

## PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

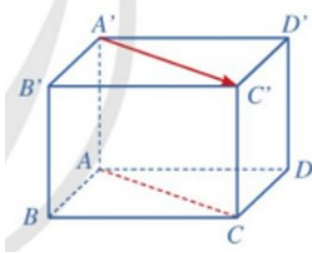
### I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

#### 1. Vector chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng  $\Delta$  và vector  $u$  khác  $0$ . Vector  $u$  được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  nếu giá của  $u$  song song hoặc trùng với  $\Delta$ .

**Nhận xét:** Nếu  $u$  là vector chỉ phương của một đường thẳng thì  $ku (k \neq 0)$  cũng là vector chỉ phương của đường thẳng đó.

**Ví dụ 1:** Trong Hình, các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{A'B'}$  có là vector chỉ phương của đường thẳng  $AB$  hay không? Vì sao?



**Giải**

Do vector  $\overrightarrow{AB}$  khác  $0$  và có giá là đường thẳng  $AB$  nên vector  $\overrightarrow{AB}$  là vector chỉ phương của đường thẳng  $AB$ .

#### 2. Phương trình tham số của đường thẳng

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

- Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , nếu  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có vector

chỉ phương  $u = (a; b; c)$  thì  $\Delta$  có phương trình dạng 
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \text{ là tham số})$$

- Ngược lại, mỗi hệ phương trình 
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
, trong đó  $a, b, c$  không đồng thời bằng 0 và  $t$  là tham số, xác định đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có một vector chỉ phương là  $u = (a; b; c)$ .

Hệ phương trình 
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
, trong đó  $a, b, c$  không đồng thời bằng 0,  $t$  là tham số, được gọi là phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có vector chỉ phương  $u = (a; b; c)$ .

Trong các ví dụ, bài tập sau đây, nếu không chú ý gì thêm thì ta hiểu là xét trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ .

#### Ví dụ 2

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A(2; -1; 4)$  và có vector chỉ phương  $u = (3; 4; -5)$ .

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 - 7t \\ z = 9t \end{cases}$$

b) Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tham số là:  $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 - 7t \\ z = 9t \end{cases}$  ( $t$  là tham số).

Chỉ ra tọa độ một vector chỉ phương của  $\Delta$  và một điểm thuộc đường thẳng  $\Delta$ .

**Giải**

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 7t \\ z = 6 + 8t \end{cases}$$

a) Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  là:  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 7t \\ z = 6 + 8t \end{cases}$  ( $t$  là tham số)

b) Tọa độ của một vector chỉ phương của  $\Delta$  là  $u = (2; 7; 8)$ .

$$\begin{cases} x = -1 + 2 \cdot 0 = -1 \\ y = 5 - 7 \cdot 0 = 5 \\ z = 9 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Ứng với  $t = 0$  ta có:

Suy ra điểm  $B(-1; 5; 0)$  thuộc đường thẳng  $\Delta$ .

### 3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

- Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , nếu  $\Delta$  là đường thẳng đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có vector chỉ phương  $u = (a; b; c)$  (với  $abc \neq 0$ ) thì  $\Delta$  có phương trình dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

- Ngược lại, với  $abc \neq 0$ , mỗi hệ phương trình  $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$  xác định đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có một vector chỉ phương là  $u = (a; b; c)$ .

Nếu  $abc \neq 0$  thì hệ phương trình  $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$  được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có vector chỉ phương  $u = (a; b; c)$ .

**Ví dụ 2:** Viết phương trình chính tắc của đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A(1; 3; 6)$  và có vector chỉ phương  $u = (9; 2; 13)$ .

**Giải**

Phương trình chính tắc của đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A(1; 3; 6)$  và có vector chỉ phương

$$u = (9; 2; 13) \text{ là: } \frac{x - 1}{9} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 6}{13}.$$

#### 4. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A(x_0; y_0; z_0), B(x_1; y_1; z_1)$  có:

- Phương trình tham số là: 
$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

- Phương trình chính tắc là: 
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad (\text{với } x_0 \neq x_1, y_0 \neq y_1, z_0 \neq z_1).$$

**Ví dụ 3:** Lập phương trình chính tắc và phương trình tham số của đường thẳng  $AB$  biết  $A(4;1;2)$  và  $B(5;8;6)$ .

**Giải**

- Phương trình chính tắc của đường thẳng  $AB$  là:

$$\frac{x - 4}{5 - 4} = \frac{y - 1}{8 - 1} = \frac{z - 2}{6 - 2} \Leftrightarrow \frac{x - 4}{1} = \frac{y - 1}{7} = \frac{z - 2}{4}.$$

- Phương trình tham số của đường thẳng  $AB$  là: 
$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 7t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số})$$

## II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trước hết, ta có định nghĩa sau: Trong không gian, hai vector được gọi là cùng phương nếu các giá của chúng cùng song song với một đường thẳng, ba vector được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Người ta cũng chứng minh được những điều kiện sau.

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vector

$$u_1 = (a_1; b_1; c_1); u_2 = (a_2; b_2; c_2); u_3 = (a_3; b_3; c_3).$$

- Hai vector  $u_1, u_2$  là cùng phương khi và chỉ khi  $[u_1, u_2] = 0$ .

- Ba vector  $u_1, u_2, u_3$  là đồng phẳng khi và chỉ khi  $[u_1, u_2] \cdot u_3 = 0$ .

Ta có định lý sau:

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng phân biệt  $\Delta_1, \Delta_2$  lần lượt đi qua các điểm  $M_1, M_2$  và tương ứng có  $u_1, u_2$  là hai vector chỉ phương. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} \Delta_1 // \Delta_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u_1}, \vec{u_2} \text{ cùng phương} \\ \vec{u_1}, \vec{M_1M_2} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u_1}, \vec{u_2}] = 0 \\ [\vec{u_1}, \vec{M_1M_2}] \neq 0 \end{cases} \\ \Delta_1 \cap \Delta_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u_1}, \vec{u_2} \text{ không cùng phương} \\ \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{M_1M_2} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u_1}, \vec{u_2}] \neq 0 \\ [\vec{u_1}, \vec{u_2}] \cdot \vec{M_1M_2} = 0 \end{cases} \\ \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau} &\Leftrightarrow [\vec{u_1}, \vec{u_2}] \cdot \vec{M_1M_2} \neq 0. \end{aligned}$$

**Chú ý:** Trong một số trường hợp, để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, ta có thể giải hệ phương trình được lập từ những phương trình xác định hai đường thẳng đó, sau đó xét cặp vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó có cùng phương hay không (nếu cần thiết).

**Ví dụ 4:** Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng  $\Delta_1, \Delta_2$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 5t_1 \\ y = 2 - t_1 \\ z = 3 + 2t_1 \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x = 2 + 10t_2 \\ y = 4 - 2t_2 \\ z = 1 + 4t_2 \end{cases};$

b)  $\Delta_1: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}, \Delta_2: \frac{x-2}{10} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{4};$

c)  $\Delta_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \Delta_2: \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 8 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}.$

**Giải**

a) Đường thẳng  $\Delta_1$  đi qua điểm  $M_1(1; 2; 3)$  và có  $u_1 = (5; -1; 2)$  là vectơ chỉ phương. Đường thẳng  $\Delta_2$  đi qua điểm  $M_2(2; 4; 1)$  và có  $u_2 = (10; -2; 4)$  là vectơ chỉ phương.

Ta có:  $2u_1 = (10; -2; 4) = u_2$ , suy ra  $u_1, u_2$  cùng phương;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 2; -2)$  và  $\frac{1}{5} \neq \frac{2}{-1}$  nên  $u_1, \overrightarrow{M_1M_2}$  không cùng phương.

Vậy  $\Delta_1 // \Delta_2$ .

b) Đường thẳng  $\Delta_1$  đi qua điểm  $M_1(2; 3; -4)$  và có  $u_1 = (3; 2; 1)$  là vectơ chỉ phương. Đường thẳng  $\Delta_2$  đi qua điểm  $M_2(-2; 1; 2)$  và có  $u_2 = (2; 1; -3)$  là vectơ chỉ phương. Ta có:  $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$ , suy ra  $u_1, u_2$  không cùng phương;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (-4; -2; 6), [\vec{u_1}, \vec{u_2}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7; 11; -1).$

Do  $[u_1, u_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (-7) \cdot (-4) + 11 \cdot (-2) + (-1) \cdot 6 = 0$  nên  $u_1, u_2, \overrightarrow{M_1M_2}$  đồng phẳng.

Vậy  $\Delta_1$  cắt  $\Delta_2$ .

c) Đường thẳng  $\Delta_1$  đi qua điểm  $M_1(-3; 1; 2)$  và có  $u_1 = (1; -1; 2)$  là vectơ chỉ phương. Đường thẳng  $\Delta_2$  đi qua điểm  $M_2(6; 8; -1)$  và có  $u_2 = (3; 2; -1)$  là vectơ chỉ phương. Ta có:

$\overrightarrow{M_1M_2} = (9; 7; -3), [\vec{u_1}, \vec{u_2}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-3; 7; 5).$

Do  $[u_1, u_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (-3) \cdot 9 + 7 \cdot 7 + 5 \cdot (-3) = 7 \neq 0$  nên  $u_1, u_2, \overrightarrow{M_1M_2}$  không đồng phẳng.

Vậy  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  chéo nhau.

### III. GÓC

#### 1. Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có vector chỉ phương lần lượt là  $u_1 = (a_1; b_1; c_1), u_2 = (a_2; b_2; c_2)$ . Khi đó, ta có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Nhận xét:  $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$ .

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = 2 - \sqrt{3}t_1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ và } \Delta_2 : \begin{cases} x = 4 - \sqrt{3}t_2 \\ y = 5 + t_2 \\ z = 6 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \text{ là tham số})$$

**Ví dụ 5:** Tính góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1, \Delta_2$  biết:

**Giải**

Hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có vector chỉ phương lần lượt là  $u_1 = (1; -\sqrt{3}; 0)$ ,  $u_2 = (-\sqrt{3}; 1; 0)$ . Ta có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|1 \cdot (-\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) \cdot 1 + 0 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra  $(\Delta_1, \Delta_2) = 30^\circ$ .

**Ví dụ 6:** Cho hai đường thẳng  $\Delta_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}, \Delta_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ . Chứng minh rằng  $\Delta_1 \perp \Delta_2$ .

**Giải**

Đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có vector chỉ phương lần lượt là  $u_1 = (3; 2; 1), u_2 = (-1; 2; -1)$ .

Ta có:  $u_1 \cdot u_2 = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$ .

Suy ra  $\Delta_1 \perp \Delta_2$ .

#### 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta$  có vector chỉ phương  $u = (a_1; b_1; c_1)$  và mặt phẳng  $(P)$  có vector pháp tuyến  $n = (a_2; b_2; c_2)$ . Gọi  $(\Delta, (P))$  là góc giữa đường thẳng  $\Delta$  và mặt phẳng  $(P)$ . Khi đó,

$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(u, n)| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

**Ví dụ 7:** Cho mặt phẳng  $(P)$  có vector pháp tuyến  $n = (1; 2; 2)$  và đường thẳng  $\Delta$  có vector chỉ phương  $u = (2; 2; -1)$ . Tính sin của góc giữa đường thẳng  $\Delta$  và mặt phẳng  $(P)$ . Góc giữa đường thẳng  $\Delta$  và mặt phẳng  $(P)$  bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

**Giải**

Ta có: 
$$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{9}$$
. Suy ra  $(\Delta, (P)) \approx 26^\circ$ .

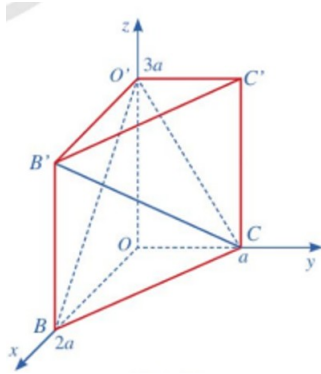
**Ví dụ 8:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ đứng  $OBC.O'B'C'$  với  $O(0;0;0)$ ,  $B(2a;0;0), C(0;a;0), O'(0;0;3a), a > 0$ .

a) Xác định tọa độ của điểm  $B'$ .

b) Viết phương trình mặt phẳng  $(O'BC)$ .

c) Tính sin của góc giữa đường thẳng  $B'C$  và mặt phẳng  $(O'BC)$ .

**Giải.**



a) Ta có:  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OO'} = (0; 0; 3a)$ . Suy ra  $x_{B'} = x_B = 2a$ ,  $y_{B'} = y_B = 0$ ,  $z_{B'} - 0 = 3a$ , tức là  $B'(2a; 0; 3a)$ .

b) Vì  $B(2a; 0; 0), C(0; a; 0), O'(0; 0; 3a)$  nên mặt phẳng  $(O'BC)$  có phương trình là

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{3a} = 1 \Leftrightarrow 3x + 6y + 2z - 6a = 0.$$

c) Mặt phẳng  $(O'BC)$  có một vector pháp tuyến là  $n = (3; 6; 2)$ .

Do  $B'(2a; 0; 3a), C(0; a; 0)$  nên  $\overrightarrow{B'C} = (-2a; a; -3a)$ , suy ra vector  $\overrightarrow{B'C} = (-2a; a; -3a)$  cùng phương với vector  $u = (-2; 1; -3)$ . Vì thế vector  $u = (-2; 1; -3)$  là một vector chỉ phương của đường thẳng  $B'C$ . Suy ra sin của góc giữa đường thẳng  $B'C$  và mặt phẳng  $(O'BC)$  bằng:

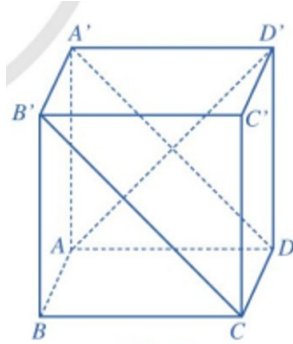
$$\frac{|3 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 + 2 \cdot (-3)|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{7\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{49}.$$

### 3. Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng  $(P_1)$  và  $(P_2)$  là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó, kí hiệu là  $((P_1), (P_2))$ .

**Ví dụ 9:** Trong không gian, cho hình lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(CDA'B')$ .

**Giải.**



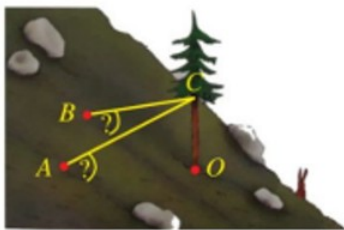
Trong hình vuông  $ADD'A'$ , ta có:  $AD' \perp DA'$ .

Do  $CD \perp (ADD'A')$  nên  $AD' \perp CD$ . Suy ra  $AD' \perp (CDA'B')$ . Mặt khác, ta có:  $AA' \perp (ABCD)$ , suy ra góc giữa hai mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(CDA'B')$  là góc giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $AD'$ , đó là góc  $A'AD'$ . Vì tam giác  $A'AD'$  vuông cân tại  $A'$  nên  $\angle A'AD' = 45^\circ$ .

### IV. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG THỰC TIỄN

Tương tự như phương trình mặt phẳng, phương trình đường thẳng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

**Ví dụ 10:** Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như Hình.



Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm  $O$  (gốc cây thông) và  $A, B$  (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(3; -4; 2)$ ,  $B(-5; -2; 1)$ , đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm  $(0; 0; 5)$  và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng.

**a)** Tính độ dài của mỗi dây neo được sử dụng.

**b)** Tính góc tạo bởi mỗi dây neo và mặt phẳng sườn núi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

**Giải**

**a)** Do điểm  $C(0; 0; 5)$  nên  $AC = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{34}(m)$ ;

$$BC = \sqrt{(-5-0)^2 + (-2-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}(m).$$

b) Ta có:  $\vec{OA} = (3; -4; 2), \vec{OB} = (-5; -2; 1)$  nên

$$[\vec{OA}, \vec{OB}] = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = (0; -13; -26).$$

Vì thế, vector  $\vec{n} = (0; 1; 2)$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(OAB)$ .

Mặt khác, do  $\vec{CA} = (3; -4; -3), \vec{BC} = (5; 2; 4)$  nên ta có:

$$\sin(CA, (OAB)) = \cos(CA, \vec{n}) = \frac{|\vec{CA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-3) \cdot 2|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{170}},$$

suy ra  $(CA, (OAB)) \approx 50^\circ$ . Vậy góc tạo bởi dây neo  $CA$  và mặt phẳng sườn núi là khoảng  $50^\circ$ .

$$\sin(BC, (OAB)) = \cos(BC, \vec{n}) = \frac{|\vec{BC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2|}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{3},$$

suy ra  $(BC, (OAB)) \approx 42^\circ$ .

Vậy góc tạo bởi dây neo  $BC$  và mặt phẳng sườn núi là khoảng  $42^\circ$ .

**Ví dụ 11:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , một cabin cáp treo xuất phát từ điểm  $A(10; 3; 0)$  và chuyển động đều theo đường cáp có vector chỉ phương là  $\vec{u} = (2; -2; 1)$  với tốc độ là 4,5m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).

a) Viết phương trình đường cáp.

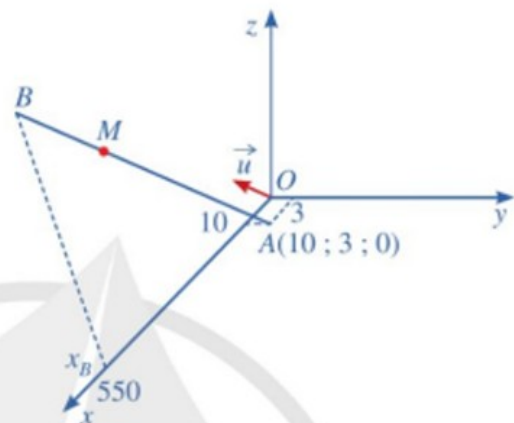
b) Giả sử sau  $t(s)$  kể từ lúc xuất phát ( $t \geq 0$ ), cabin đến điểm  $M$ . Tìm tọa độ của điểm  $M$ .

c) Cabin dừng ở điểm  $B$  có hoành độ  $x_B = 550$ . Tìm độ dài quãng đường  $AB$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

d) Đường cáp  $AB$  tạo với mặt phẳng  $(Oxy)$  góc bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)



**Giải**

a) Phương trình chính tắc của đường cáp là:  $\frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ .

b) Do tốc độ chuyển động của cabin là  $4,5m/s$  nên độ dài  $AM$  bằng  $4,5t(m)$ . Vì vậy  $|AM| = 4,5t (t \geq 0)$ .

Do hai vectơ  $\overrightarrow{AM}$  và  $\vec{u}$  là cùng phương và cùng hướng nên  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$  với  $k$  là số thực dương nào đó. Suy ra:  $|\overrightarrow{AM}| = k|\vec{u}| = k \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 3k$ . Do đó  $3k = 4,5t$ . Suy ra  $k = \frac{3t}{2}$ . Vì thế, ta có:  $\overrightarrow{AM} = \frac{3t}{2}\vec{u} = \left(3t; -3t; \frac{3t}{2}\right)$ .

Gọi tọa độ của điểm  $M$  là  $(x_M; y_M; z_M)$ .

Do  $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A; y_M - y_A; z_M - z_A) = \left(3t; -3t; \frac{3t}{2}\right)$  nên  $\begin{cases} x_M = 3t + x_A \\ y_M = -3t + y_A \\ z_M = \frac{3t}{2} + z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3t + 10 \\ y_M = -3t + 3 \\ z_M = \frac{3t}{2} \end{cases}$ .

Vậy điểm  $M$  có tọa độ là  $\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$ .

c) Do  $x_B = 550$  nên  $3t + 10 = 550$ , tức là  $t = 180$  (s). Do đó, ta có điểm  $B(550; -537; 270)$ . Vậy  $AB = \sqrt{(550 - 10)^2 + (-537 - 3)^2 + (270 - 0)^2} = \sqrt{656100} = 810(m)$ .

d) Đường thẳng  $AB$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (2; -2; 1)$  và mặt phẳng  $(Oxy)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ . Do đó, ta có:

$$\sin(\Delta, (Oxy)) = |\cos(\vec{u}, \vec{k})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{k}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}.$$

Vậy  $(\Delta, (Oxy)) \approx 19^\circ$ .