{ và } 3x^3 - 7 = 17. \text{ Tính } B = x - y + z + 2037$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3x^3 - 7 = 17 \Rightarrow 3x^3 = 24 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Khi đó: } \frac{x+16}{9} = \frac{2+16}{9} = 2$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} = \frac{x+16-y+25+z+9}{9-16+25} = 2 \Rightarrow x - y + z + 50 = 36 \Rightarrow x - y + z = -14$$

$$\Rightarrow x - y + z + 2037 = 2023$$

$$\text{Vậy } x - y + z + 2037 = 2023$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Thái Thụy năm 2022 - 2023)

Tìm các số $x; y; z$ thỏa mãn: $\frac{xy+1}{10} = \frac{yz+2}{27} = \frac{zx+3}{19}$ và $xy + yz + zx = 50$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{xy+1}{10} = \frac{yz+2}{27} = \frac{zx+3}{19} = \frac{xy+1+yz+2+zx+3}{10+27+19} = \frac{56}{56} = 1$$

$$\frac{xy+1}{10} = 1 \Rightarrow xy = 9$$

, tương tự ta cũng có:

$$yz = 25; zx = 16$$

$$\Rightarrow (xyz)^2 = 9 \cdot 25 \cdot 16 = 60^2 \Rightarrow xyz = 60 \text{ hoặc } xyz = -60$$

Với $xyz = -60 \Rightarrow x = \frac{-12}{5}; y = \frac{-14}{5}; z = \frac{-20}{3}$

Với $xyz = 60 \Rightarrow x = \frac{12}{5}; y = \frac{14}{5}; z = \frac{20}{3}$

Câu 6. (HSG 7 trường THCS Tri Thức, huyện Đông Nai năm 2022 - 2023)

Tìm $x; y; z$ thỏa mãn: $\frac{x}{10} = \frac{y}{5}; \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ và $x + 4z = 320$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{10} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{10}$ và $\frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$

Nên: $\frac{x}{20} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{4z}{60} = \frac{x+4z}{20+60} = \frac{320}{80} = 4$

Từ $\frac{x}{20} = 4 \Rightarrow x = 20 \cdot 4 = 80$

$\frac{y}{10} = 4 \Rightarrow y = 10 \cdot 4 = 40$

$\frac{z}{15} = 4 \Rightarrow z = 15 \cdot 4 = 60$

Câu 7. (HSG 7 huyện Nông Công năm 2022 - 2023)

Tìm các số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{y} = \frac{10}{9}; \frac{y}{z} = \frac{3}{4}$ và $x - y + z = 78$

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{9} \\ \frac{y}{z} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{9} = \frac{z}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{x+y+z}{10+9+12} = \frac{78}{31} = 6 \Rightarrow x=60; y=54; z=72$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Thường Xuân năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ và $2x + y = z - 38$

Lời giải

$$3x = 4y = 5z - 3x - 4y \Rightarrow 3x = 4y = 5z - 3x - 4y$$

Ta có:

$$\Rightarrow 9x = 5z \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{z}{9} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{z}{36} \quad (1)$$

Lại có: $3x = 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} \quad (2)$

Từ (1)&(2) $\Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36}$

Mặt khác: $2x + y = z - 38 \Rightarrow 2x + y - z = -38$

Khi đó áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36} = \frac{2x+y-z}{2 \cdot 20 + 15 - 36} = \frac{-38}{19} = -2$$

Suy ra: $x = -2 \cdot 20 = -40, y = -2 \cdot 15 = -30, z = -2 \cdot 36 = -72$

Câu 9. (HSG 7 huyện Thường Xuân năm 2022 - 2023)

Cho x, y, z, t thỏa mãn: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

Tính $P = \left(\frac{x+y}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{y+z}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{z+t}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{t+x}{z+y}\right)^{2023}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z+t} + 1 = \frac{y}{z+t+x} + 1 = \frac{z}{t+x+y} + 1 = \frac{t}{x+y+z} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{y+z+t} = \frac{x+y+z+t}{z+t+x} = \frac{x+y+z+t}{t+x+y} = \frac{x+y+z+t}{x+y+z} \quad (1)$$

+ TH1: $x+y+z+t=0$

Từ (1) $\Rightarrow x+y = -z-t; y+z = -t-x; z+t = -y-x; t+x = -y-z$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{x+y}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{y+z}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{z+t}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{t+x}{z+y}\right)^{2023}$$

$$= \left(\frac{-z-t}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{-x-t}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{-x-y}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{-y-z}{z+y}\right)^{2023}$$

$$= 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$$

+ TH2: $x + y + z + t \neq 0$

Từ (1) $\Rightarrow y + z + t = z + t + x = t + x + y = x + y + z \Rightarrow x = y = z = t$

Thay các biến y, z, t bởi x ta được:

$$P = \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2020} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2021} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2022} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2023}$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Vậy: $P = 0$ hoặc $P = 4$

Câu 10. (HSG 7 trường THCS Lê Quý Đôn, quận Hà Đông năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z}$ và $x + y - z = -10$

Lời giải

Từ $\frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z} \Rightarrow \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$

$$= \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{2} = \frac{(12x-8y)+(6z-12x)+(8y-6z)}{27} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2z = 4x \\ 4y = 3z \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y-z}{2+3-4} = -10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = -30 \\ z = -40 \end{cases}$$

Vậy $(x, y, z) = (-20; -30; -40)$

Câu 11. (HSG 7 huyện Nga Sơn, Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$

Lời giải

+ Nếu $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c; b + c = -a; a + c = -b$

Khi đó $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} = (-1) + (-1) + (-1) = -3$

+ Nếu $a + b + c \neq 0$ thì: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$

Suy ra $b + c = 2a; c + a = 2b; a + b = 2c$

Khi đó $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 6$. Vậy: $P = -3$ hoặc $P = 6$.

Câu 12. (HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$.

Lời giải

Ta có $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} = k$.

$\Rightarrow x = 15k; y = 20k; z = 24k$.

$M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{2.15k+3.20k+4.24k}{3.15k+4.20k+5.24k} = \frac{186k}{245k} = \frac{186}{245}$.

Vậy $M = \frac{186}{245}$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+2} = \frac{z}{x+y-3} = x+y+z$

Lời giải

$\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+2} = \frac{z}{x+y-3} \Rightarrow \frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z}$

Từ :

$= \frac{(y+z+1)+(x+z+2)+(x+y-3)}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 = x+y+z$

Suy ra : $y+z+1=2x \Rightarrow x+y+z=3x-1=2 \Rightarrow x=1$

$x+z+2=2y \Rightarrow x+y+z=3y-2=2 \Rightarrow y=\frac{4}{3}$

$x+y-3=2z \Rightarrow x+y+z=3z+3=2 \Rightarrow z=\frac{-1}{3}$

Câu 14. (HSG 7 trường THCS Kỳ Đồng, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm các số hữu tỉ x, y . Biết: $\frac{x^3+y^3}{6} = \frac{x^3-2y^3}{4}$ và $x^6.y^6=64$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{x^3+y^3}{6} = \frac{x^3-2y^3}{4} = \frac{(x^3+y^3)-(x^3-2y^3)}{6-4}$

$= \frac{2(x^3+y^3)+(x^3-2y^3)}{2.6+4} = \frac{3y^3}{2} = \frac{3x^3}{16}$

$\Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{8} \Rightarrow \frac{x^6}{64} = \frac{y^6}{1} \Rightarrow \frac{y^{12}}{1} = \frac{x^6 y^6}{64} = 1$

$\Rightarrow y^{12} = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases}$

+ Với $y = 1 \Rightarrow x = 2$

+ Với $y = -1 \Rightarrow x = -2$

Vậy $x = 2; y = 1$ hoặc $x = -2; y = -1$

Vậy $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; -1)\}$

Câu 15. (HSG 7 trường THCS Kỳ Đồng, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{12x - 15y}{7} = \frac{20z - 12x}{9} = \frac{15y - 20z}{11}$ và $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2000$

Lời giải

Ta có: $\frac{12x - 15y}{7} = \frac{20z - 12x}{9} = \frac{15y - 20z}{11}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{12x - 15y}{7} = \frac{20z - 12x}{9} = \frac{15y - 20z}{11} = \frac{(12x - 15y) + (20z - 12x) + (15y - 20z)}{7 + 9 + 11} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12x - 15y = 0 \\ 20z - 12x = 0 \end{cases} \Rightarrow 12x = 15y = 20z$$

$$\Rightarrow \frac{12x}{60} = \frac{15y}{60} = \frac{20z}{60} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = k \Rightarrow x = 5k, y = 4k, z = 3k$

Mà $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2000$

$$\Rightarrow (5k)^2 - 2 \cdot (4k)^2 + 3(3k)^2 = 2000$$

$$\Rightarrow 25k^2 - 32k^2 + 27k^2 = 2000$$

$$\Rightarrow 20k^2 = 2000 \Rightarrow k^2 = 100$$

Do đó $k = 10$ hoặc $k = -10$

+) Với $k = 10$. Tính được $x = 50, y = 40, z = 30$

+ Với $k = -10$. Tính được $x = -50, y = -40, z = -30$

Vậy : $x = 50, y = 40, z = 30$ hoặc $x = -50, y = -40, z = -30$

Câu 16. (HSG 7 trường THCS Phạm Đôn Lễ, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$

Lời giải

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} \quad (1)$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{(1+3y)+(1+7y)}{12+4x} = \frac{2+10y}{12+4x} = \frac{2 \cdot (1+5y)}{2 \cdot (6+2x)} = \frac{1+5y}{6+2x} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+5y}{6+2x}$

$$\Rightarrow 5x = 6+2x$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào (1) ta được $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{10}$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{15}$$

Vậy $x = 2; y = -\frac{1}{15}$

Câu 17. (HSG 7 trường THCS Phạm Đôn Lễ, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho các số $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn: $\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c}$

Tính giá trị biểu thức: $P = \left(1 + \frac{c}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right)$

Lời giải

Ta có $P = \left(1 + \frac{c}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right) = \frac{b+c}{b} \cdot \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c}$

*) TH 1: Nếu $a+b+c = 0$ thì:

$$\begin{cases} a+b = -c \\ b+c = -a \\ a+c = -b \end{cases} \text{ Thay vào biểu thức } P \text{ ta có:}$$

$$P = \frac{-a}{b} \cdot \frac{-c}{a} \cdot \frac{-b}{c} = -1 \quad (\text{vì } a, b, c \neq 0)$$

*) TH 2: Nếu $a+b+c \neq 0$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c} = \frac{a-b+c+c-a+b+a-c+b}{2b+2a+2c} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

Suy ra:

$$\frac{a-b+c}{2b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-b+c}{b} = 1 \Rightarrow a-b+c = b \Rightarrow a+c = 2b$$

$$\frac{c-a+b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c-a+b}{a} = 1 \Rightarrow c-a+b = a \Rightarrow c+b = 2a$$

$$\frac{a-c+b}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-c+b}{c} = 1 \Rightarrow a-c+b = c \Rightarrow a+b = 2c$$

$$P = \frac{2a}{b} \cdot \frac{2c}{a} \cdot \frac{2b}{c} = 8$$

Thay vào biểu thức P ta có

Vậy $P = 1$ nếu $a + b + c = 0$; $P = 8$ nếu $a + b + c \neq 0$

Câu 18. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm số \overline{xyz} biết $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$ và $x - y + z = 4$

Lời giải

Theo bài ra ta có: $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$ và $x, y, z \in \mathbb{N}, x \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x - y + z}{2 - 3 + 5} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow x = 2; y = 3; z = 5 \quad \text{Vậy } \overline{xyz} = 235$$

Câu 19. (HSG 7 trường Thái Hưng, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho ba số $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z}$$

$$B = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức:

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z} \Rightarrow \frac{y+z}{x} - 1 = \frac{z+x}{y} - 1 = \frac{x+y}{z} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow B = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{y+z}{z} \cdot \frac{z+x}{x} = \frac{x+y}{z} \cdot \frac{z+x}{y} \cdot \frac{y+z}{x} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\text{Vậy } B = 8$$

Câu 20. (HSG 7 trường Lý Nam Đế, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{y} = \frac{10}{9}; \frac{y}{z} = \frac{3}{4}$ và $x - y + z = 78$

Lời giải

$$\frac{x}{y} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{9} \quad (1)$$

$$\frac{y}{z} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{9} = \frac{z}{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{x - y + z}{10 - 9 + 12} = \frac{78}{13} = 6 \Rightarrow x = 60, y = 54, z = 72$$

$$\text{Vậy: } x = 60, y = 54, z = 72$$

Câu 21. (HSG 7 trường Thống Nhất, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết:

$$a) \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9} \text{ và } x - 3y + 4z = 62$$

$$b) \frac{5z - 6y}{6} = \frac{6x - 4z}{7} = \frac{4y - 5x}{8} \text{ và } 3x - 2y + 5z = 96$$

Lời giải

a) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9} = \frac{3y}{9} = \frac{4z}{36} = \frac{x - 3y + 4z}{4 - 9 + 36} = \frac{x - 3y + 4z}{31} = \frac{62}{31} = 2$$

Suy ra $x = 4.2 = 8$; $y = 3.2 = 6$; $z = 9.2 = 18$

Vậy $x = 8$, $y = 6$, $z = 18$

b) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{aligned} \frac{5z - 6y}{6} = \frac{6x - 4z}{7} = \frac{4y - 5x}{8} &= \frac{20z - 24y}{24} = \frac{30x - 20z}{35} = \frac{24y - 30x}{48} \\ &= \frac{(20z - 24y) + (30x - 20z) + (24y - 30x)}{24 + 35 + 48} = \frac{0}{107} = 0 \end{aligned}$$

$$5z - 6y = 6x - 4z = 4y - 5x \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{z}{6} = \frac{y}{5}$$

Suy ra

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{x}{4} = \frac{z}{6} = \frac{y}{5} = \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x - 2y + 5z}{32} = \frac{96}{32} = 3$$

Do đó $x = 4.3 = 12$; $y = 6.3 = 18$; $z = 5.3 = 15$

Vậy $x = 12$; $y = 18$; $z = 15$

Câu 22. (HSG 7 trường Trần Thái Tông, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$.

Hãy tính giá trị biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau .Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} \\ &= \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{c+a+b} \\ &= \frac{a+b+c}{a+b+c} \\ &= 1 \quad (a+b+c \neq 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ b+c=2a \\ c+a=2b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B &= \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{b}\right) \\ &= \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} \\ &= \frac{2c}{a} \cdot \frac{2b}{c} \cdot \frac{2a}{b} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \quad (a, b, c > 0) \end{aligned}$$

Vậy $B = 8$

Câu 23. (HSG 7 trường Tây Đô, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2016x + y^{2017} + z^{2017}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{aligned} \frac{y+z+1}{x} &= \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2 \\ \Rightarrow x+y+z &= 0,5 \\ \frac{0,5-x+1}{x} &= \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2 \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Khi đó ta có $A = 2016x + y^{2017} + z^{2017} = 1008$

Dạng 24. Chứng minh đẳng thức

A. Trắc nghiệm (nếu có): Không có

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Cẩm Khê năm 2022 - 2023)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a-b+c} = \frac{z}{4a-4b+c}$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa và $a, b, c \neq 0$)

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c} = \frac{x+2y+z}{9a}$$

Tương tự ta có kết quả :

$$\frac{x+2y+z}{9a} = \frac{2x+y-z}{9b} = \frac{4x-4y+z}{9c}$$

Do các tỉ số đều có nghĩa suy ra : $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$

Câu 2. (HSG 7 trường THCS – THPT Tri Thức, tỉnh Đồng Nai năm học 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{c^2 + b^2}$ (1)

$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow a.b = c^2$ nên nhân a vào cả 2 vế ta được $a^2.b = c^2.a \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{a}{b}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tiên Du, tỉnh Bắc Ninh năm 2022 - 2023)

Cho các số có hai chữ số \overline{ab} ; \overline{bc} thỏa mãn $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c}$ ($c \neq 0$)

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$

Lời giải

Ta có: $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{10a+b}{10b+c} \Rightarrow \frac{10a+b}{10b+c} = \frac{b}{c}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{b}{c} = \frac{10a+b-b}{10b+c-c} = \frac{10a}{10b} = \frac{a}{b}$ suy ra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Suy ra $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ (1)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$

Câu 4. (HSG 7 Cẩm Thủy, Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$. Chứng minh:

$\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \left(\frac{a-c}{b-d}\right)^{2013}$ (1)

Mà: $\left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013}}{b^{2013}} = \frac{c^{2013}}{d^{2013}} = \frac{a^{2013} + c^{2013}}{b^{2013} + d^{2013}}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$ (đpcm)

Câu 5. (HSG 7 Nga Sơn, Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$

$\Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{2022a^2}{2022b^2} = \frac{2023c^2}{2023d^2} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$

Vậy $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$.

Câu 6. (HSG 7 Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR: $\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}$, Với điều kiện mẫu thức xác định

Lời giải

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ta có $a = bk, c = dk$

Thay $a = bk, c = dk$ ta có:

$\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2(bk)^2 - 3(bk) \cdot b + 5b^2}{2b^2 + 3bk \cdot b} = \frac{b^2 \cdot (2k^2 - 3k + 5)}{b^2(2 + 3k)} = \frac{2k^2 - 3k + 5}{2 + 3k}$

$\frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd} = \frac{2(dk)^2 - 3(dk)d + 5d^2}{2d^2 + 3(dk)d} = \frac{d^2(2k^2 - 3k + 5)}{d^2 \cdot (2 + 3k)} = \frac{2k^2 - 3k + 5}{2 + 3k}$

Vậy $\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}$

Câu 7. (HSG 7 Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4}$, Chứng minh rằng: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4} = \frac{ab+ac - (bc+ba) + ca+cb}{2-3+4}$

$$= \frac{ab + ac + bc + ba - (ca + cb)}{2 + 3 - 4} = \frac{-(ab + ac) + bc + ba + ca + cb}{-2 + 3 + 4}$$

$$= \frac{2ac}{3} = \frac{2ab}{1} = \frac{2bc}{5}$$

Từ $\frac{2ac}{3} = \frac{2ab}{1} \Rightarrow \frac{c}{3} = b \Rightarrow \frac{c}{15} = \frac{b}{5}$

$$\frac{2ac}{3} = \frac{2bc}{5} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5}$$

Do đó $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$. (đpcm)

Dạng 3. Chứng minh bất đẳng thức

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 trường Kỳ Đồng, Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d > 0$, Chứng minh: $M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$ có giá trị không nguyên.

Lời giải

Với $a, b, c, d > 0$, ta có:

$$\frac{a+b}{a+b+c} > \frac{a+b}{a+b+c+d}; \quad \frac{b+c}{b+c+d} > \frac{b+c}{a+b+c+d}; \quad \frac{c+d}{c+d+a} > \frac{c+d}{a+b+c+d};$$

$$\frac{d+a}{a+b+d} > \frac{d+a}{a+b+c+d}$$

Cộng theo vế ta được: $\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} > \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2(*)$

Với $a, b, c, d > 0$, ta có:

$$\frac{a+b+c}{a+b+c} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+d}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d}$$

Mà $\frac{c}{a+b+c} > \frac{c}{a+b+c+d}$ ($a, b, c, d > 0$) nên suy ra:

$$\frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \quad (2)$$

$$\frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d} \quad (3)$$

$$\frac{d+a}{a+b+d} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) cộng theo vế ta được:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < \frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 3(**)$$

Từ (*) và (**)

$$2 < M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$$

Vậy với $a, b, c, d > 0$, M có giá trị không nguyên (đpcm)

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

Cho $(x_1p - y_1q)^{2n} + (x_2p - y_2q)^{2n} + (x_3p - y_3q)^{2n} + \dots + (x_mp - y_mq)^{2n} \leq 0$

với $m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_m} = \frac{q}{p}$

Lời giải

Cho $(x_1p - y_1q)^{2n} + (x_2p - y_2q)^{2n} + (x_3p - y_3q)^{2n} + \dots + (x_mp - y_mq)^{2n} \leq 0$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_m} = \frac{q}{p}$

Ta có: $(x_1p - y_1q)^{2n} \geq 0; (x_2p - y_2q)^{2n} \geq 0; (x_3p - y_3q)^{2n} \geq 0; \dots; (x_mp - y_mq)^{2n} \geq 0$

$\Rightarrow (x_1p - y_1q)^{2n} + (x_2p - y_2q)^{2n} + (x_3p - y_3q)^{2n} + \dots + (x_mp - y_mq)^{2n} \geq 0$

Mà $(x_1p - y_1q)^{2n} + (x_2p - y_2q)^{2n} + (x_3p - y_3q)^{2n} + \dots + (x_mp - y_mq)^{2n} \leq 0$ (gt)

$\Rightarrow x_1p - y_1q = x_2p - y_2q = x_3p - y_3q = \dots = x_mp - y_mq$

Do đó $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_m}{y_m} = \frac{q}{p}$ hay $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_m} = \frac{q}{p}$

Câu 3. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn, huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \neq 0$ thỏa mãn điều kiện: $b^2 = ac; c^2 = bd; b^3 + c^3 + d^3 \neq 0$

Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Lời giải

Từ giả thiết: $b^2 = ac; c^2 = bd \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} \quad (1)$$

Lại có: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d} \quad (2)$

Từ (1) và (2): $\Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Câu 4. (HSG 7 trường Lý Nam Đế, huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

Cho bốn số a, b, c, d thỏa mãn $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d}$

M có giá trị nguyên biết: $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{d+a}{b+c}$
 Chứng minh rằng biểu thức

Lời giải

$$\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} \Rightarrow \frac{a}{b+c+d} + 1 = \frac{b}{a+c+d} + 1 = \frac{c}{a+b+d} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+b+d}$$

Ta xét hai trường hợp

+) Nếu $a+b+c+d = 0$

Vì $a+b+c+d = 0$ nên $a+b = -(c+d) \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = -1$.

Tương tự ta cũng có: $\frac{b+c}{d+a} = -1; \frac{d+a}{b+c} = -1$

Suy ra: $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{d+a}{b+c} = -3$

+) Nếu $a+b+c+d \neq 0$. Từ $\frac{a+b+c+d}{b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+b+d}$

ta được: $\Rightarrow b+c+d = a+c+d = a+b+d \Rightarrow a=b=c$

Do đó $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{d+a}{b+c} = 1+1+1 = 3$

Vậy biểu thức $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{d+a}{b+c}$ có giá trị nguyên

Câu 5. (HSG 7 trường Thống Nhất, huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa mãn: $a+c = 2b$ và $c(b+d) = 2bd$

Chứng minh: $\left(\frac{a+c}{b+d}\right)^8 = \frac{a^8+c^8}{b^8+d^8}$

Lời giải

Ta có $c(b+d) = 2bd = (a+c)d$ nên $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$

Mặt khác $c(b+d) = (a+c)d \Rightarrow bc+cd = ad+cd \Rightarrow bc = ad \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = t$

$$\Rightarrow t^8 = \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^8 = \frac{a^8}{b^8} = \frac{c^8}{d^8} = \frac{a^8+c^8}{b^8+d^8}$$

Câu 6. (HSG 7 trường Thái Phương, huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{2022} = \frac{y}{2023} = \frac{z}{2024}$. Chứng minh rằng: $4(x-y)(y-z) = (z-x)^2$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2020} = \frac{y}{2021} = \frac{z}{2022} = \frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1} = \frac{z-x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)^2}{1} = \frac{(z-x)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4(x-y)^2 = (z-x)^2 \Rightarrow 4(x-y)(x-y) = (z-x)^2$$

$$\text{Mà } \frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1} \Rightarrow (x-y) = (y-z)$$

$$\text{Do đó } 4(x-y)(y-z) = (z-x)^2$$

$$\text{Vậy } 4(x-y)(y-z) = (z-x)^2 \quad (\text{đpcm})$$

Dạng 4. Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

A. Trắc nghiệm (nếu có) : Không có

B. Tự luận

Câu 1. (Đề HSG 7 LDP huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 7^2 , các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn tỷ lệ với $2;3;4$.

Lời giải

Gọi ba chữ số của số cần tìm là $a; b; c$ (Điều kiện $a; b; c \in \mathbb{N}^*; a < b < c \leq 9$)

Theo bài ra: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và số có ba chữ số \overline{abc} chia hết cho 7^2

Ta có \overline{abc} chia hết cho 7^2 nên \overline{abc} chia hết cho 8 và \overline{abc} chia hết cho 9

\overline{abc} chia hết cho $9 \Rightarrow (a+b+c):9$ mà $a; b; c \in \mathbb{N}^*; 0 < a+b+c < 27$

Nên $a+b+c \in \{9, 18\}$

Từ $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4}$

+) Nếu $a+b+c = 9 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4} = \frac{9}{9} = 1$

$$\Rightarrow a = 2; b = 3; c = 4$$

Ta được các số $234; 243; 324; 342; 423; 432$. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số 432 thỏa mãn.

$$\text{+) Nếu } a + b + c = 18 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\Rightarrow a = 4; b = 6; c = 8$$

Ta được các số $468; 486; 648; 684; 864; 846$ Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số $648; 864$ thỏa mãn.

Vậy số phải tìm là $432; 648; 864$

Câu 2. (Đề HSG 7 huyện Mỹ Đức, thành phố Hà Nội năm 2022 - 2023)

Một giá sách có tổng số 51 quyển sách được xếp vào 3 ngăn. Nếu ngăn thứ nhất xếp thêm 1 quyển, ngăn thứ hai bớt đi 5 quyển và ngăn thứ ba xếp thêm 1 quyển thì số sách ở mỗi ngăn tỉ lệ nghịch với $15; 20; 12$. Tìm số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

Lời giải

Gọi số sách ở ngăn 1, ngăn 2, ngăn 3 lúc đầu lần lượt là: x, y, z
 $(x, y, z \in \mathbb{N}^*; x < 51; 5 < y < 51; z < 51)$

Do tổng số sách là 51 quyển nên ta có $x + y + z = 51$

Khi ngăn thứ nhất thêm 1 quyển, ngăn thứ hai bớt đi 5 quyển và ngăn thứ ba xếp thêm 1 quyển thì số sách ở mỗi ngăn tỉ lệ nghịch với $15; 20; 12$.

Nên ta có: $15(x+1) = 20(y-5) = 12(z+1)$

$$\Rightarrow \frac{15(x+1)}{60} = \frac{20(y-5)}{60} = \frac{12(z+1)}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{5} = \frac{x+y+z-3}{12} = \frac{51-3}{12} = 4$$

$$\Rightarrow x = 15, y = 17, z = 19$$

Vậy số sách lúc đầu ở ngăn 1, ngăn 2, ngăn 3 lần lượt là: 15 quyển, 17 quyển, 19 quyển.

Câu 3. (Đề HSG 7 huyện Thái Thụy năm 2022 - 2023)

Trong kỳ thi khảo sát năng lực học sinh môn Toán của huyện A , ba khối $6, 7, 8$ có 458 học sinh đăng ký tham gia. Khi khảo sát khối 6 giảm 5 học sinh, khối 7 giữ nguyên, khối 8 giảm 3 học sinh nên số học sinh tham gia khảo sát của khối $6, 7, 8$ lần lượt tỉ lệ với $6; 5; 4$. Tính số học sinh mỗi khối đăng ký tham gia khảo sát.

Lời giải

Gọi số học sinh khối $6; 7; 8$ đăng ký tham gia khảo sát lần lượt là: x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 458$. Số học sinh khối 6; 7; 8 tham gia khảo sát lần lượt là $x - 5; y; z - 3$.

Vì khi khảo sát khối 6 giảm 5 học sinh, khối 7 giữ nguyên, khối 8 giảm 3 học sinh nên số

học sinh tham gia khảo sát của khối 6, 7, 8 lần lượt tỉ lệ với 6; 5; 4 nên $\frac{x-5}{6} = \frac{y}{5} = \frac{z-3}{4}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x-5}{6} = \frac{y}{5} = \frac{z-3}{4} = \frac{x-5+y+z-3}{6+5+4} = \frac{x+y+z-8}{15} = \frac{450}{15} = 30$$

$$\Rightarrow \frac{x-5}{6} = 30 \Rightarrow x = 185 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\frac{y}{5} = 30 \Rightarrow y = 150 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\frac{z-3}{4} = 30 \Rightarrow z = 123 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy số học sinh khối 6; 7; 8 đăng ký tham gia khảo sát lần lượt là: 185; 150; 123 học sinh.

Câu 4. (Đề HSG 7 huyện Nông Cống năm 2022 - 2023)

Ba đội công nhân làm ba khối lượng công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai trong 6 ngày. Hỏi đội thứ ba hoàn thành công việc trong bao nhiêu ngày? Biết rằng tổng số người của đội một và đội hai gấp 5 lần số người của đội ba.

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số người của đội thứ nhất, thứ hai và thứ ba ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Vì tổng số người của đội một và đội hai gấp 5 lần số người của đội ba nên: $x + y = 5z$.

Gọi t là số ngày để đội thứ ba hoàn thành công việc ($t > 0$).

Vì khối lượng công việc như nhau nên số người của mỗi đội tỉ lệ nghịch với số ngày hoàn thành công việc. Như vậy ta có: $4x = 6y = tz$.

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = \frac{x+y}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{5z}{\frac{5}{12}} = 12z$$

Suy ra:

$$tz = 12z \Leftrightarrow t = 12 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy đội thứ ba hoàn thành công việc trong 12 ngày

Câu 5. (Đề HSG 7 thị xã Kỳ Anh năm 2022 - 2023)

Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích là $84m^2$; tỉ số giữa chiều rộng và chiều dài bằng $\frac{3}{7}$. Độ dài của hàng rào bao quanh mảnh đất trên bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Vì tỉ số giữa chiều rộng và chiều dài là $\frac{3}{7}$ nên đặt chiều dài là $7k$, chiều rộng là $3k$ ($k > 0$)

Do diện tích của mảnh đất là $84m^2$ nên $3k \cdot 7k = 84 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$ do $k > 0$

Với $k = 2$ thì chiều rộng của mảnh đất là $3 \cdot 2 = 6m$, chiều dài của mảnh đất là $7 \cdot 2 = 14m$

Vậy độ dài hàng rào bao quanh mảnh đất là $2 \cdot (6 + 14) = 40m$

Câu 6. (Đề HSG 7 huyện Sóc Sơn, thành phố Hà Nội năm 2021 - 2022)

Trong một đợt thu kế hoạch nhỏ, ba khối $7;8;9$ của một trường THCS đã thu gom được $912kg$ giấy vụn. Trung bình mỗi học sinh khối $7;8;9$ theo thứ tự nộp là $1,2(kg);1,4(kg);1,6(kg)$ giấy vụn. Biết rằng số học sinh khối $7;8$ tỉ lệ với 1 và 3 ; Số học sinh khối 8 và 9 tỉ lệ với 4 và 5 . Tính số học sinh của mỗi khối.

Lời giải

Gọi số học sinh khối $7;8;9$ lần lượt là $x; y; z (x, y, z \in \mathbb{N})$

Trung bình mỗi học sinh khối $7;8;9$ theo thứ tự nộp là $1,2(kg);1,4(kg);1,6(kg)$ giấy vụn nên ta có:

$$1,2x + 1,4y + 1,6z = 912 \quad (1)$$

Số học sinh khối 8 và 9 tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{z}{5} \quad (2)$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{1,2x}{4,8} = \frac{1,4y}{16,8} = \frac{1,6z}{24} = \frac{1,2x + 1,4y + 1,6z}{4,8 + 16,8 + 24} = \frac{912}{45,6} = 20$$

Suy ra: $x = 4 \cdot 20 = 80; y = 12 \cdot 20 = 240; z = 15 \cdot 20 = 300$ (thỏa mãn)

Vậy số học sinh khối $7;8;9$ lần lượt là 80 học sinh, 240 học sinh, 300 học sinh.

Câu 7. (Đề HSG 7 trường Lê Quý Đôn, Hà Đông năm 2022 - 2023)

Trong kì thi giao lưu học sinh giỏi cấp trường, ba khối $6,7,8$ có tất cả 342 học sinh dự thi. Tính số học sinh dự thi của mỗi khối, biết rằng nếu tăng $\frac{3}{13}$ số học sinh dự thi của khối lớp 6, tăng $\frac{5}{11}$ số học sinh dự thi của khối lớp 7 và tăng $\frac{1}{7}$ số học sinh dự thi của khối lớp 8 thì số học sinh dự thi của mỗi khối là như nhau.

Lời giải

Gọi tổng số học sinh dự thi giao lưu học sinh giỏi môn toán cấp trường của ba khối $6;7;8$ lượt là $a, b, c (a, b, c \in \mathbb{N}^*)$

Theo bài ra ta có: $a + \frac{3}{13}a = b + \frac{5}{11}b = c + \frac{1}{7}c (*)$ và $a + b + c = 360$

$$\Rightarrow \frac{16a}{13} = \frac{16b}{11} = \frac{8c}{7} \Rightarrow \frac{16a}{13} = \frac{16b}{11} = \frac{16c}{14} \Rightarrow \frac{a}{13} = \frac{b}{11} = \frac{c}{14}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{11} = \frac{c}{14} = \frac{a+b+c}{13+11+14} = \frac{342}{38} = 9 \Rightarrow a = 117, b = 99, c = 126$$

Vậy tổng số học sinh dự thi giao lưu học sinh giỏi môn toán cấp trường của ba khối $6;7;8$ lần lượt là $117;99;126$

Câu 8. (Đề HSG 7 huyện Cẩm Thủy, Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309 . Tìm số A

Lời giải

Gọi ba phần được chia lần lượt là: a, b, c

Theo bài ra ta có: $a:b:c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$

Ta có: $a:b:c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow \frac{a^2}{576} = \frac{b^2}{2025} = \frac{c^2}{100} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{576 + 2025 + 100} = \frac{24309}{2701} = 9$$

$$\Rightarrow a^2 = 576 \cdot 9 = 5184 \Rightarrow a = \pm 72$$

$$b^2 = 2025 \cdot 9 = 18225 \Rightarrow b = \pm 135$$

$$c^2 = 100 \cdot 9 = 900 \Rightarrow c = \pm 30$$

Vì: $\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow a, b, c$ cùng dấu

Do đó $a = 72, b = 135, c = 30$ hoặc $a = -72, b = -135, c = -30$

Với $a = -72, b = -135, c = -30$ thì $A = -72 + (-135) + (-30) = -237$

Với $a = 72, b = 135, c = 30$ thì $A = 72 + 135 + 30 = 235$

Vậy: $A = -135$ hoặc $A = 135$

Câu 9. (Đề HSG 7 minh họa Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm 3 phân số có tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với $3;4;5$ và các mẫu số tương ứng của chúng tỉ lệ với $5;1;2$

Lời giải

Gọi 3 phân số cần tìm là $\frac{a}{x}; \frac{b}{y}; \frac{c}{z}$ ($a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Z}; x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$)

Vì tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$ nên $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1\frac{1}{70}$

Vì các tử của chúng tỉ lệ với $3;4;5$ và các mẫu số tương ứng của chúng tỉ lệ với $5;1;2$ nên

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \quad \frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} : \frac{x}{5} = \frac{b}{4} : \frac{y}{1} = \frac{c}{5} : \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\frac{5}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{1}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{2}{2}} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}}{\frac{x}{5} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2}} = \frac{1 \cdot \frac{1}{70}}{\frac{10}{71}} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{3}{35}; \frac{b}{y} = \frac{4}{7}; \frac{c}{z} = \frac{5}{14}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{3}{35}; \frac{4}{7}; \frac{5}{14}$.

Câu 10. (Đề HSG 7 trường Kỳ Đông, Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Ba kho thóc có tất cả 710 tấn thóc. Sau khi chuyển đi $\frac{1}{5}$ số thóc ở kho I, $\frac{1}{6}$ số thóc ở kho II và $\frac{1}{11}$ số thóc ở kho III thì số thóc còn lại ở ba kho bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi kho có bao nhiêu tấn thóc?

Lời giải

Gọi số thóc lúc đầu ở kho I, kho II, kho III lần lượt là x, y, z (tấn) (ĐK: $0 < x, y, z < 710$)

Sau khi chuyển bớt đi thì số thóc còn lại ở ba kho lần lượt là $\frac{4}{5}x; \frac{5}{6}y; \frac{10}{11}z$

Vì ba kho có 710 tấn thóc nên ta có: $x + y + z = 710$

Theo đầu bài ta có: $x - \frac{1}{5}x = y - \frac{1}{6}y = z - \frac{1}{11}z \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{5}{6}y = \frac{10}{11}z$

$$\Rightarrow \frac{4x}{5 \cdot 20} = \frac{5y}{6 \cdot 20} = \frac{10z}{11 \cdot 20} \Rightarrow \frac{x}{25} = \frac{y}{24} = \frac{z}{22}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{24} = \frac{z}{22} = \frac{x+y+z}{25+24+22} = \frac{710}{71} = 10$$

$$\Rightarrow x = 25 \cdot 10 = 250; y = 24 \cdot 10 = 240; z = 22 \cdot 10 = 220$$

$$\Rightarrow x = 250; y = 240; z = 220 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số thóc lúc đầu ở ba kho lần lượt là 250 tấn, 240 tấn, 220 tấn.

Câu 11. (Đề HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Độ dài ba đường cao của một tam giác tỷ lệ với các số $3; 5; 6$. Tính độ dài các cạnh tương ứng của tam giác đó biết rằng chu vi của tam giác đó là 42cm

Lời giải

Gọi độ dài các cạnh tương ứng của ba đường cao lần lượt là $a(\text{cm}), b(\text{cm}), c(\text{cm})$
($0 < a, b, c < 42$)

Theo bài ra:

+ Chu vi của tam giác bằng 42cm nên ta có: $a + b + c = 42$

+ Vì diện tích tam giác không thay đổi nên độ dài đường cao và cạnh tương ứng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có: $a \cdot 3 = b \cdot 5 = c \cdot 6$

$$\Rightarrow \frac{a.3}{30} = \frac{b.5}{30} = \frac{c.6}{30} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{10+6+5} = \frac{42}{21} = 2$$

Suy ra: $\frac{a}{10} = 2 \Rightarrow a = 20$; $\frac{b}{6} = 2 \Rightarrow b = 12$; $\frac{c}{5} = 2 \Rightarrow c = 10$

Ta có: $a = 20; b = 12; c = 10$ thỏa mãn điều kiện

Vậy độ dài các cạnh tương ứng của tam giác là: $20cm; 12cm; 10cm$

Câu 12. (Đề HSG 7 trường THCS Phạm Đôn Lễ, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Trong một đợt lao động ba khối $7; 8; 9$ của một trường trồng được $828m$ đường hoa. Trung bình mỗi học sinh khối $7; 8; 9$ theo thứ tự trồng được $2m; 3m; 4m$ đường hoa. Biết rằng số học sinh khối $7; 8; 9$ tỉ lệ với $9; 10; 11$. Tính số học sinh mỗi khối.

Lời giải

Gọi số học sinh mỗi khối $7; 8; 9$ lần lượt là $a, b, c (a, b, c \in N^*)$

Ta có: $\frac{a}{9} = \frac{b}{10} = \frac{c}{11}$

Số mét đường hoa mỗi khối $7; 8; 9$ trồng được lần lượt là $2a; 3b; 4c (m)$. Do đó ta có:

$$2a + 3b + 4c = 828$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{2a}{18} = \frac{3b}{30} = \frac{4c}{44} = \frac{2a+3b+4c}{18+30+44} = \frac{828}{92} = 9$$

Do đó: $a = 9.9 = 81; b = 9.10 = 90; c = 9.11 = 99$

Vậy số học sinh mỗi khối $7; 8; 9$ lần lượt là $81; 90; 99$

Câu 13. (Đề HSG 7 trường THCS Lê Quý Đôn, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Ba thửa ruộng hình chữ nhật A, B, C có cùng diện tích. Chiều rộng của 3 thửa ruộng A, B, C lần lượt tỉ lệ với $3; 4; 5$. Chiều dài của thửa ruộng A nhỏ hơn tổng chiều dài của 2 thửa ruộng B và C là 35 mét. Tính chiều dài mỗi thửa ruộng.

Lời giải

Gọi chiều dài của mỗi thửa ruộng A, B, C lần lượt là $x, y, z (m) (x, y, z > 0)$

Vì chiều dài của thửa ruộng A nhỏ hơn tổng chiều dài của 2 thửa ruộng B và C là 35 mét nên $y + z - x = 35$

Gọi chiều rộng của mỗi thửa ruộng A, B, C lần lượt là $a, b, c (m) (a, b, c > 0)$

Vì ba thửa ruộng hình chữ nhật A, B, C có cùng diện tích nên ta có: $ax = by = cz$ (1)

Chiều rộng của 3 thửa ruộng A, B, C lần lượt tỉ lệ với $3; 4; 5$ nên $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$

Đặt $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k (k > 0) \Rightarrow a = 3k; b = 4k; c = 5k$, thay vào (1) ta được

$$3kx = 4ky = 5kz \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{y+z-x}{15+12-20} = \frac{35}{7} = 5$$

Từ đó tính được: $x = 100; y = 75; z = 60$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy chiều dài mỗi thửa ruộng A, B, C lần lượt là $100m; 75m; 60m$.

Câu 14. (Đề HSG 7 trường THCS Thái Hưng, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Ba công nhân làm được 860 sản phẩm như nhau trong cùng một thời gian. Để làm xong 1 sản phẩm đó người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 6 phút, người thứ ba cần 9 phút. Tính số sản phẩm mỗi người làm được?

Lời giải

Gọi số sản phẩm mỗi công nhân làm được lần lượt là a, b, c (sản phẩm)
(Điều kiện: $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $5a = 6b = 9c$ và $a + b + c = 860$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9} \text{ và } a + b + c = 860$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9} = \frac{a+b+c}{5+6+9} = \frac{860}{18+15+10} = \frac{860 \cdot 90}{43} = 1800$$

Suy ra

$$a = \frac{1}{5} \cdot 1800 = 360 \text{ (SP)}$$

$$b = \frac{1}{6} \cdot 1800 = 300 \text{ (SP)}$$

$$c = \frac{1}{9} \cdot 1800 = 200 \text{ (SP)}$$

Vậy số sản phẩm mỗi người làm được lần lượt là: 360 (sản phẩm); 300 (sản phẩm) và 200 (sản phẩm).

Câu 15. (Đề HSG 7 trường THCS Lý Nam Đế, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Trong một đợt lao động, ba khối $7, 8, 9$ chuyển được $912m^3$ đất. Trung bình mỗi học sinh khối $7, 8, 9$ theo thứ tự làm được $1, 2m^3; 1, 4m^3; 1, 6m^3$. Số học sinh khối 7 và khối 8 tỉ lệ với 1 và 3. Số học sinh khối 8 và khối 9 tỉ lệ với 4 và 5. Tính số học sinh của mỗi khối?

Lời giải

Gọi số học sinh của ba khối $7, 8, 9$ lần lượt là a, b, c (học sinh) ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Vì ba khối $7, 8, 9$ chuyển được $912m^3$ đất nên ta có: $1, 2a + 1, 4b + 1, 6c = 912$

Theo đề bài ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{3}$ và $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{12}$$

$$\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} \Rightarrow \frac{1,2a}{1,2 \cdot 4} = \frac{1,4b}{1,4 \cdot 12} = \frac{1,6c}{1,6 \cdot 15} \Rightarrow \frac{1,2a}{4,8} = \frac{1,4b}{16,8} = \frac{1,6c}{24}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{1,2a}{4,8} = \frac{1,4b}{16,8} = \frac{1,6c}{24} = \frac{1,2a + 1,4b + 1,6c}{4,8 + 16,8 + 24} = \frac{912}{45,6} = 20$$

Suy ra: $\frac{1,2a}{4,8} = 20 \Rightarrow 1,2a = 20 \cdot 4,8 \Rightarrow a = 80$ (thỏa mãn)

$$\frac{1,4b}{16,8} = 20 \Rightarrow 1,4b = 20 \cdot 16,8 \Rightarrow b = 240$$
 (thỏa mãn)

$$\frac{1,6c}{24} = 20 \Rightarrow 1,6c = 20 \cdot 24 \Rightarrow c = 300$$
 (thỏa mãn)

Vậy số học sinh của ba khối $7, 8, 9$ lần lượt là 80 học sinh, 240 học sinh, 300 học sinh

Câu 16. (Đề HSG 7 trường THCS Thống Nhất, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Trường có 3 lớp $7A, 7B, 7C$, biết $\frac{2}{3}$ số học sinh lớp $7A$ bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh $7B$ và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh $7C$. Lớp $7C$ có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của 2 lớp kia là 57 bạn. Tính số học sinh mỗi lớp?

Lời giải

Gọi số học sinh của ba lớp $7A; 7B; 7C$ lần lượt là a, b, c (học sinh) ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Vì $\frac{2}{3}$ số học sinh lớp $7A$ bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh $7B$ và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh $7C$ nên ta có:

$$\frac{2}{3}a = \frac{3}{4}b = \frac{4}{5}c \Rightarrow \frac{2a}{3 \cdot 12} = \frac{3b}{4 \cdot 12} = \frac{4c}{5 \cdot 12} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$$

Vì lớp $7C$ có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của 2 lớp kia là 57 bạn nên $a + b - c = 57$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a + b - c}{18 + 16 - 15} = \frac{57}{19} = 3$$

Suy ra $a = 3 \cdot 18 = 54; b = 3 \cdot 16 = 48; c = 3 \cdot 15 = 45$ (thỏa mãn)

Vậy số học sinh của ba lớp $7A; 7B; 7C$ lần lượt là 54 học sinh, 48 học sinh, 45 học sinh.

Câu 17. (Đề HSG 7 trường THCS Trần Thái Tông, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cuối học kì I, ba bạn An, Tâm, Bình được thưởng tổng số vở là 58 quyển. Ba bạn quyết định dùng một nửa số vở của An, $\frac{1}{3}$ số vở của Tâm, $\frac{1}{4}$ số vở của Bình để tặng các bạn học sinh nghèo. Biết số vở còn lại sau khi tặng của ba bạn bằng nhau. Hỏi mỗi bạn được thưởng bao nhiêu quyển vở?

Lời giải

Gọi số vở được thưởng của ba bạn An, Tâm, Bình lần lượt là x, y, z (quyển). ĐK: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$

Theo bài ra ta có: $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z$ và $x + y + z = 58$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8} \text{ và } x + y + z = 58$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{12+9+8} = \frac{58}{29} = 2$$

$$\Rightarrow x = 2.12 = 24 \text{ (t/m)}; y = 2.9 = 18 \text{ (t/m)}; z = 2.8 = 16 \text{ (t/m)}$$

Vậy An được thưởng 24 quyển vở.

Tâm được thưởng 18 quyển vở

Bình được thưởng 16 quyển vở.

Câu 18. (Đề HSG 7 trường THCS Thái Phương, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Ba lớp $7A, 7B, 7C$ cùng mua một số gói tăm từ thiện, số gói tăm lớp $7A$ và $7B$ tỉ lệ với $2;3$. Số gói tăm lớp $7B$ và $7C$ tỉ lệ với $4;5$. Biết lớp $7B$ mua nhiều hơn $7A$ là 40 . Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi số gói tăm lớp $7A, 7B, 7C$ lần lượt mua là $x; y; z$ với $x; y; z$ nguyên dương vì số gói tăm lớp $7A$ và $7B$ tỉ lệ với 2 và 3 nên $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{12}$ (1)

Vì số gói tăm lớp $7B$ và $7C$ tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{15}$ (2)

Từ (1);(2) ta có $\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}$

Vì số gói tăm lớp $7B$ nhiều hơn $7A$ là 40 nên $y - x = 40$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{y-x}{12-8} = \frac{40}{4} = 10$$

$$\Rightarrow x = 8.10 = 80; y = 12.10 = 120; z = 15.10 = 150(TM)$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là $80 + 120 + 150 = 350$ (gói)

Câu 19. (Đề HSG 7 trường THCS Tây Đô, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo $1; 2; 3$

Lời giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có ba chữ số cần tìm, khi đó có ít nhất một trong 3 chữ số a, b, c khác 0 và $a, b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$

Vì có ít nhất một trong 3 chữ số a, b, c khác 0 và $a, b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$ nên $1 \leq a + b + c \leq 27$

Mặt khác số cần tìm là bội của 18 nên là bội của 9 , do đó $a + b + c = 9$ hoặc $a + b + c = 18$ hoặc $a + b + c = 27$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$; mà $a, b, c \in \mathbb{N}$

Suy ra $a + b + c$ chia hết cho 6, nên $a + b + c = 18$

Do đó $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} = \frac{18}{6} = 3$

Từ đó suy ra $a = 3; b = 6; c = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

Do số phải tìm là bội của 18 nên chữ số hàng đơn vị chẵn

Vậy hai số cần tìm là: $396; 936$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>