PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**
HUYỆN TRỰC NINH	**NĂM HỌC : 2017-2018**
	MÔN TOÁN LỚP 8
ĐỀ CHÍNH THỨC	Thi ngày 04 tháng 4 năm 2018

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử:
   a) $x^3 - x^2 - 14x + 24$
   b) $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$
2) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:
$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2y^2 + 3} = 0$$

Bài 2. (3,0 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$
b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$ sao cho tích $x.y$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3. (3,0 điểm)

a) Tìm đa thức $f(x)$, biết $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, chia cho $x - 2$ dư 24, chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư
b) Cho p và $2p + 1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p + 1$ là hợp số

Bài 4. (8,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ có AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC, E là giao điểm của BN và DM, F là giao điểm của CM và DN.

1) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF // BC$.
2) Gọi H là giao điểm của BN và CM. Chứng minh ΔANB đồng dạng với ΔNFA và H là trực tâm ΔAEF
3) Gọi giao điểm của AH và DM là K, giao điểm của AH và BC là O, giao điểm của BK và AD là I. Chứng minh : $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$

Bài 5. (2,0 điểm)

a) Cho $x > 0, y > 0$ và m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y}$
b) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1)

$$a)x^3-x^2-14x+24$$
$$=x^3-2x^2+x^2-2x-12x+24$$
$$=x^2(x-2)+x(x-2)-12(x-2)$$
$$=(x^2+x-12)(x-2)$$
$$=(x-2)(x-3)(x+4)$$
$$b)x^4+2018x^2+2017x+2018$$
$$=x^4+2017x^2+x^2+2017x+2017+1$$
$$=(x^4+x^2+1)+2017(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)+2017(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-x+2018)$$

2) Với $x+y=1$ và $xy\neq0$ ta có:

$$\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}=\frac{x^4-x-y^4+y}{(y^3-1)(x^3-1)}$$
$$=\frac{(x^4-y^4)-(x-y)}{xy(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$$
$$=\frac{(x-y)\left[(x+y)(x^2+y^2)-1\right]}{xy\left(x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2\right)}$$
$$=\frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy\left(x^2y^2+(x+y)^2+2\right)}$$
$$=\frac{(x-y)\left[x(x-1)+y(y-1)\right]}{xy(x^2+y^2+3)}=\frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3}$$

Vậy $\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}+\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$

Bài 2.

a)

$y^2+2xy-3x-2=0 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x^2+3x+2$

$\Leftrightarrow (x+y)=(x+1)(x+2)(*)$

VT (*) là số chính phương, VP (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Với $x=-1 \Rightarrow y=1$

Với $x=-2 \Rightarrow y=2$

b)

Điều kiện $x \neq 0$

$2x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y^2}{4}=4 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)+\left(x^2+\frac{y^2}{4}-xy\right)+xy=2$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+xy=2$

Vì $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \geq 0; \left(x-\frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi $x \neq 0;$ mọi y

Do đó $xy \leq 2$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \\ x=-1; y=-2 \\ x=-2; y=-1 \end{array}\right.$

Bài 3.

a)

Giả sử $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và dư $ax+b$

Khi đó $f(x)=(x^2-4)(-5x)+xa+b$

Theo đề ta có: $\begin{cases} f(2)=24 \\ f(-2)=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=24 \\ -2a+b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{2} \\ b=17 \end{cases}$

Do đó $f(x)=(x^2-4)(-5x)+\dfrac{7}{2}x+17$

Vậy $f(x)=-5x^2+\dfrac{47}{2}x+17$

b) Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p=3k+1; p=3k-1$ với $k>1$

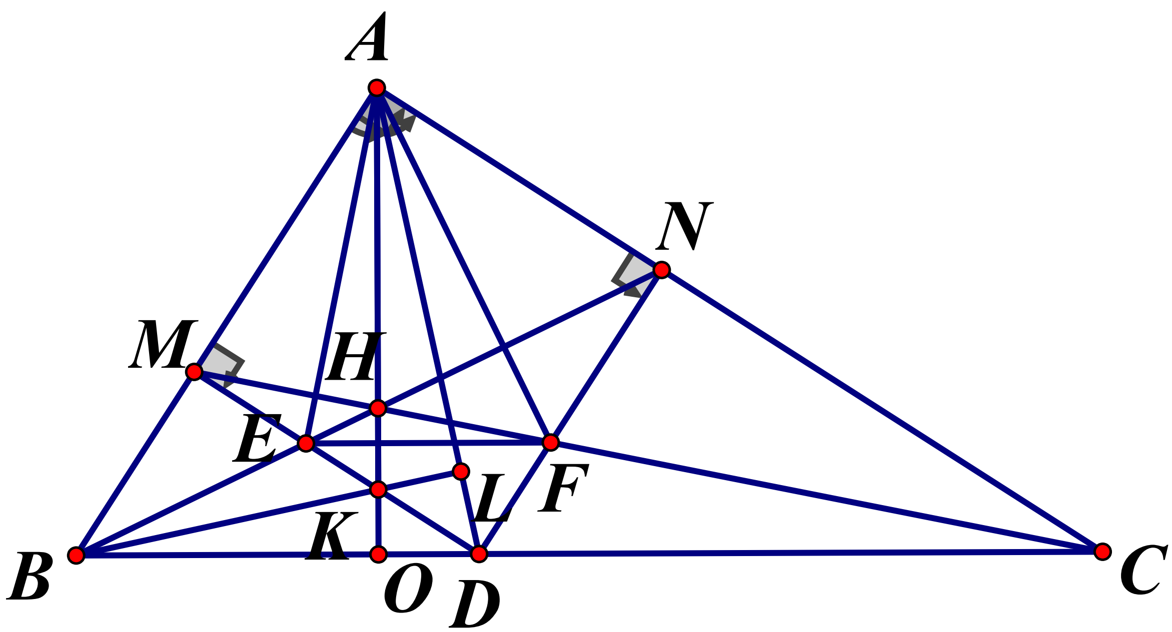
+ Nếu $p=3k+1$ thì $2p+1=6k+3=3(2k+1)$

Suy ra $2p+1$ là hợp số (vô lý)

+Nếu $p=3k-1, k>1$ thì $4p+1=12k-3=3.(4k-1)$

Do $k>1$ nên $4k-1>3$. Do đó $4p+1$ là hợp số.

Bài 4.



1) ***Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông***

+) Chứng minh $\widehat{AMD}=90^0; \widehat{AND}=90^0; \widehat{MAN}=90^0$

Suy ra tứ giác $AMDN$ là hình chữ nhật

+)Hình chữ nhật $AMDN$ có AD là phân giác của $\widehat{MAN}$ nên tứ giác $AMDN$ là hình vuông.

***Chứng minh EF // BC**

+) Chứng minh : $\frac{FM}{FC}=\frac{DB}{DC}$ (1)

Chứng minh: $\frac{DB}{DC}=\frac{MB}{MA}$ (2)

Chứng minh $AM=DN\Rightarrow\frac{MB}{MA}=\frac{MB}{DN}$ (3)

Chứng minh $\frac{MB}{DN}=\frac{EM}{ED}$ (4)

Từ (1),(2),(3),(4) suy ra $\frac{EM}{ED}=\frac{FM}{FC}\Rightarrow EF//BC$

2) Chứng minh $\Delta ANB\sim\Delta NFA$

Chứng minh $AN=DN$. suy ra $\frac{AN}{AB}=\frac{DN}{AB}$ (5)

Chứng minh $\frac{DN}{AB}=\frac{CN}{CA}$ (6)

Chứng minh $\frac{CN}{CA}=\frac{FN}{AM}$ (7)

Chứng minh $AM=AN$. Suy ra $\frac{FN}{AM}=\frac{FN}{AN}$ (8)

Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\frac{AN}{AB}=\frac{FN}{AN}\Rightarrow\Delta ANB\sim\Delta NFA(c.g.c)$

***chứng minh H là trực tâm tam giác AEF**

Vì $\Delta ANB\sim\Delta NFA$ nên $\widehat{NBA}=\widehat{FAN}$

Mà $\widehat{BAF}+\widehat{FAN}=90^0\Rightarrow\widehat{NBA}+\widehat{BAF}=90^0$

Suy ra $EH\perp AF$, Tương tự: $FH\perp AE$, suy ra H là trực tâm ΔAEF

3) Đặt $S_{AKD}=a,S_{BKD}=b,S_{AKB}=c$. Khi đó:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{AKD}}+\frac{S_{ABD}}{S_{BDK}}+\frac{S_{ABD}}{S_{AKB}}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$$

$$=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$

Theo định lý AM-GM ta có: $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$

Tương tự : $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2$; $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$

Suy ra $\frac{BI}{KI}+\frac{AO}{KO}+\frac{DM}{KM}\ge 9$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi ΔABD là tam giác đều, suy ra trái với giả thiết.

Bài 5.

5a) Với $x>0, y>0$ và $m,n\in\mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}\ge\frac{(m+n)^2}{x+y} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (m^2y+n^2x)(x+y)\ge xy(m+n)^2$$

$$\Leftrightarrow (nx-my)^2\ge 0$$ luôn đúng

5b) Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}+\frac{p^2}{z}\ge\frac{(m+n)^2}{x+y}+\frac{p^2}{z}\ge\frac{(m+n+p)^2}{x+y+z} \qquad (2)$$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}(do \quad abc=1)$$

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Mà $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\frac{3}{2}$

Do đó: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$