Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12
TP. Hồ Chí Minh năm học 2011-2012

Ngày thi: 14-3-2012

Bài 1: (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 2x + \tan x = 2$

b) $\sin^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$

Bài 2: (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 10x - 2 = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12}$

b) $(3x+2)\sqrt{2x-3} = 2x^2 + 3x - 6$

Bài 3: (4 điểm)

a) Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

b) Cho các số thực $a, b, c \in [-1; 2]$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$$

Bài 4: (3 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đều bằng a. Gọi M là 1 điểm trên cạnh CD sao cho $CM = \dfrac{1}{3}CD$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AMB$.

Bài 5: (2 điểm)

Cho các số thực $x, y, z \in (0; 1)$ và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 6: (3 điểm) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2y^2 + 2y^2 + 4 = 7xy \\ x^2 + 2y^2 + 6y = 3xy^2 \end{cases}$$

Hết

Lời giải đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 TP. Hồ Chí Minh năm học 2011-2012

<u>Bài 1:</u> (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 2x + \tan x = 2$

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Do $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta đặt $t = tgx$

$\Rightarrow \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Phương trình đã cho trở thành $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in Z)$

b) $\sin^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^3 = 4\sin x \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^3 = 4\sin x \Leftrightarrow (\tan x - 1)^3 = 4\tan x(1 + \tan^2 x)$$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x + \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\tan x + 1)(3\tan^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi (k \in Z)$

<u>Bài 2:</u> (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 10x - 2 = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12}$

Phuong trình đã cho

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 + x + 2 = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12} + 7x^2 + 23x + 12$$

Đặt $f(t) = t^3 + t; f'(t) = 2t^2 + 1 > 0 \forall t \in R$ Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến nên ta có

$$f(t+2) = f(\sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12}) \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 11x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

b) $(3x+2)\sqrt{2x-3} = 2x^2 + 3x - 6$

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$

Đặt $t = \sqrt{2x-3}\,(t \geq 0)$ Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow (3x+2)t = 2x^2 + x - 3 + t^2 \Leftrightarrow t^2 - (2x+2)t + 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$\Delta = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2 > 0 \forall x \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2x + 3 \\ t = x - 1 \end{array}\right.$$

Với $t = 2x + 3 \Rightarrow t^2 - t = 0 \Rightarrow t = 1 \vee t = 0$

$t = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$t = 1 \Rightarrow x = 2$

Với $t = x - 1 \Rightarrow \sqrt{2x-3} = x - 1 \Rightarrow x = 2$

Thử lại thấy $x = 2$ thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 3: (4 điểm)

a) Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

Cách 1: Sau khi quy đồng và kết hợp các đẳng thức $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac); ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) = (a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$ và điều kiện $abc = 1$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ac-2) \geq 3$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $a+b+c \geq 3; ab+bc+ac \geq 3$ nên ta có điều cần chứng minh.

Cách 2: Đặt $a = x^3; b = y^3; c = z^3$ với $xyz = 1$ bất đẳng thức trên viết lại thành

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz} + \frac{1}{y^3+z^3+xyz} + \frac{1}{x^3+z^3+xyz} \leq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức căn bản sau $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$ ta có

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz} + \frac{1}{y^3+z^3+xyz} + \frac{1}{x^3+z^3+xyz} \leq \frac{1}{xy(x+y+z)} + \frac{1}{xz(x+y+z)} + \frac{1}{zy(x+y+z)} = 1$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ngoài ra ta có bài toán tổng quát sau:

Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$ thì

$$\frac{1}{1+a+b^k} + \frac{1}{1+b+c^k} + \frac{1}{1+c+a^k} \leq 1 (k > 0)$$

b) Cho các số thực $a, b, c \in [-1; 2]$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$$

Từ điều kiện ta có $(a-2)(a+1) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq a + 2$.

Tương tự ta có $b^2 \leq b + 2;\ c^2 \leq c + 2$

Cộng lại ta có $a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6 = 6$ (đpcm)

Bài 4: (3 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đều bằng a. Gọi M là 1 điểm trên cạnh CD sao cho $CM = \frac{1}{3}CD$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AMB$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 5: (2 điểm)

Cho các số thực $x, y, z \in (0; 1)$ và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

*Cách 1:*Đặt $x = tan\frac{A}{2}; y = tg\frac{B}{2}; z = tg\frac{C}{2}$ $(tg\frac{A}{2}; tg\frac{B}{2}; tg\frac{C}{2} \in (0; 1))$

Với A, B, C là 3 cạnh một tam giác.

Ta cần chứng minh $tanA + tanB + tanC \geq \sqrt{3}$

Để chứng minh bất đẳng thức này ta chỉ cần sử dụng đẳng thức quen thuộc:

$tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$

Cách 2: Vì $0 < x < 1$ nên $1 - x^2 > 0$ áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{2}{3} = \frac{2x^2 + (1-x^2) + (1-x^2)}{3} \geq \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2} \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq x(1-x^2) \Rightarrow \frac{x}{1-x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

Thiết lập tương tự rồi cộng lại ta có

$$VT \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(xy + xz + yz) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dấu "=" đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Cách 3: Ta có đánh giá sau

$$\frac{x}{1-x^2} \geq \frac{6x - \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{3}x - 1)^2(2x + \sqrt{3}) \geq 0 \text{ (đúng do x>0)}$$

Thiết lập tương tự rồi cộng lại

$$VT \geq \frac{6(x+y+z) - 3\sqrt{3}}{2} \geq \frac{6.\sqrt{3(xy+xz+yz)} - 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

<u>Bài 6:</u> (3 điểm) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2y^2 + 2y^2 + 4 = 7xy (1) \\ x^2 + 2y^2 + 6y = 3xy^2 (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có : $\frac{x^2+2y^2}{3y} = xy - 2$

Từ (1) ta có:

$$x^2y^2 + 4 - 4xy = 3xy - 2y^2 \Leftrightarrow (xy-2)^2 = 3xy - 2y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 + 2y^2}{3y}\right)^2 = 3xy - 2y^2$$

Nhận thấy $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế cho y^2 ta được $\left(\frac{t^2}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 = 3t - 2$ với $t = \frac{x}{y}$

$$\Leftrightarrow t^4 + 4t^2 - 27t + 22 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3 + t^2 + 5t - 22) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$$

Với $t = 1$ thì $x = y$ giải ra ta được $\left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = 2 \end{array}\right.$ Với $t = 2$ ta thấy không thỏa mãn. Vậy phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (1; 1); (2; 2)$

Hết