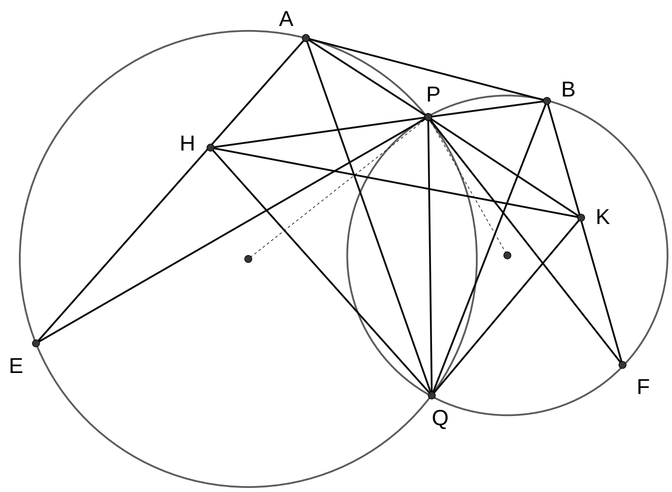
LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG
THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA

****

<u>Bài 1</u>: *Hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm P và Q. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn gần P hơn Q tiếp xúc với (C_1) tại A và tiếp xúc với (C_2) tại B. Các tiếp tuyến của (C_1), (C_2) kẻ từ P cắt đường tròn kia lần lượt tại E và F, (E, F khác P). Gọi H, K lần lượt là các điểm nằm trên các đường thẳng AF, BE sao cho AH = AP và BK = BP. Chứng minh rằng năm điểm A, H, Q, K, B cùng thuộc một đường tròn.*

(*Đề TST 2000*)

Lời giải.



Gọi H' là giao điểm của PB và AE. Ta sẽ chứng minh $H \equiv H'$.

Thật vậy:

Do PE là tiếp tuyến của (C_2) nên $\widehat{EPQ} = \widehat{PBQ}$ (cùng chắn cung $\widehat{PQ}$).

Mặt khác:

$\widehat{EAQ} = \widehat{EBQ}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{EQ}$ của đường tròn (C_1)).

Do đó: $\widehat{EAQ} = \widehat{PBQ} \Rightarrow \widehat{QAH'} = \widehat{QBH'}$.

Suy ra tứ giác ABQH' nội tiếp.

Từ đó ta có: $\widehat{AH'B} = \widehat{AQP}$.

Ta lại có:

$\widehat{AQB} = \widehat{PQA} + \widehat{PQB} = \widehat{PAB} + \widehat{PBA} =$

$= 180^0 - \widehat{APB} = \widehat{APH'}$

Kết hợp các điều trên, ta được : $\widehat{AH'P} = \widehat{APH'}$ hay tam giác APH cân tại H'

$\Rightarrow AP = AH' \Rightarrow H \equiv H'$.

Từ đây ta được tứ giác AHQB là tứ giác nội tiếp.

Hoàn toàn tương tự : tứ giác AQKB cũng nội tiếp.

Vậy 5 điểm A, B, Q, H, K cùng thuộc một đường tròn.

Ta có đpcm.

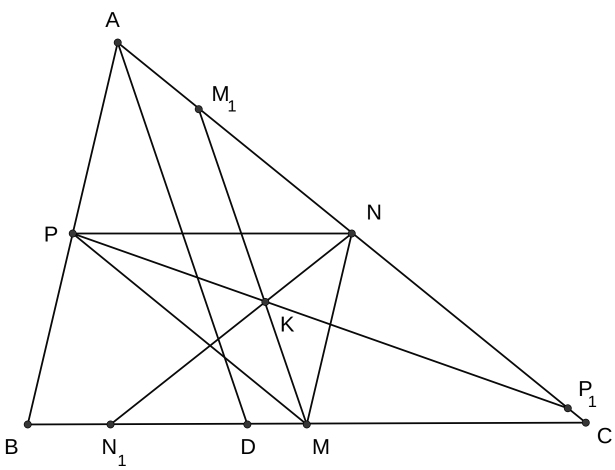
<u>Bài 2</u>: *Trên các cạnh của ΔABC lấy các điểm M_1, N_1, P_1 sao cho các đoạn MM_1, NN_1, PP_1 chia đôi chu vi tam giác, trong đó M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, CA, AB. Chứng minh rằng:*

1. ***Các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy tại một điểm. Gọi điểm đó là K.***
2. ***Trong các tỉ số $\frac{KA}{BC}$, $\frac{KB}{CA}$, $\frac{KC}{AB}$ có ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn $\frac{1}{\sqrt{3}}$.***

(*Đề TST 2003*)

Lời giải.

1. Nếu ΔABC đều thì các điểm M_1, N_1, P_1 lần lượt trùng với các đỉnh A, B, C của ΔABC nên rõ ràng các đoạn MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy.



Xét trường hợp ΔABC không đều, khi đó có hai cạnh của tam giác không bằng nhau, giả sử : $AB < AC$. Khi đó, do MM_1 chia đôi chu vi ΔABC nên M_1 phải nằm trên cạnh AC và :

$$AB + AM_1 = CM_1 \Rightarrow AB + AC = 2CM_1$$

$$\Rightarrow \frac{CM_1}{AC} = \frac{AB + AC}{2AC}$$

Mặt khác , gọi AD là phân giác góc A thì theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB + DC}{DC} = \frac{AB + AC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{AB + AC}{AC} \Rightarrow \frac{MC}{DC} = \frac{AB + AC}{2AC}.$$

Từ đó, suy ra : $\frac{CM_1}{AC} = \frac{MC}{DC}$, theo định lí Thalès đảo, ta được : MM_1 // AD.

Do MP // AC và MN // AB nên: $\widehat{P_1MM_1} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{NMP}$ hay MM_1 là phân giác $\widehat{NMP}$.

Tương tự, ta có : NN_1, PP_1 cũng là các đường phân giác của ΔMNP . Suy ra : MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy tại tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MNP. Ta có đpcm.

2. Gọi G là trọng tâm của ΔABC, ta có :

$$KA^2 + KB^2 + KC^2 = (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GC})^2 =$$

$$3KG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) + 2\overrightarrow{KG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3KG^2 + \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Suy ra : $KA^2 + KB^2 + KC^2 \geq \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

Giả sử cả ba tỉ số $\frac{KA}{BC}$, $\frac{KB}{CA}$, $\frac{KC}{AB}$ đều bé hơn $\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow KA^2 + KB^2 + KC^2 < \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

Điều mâu thuẫn này suy ra đpcm.

***Bài 3**: Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Đường phân giác ngoài của góc BHC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Đường phân giác trong của góc BAC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại điểm K.*

Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua trung điểm của đoạn BC.

(*Đề TST 2006*)

Lời giải.

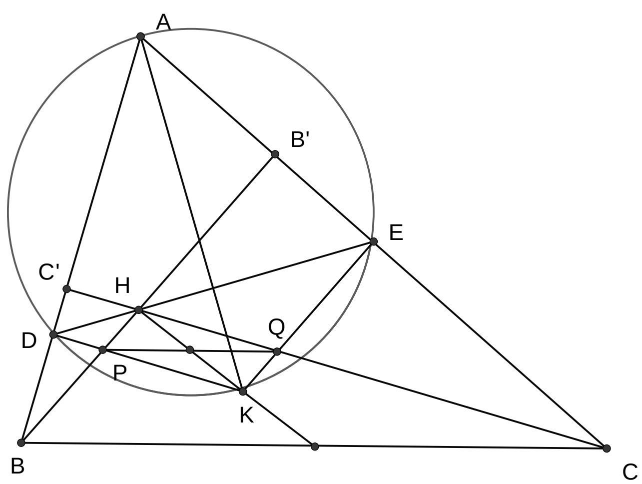
Trước hết ta sẽ chứng minh ΔADE cân tại A.

Thật vậy: Vì HD là phân giác góc ngoài của $\widehat{BHC}$ nên:

$\widehat{DHB} = \frac{1}{2}(\widehat{HBC} + \widehat{HCB}) = \frac{1}{2}\left[(90^0 - \widehat{ABC}) + (90 - \widehat{ACB})\right] = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Do đó: $\widehat{ADE} = \widehat{DBH} + \widehat{DHB} = 90^0 - \widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Tương tự, ta cũng có: $\widehat{AED} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, suy ra: $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$, tức là tam giác ADE cân tại A.



Mặt khác AK là phân giác $\widehat{DAE}$ nên cũng là trung trực của đoạn DE, do đó AK chính là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADE.

Từ đó ta có: $KD \perp AB$, tương tự: $KE \perp AC$.

Gọi P là giao điểm của KD và HB, Q là giao điểm của KE và HC.

Ta có: $KP \perp AB,\ QH \perp AB \Rightarrow$ KP // QH.

Tương tự, ta cũng có: KQ // PH. Suy ra: KPHQ là hình bình hành, tức là HK đi qua trung điểm của PQ.

Hơn nữa, theo định lí Thalès: DP // HC'

$\Rightarrow \frac{PB}{PH} = \frac{DB}{DC'}$, QE // HB' $\Rightarrow \frac{QC}{QH} = \frac{EC}{EB'}$.

Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DB}{DC'} = \frac{HB}{HC'}, \frac{EC}{EB'} = \frac{HC}{HB'}$.

Vì B, C, B', C' cùng thuộc đường tròn đường kính BC nên theo tính chất phương tích: $HB.HB' = HC.HC' \Rightarrow \frac{HB}{HC'} = \frac{HC}{HB'}$.

Từ các điều này, ta được: $\frac{PB}{PH} = \frac{QC}{QH} \Rightarrow$ PQ // BC.

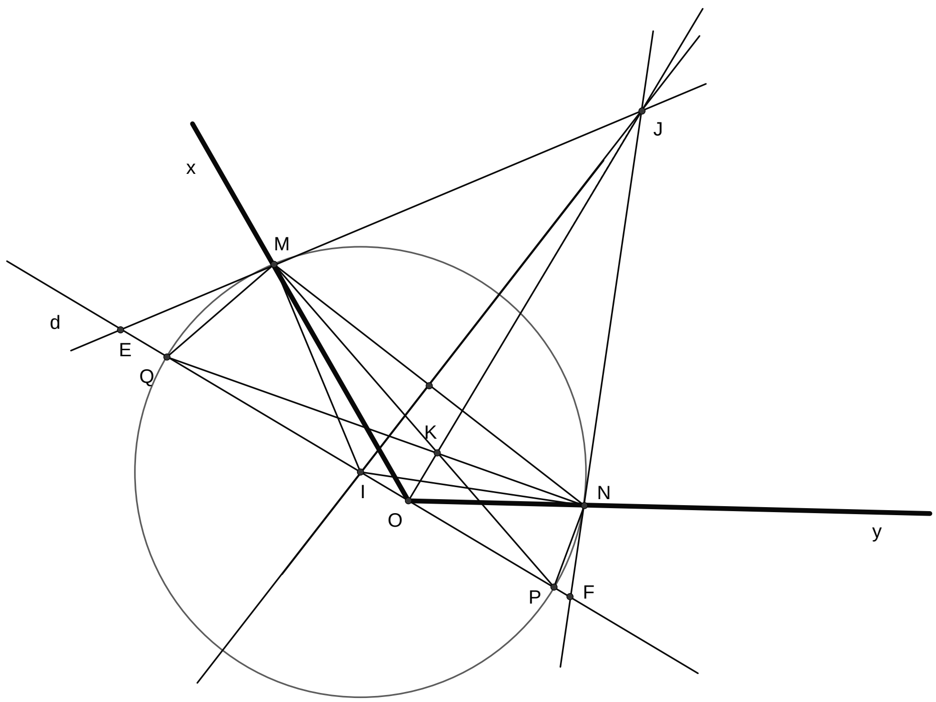
Vì HK đi qua trung điểm của PQ nên cũng đi qua trung điểm của BC. Ta có đpcm.

__Bài 4__***: Trong mặt phẳng cho góc xOy. Gọi M, N lần lượt là hai điểm lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy. Gọi d là đường phân giác góc ngoài của góc xOy và I là giao điểm của trung trực MN với đường thẳng d. Gọi P, Q là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng d sao cho IM = IN = IP = IQ, giả sử K là giao điểm của MQ và NP.***

1. ***Chứng minh rằng K nằm trên một đường thẳng cố định.***
2. ***Gọi d_1 là đường thẳng vuông góc với IM tại M và d_2 là đường thẳng vuông góc với IN tại N. Giả sử các đường thẳng d_1, d_2 cắt đường thẳng d tại E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng EN, FM và OK đồng quy.***

(*Đề TST 2006*)

Lời giải.



1. Xét trường hợp các điểm M, Q và N, P nằm cùng phía với nhau so với trung trực của MN. Khi đó giao điểm K của MP và NQ thuộc các đoạn này.:

Gọi I’ là giao điểm của d với đường tròn ngoại tiếp ΔMON . Do d là phân giác ngoài của $\widehat{MON}$ nên I’ chính là trung điểm của cung $\widehat{MON}$, do đó: I’M = I’N hay I’ chính là giao điểm của trung trực MN với d. Từ đó, suy ra: $I \equiv I'$ hay tứ giác MION nội tiếp.

Ta được: $\widehat{NIO} = \widehat{NMO}$.

Mặt khác: do IM = IN = IP = IQ nên tứ giác MNPQ nội tiếp trong đường tròn tâm I, đường kính PQ $\Rightarrow \widehat{PIN} = 2\widehat{PMN}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\widehat{PN}$).

Từ các điều trên, ta có: $\widehat{NMO} = 2\widehat{PMN} \Rightarrow$ MP là phân giác trong của $\widehat{OMN}$.

Tương tự, ta cũng có: NQ là phân giác trong của $\widehat{ONM}$.

Do K là giao điểm của MP và NQ nên K chính là tâm đường tròn nội tiếp của ΔMON , suy ra K thuộc phân giác trong của $\widehat{xOy}$, tức là K thuộc một đường thẳng cố định (đpcm).

- Nếu giao điểm K nằm ngoài các đoạn MP và NQ: ta cũng có lập luận tương tự và có được K là tâm đường tròn bàng tiếp $\widehat{MON}$ của tam giác ΔMON, tức là K cũng thuộc phân giác trong của $\widehat{xOy}$, là một đường thẳng cố định.

2. Gọi J là giao điểm của d_1 và d_2. Ta thấy tứ giác MINJ nội tiếp trong đường tròn đường kính IJ. Hơn nữa: MION cũng là tứ giác nội tiếp nên 5 điểm M, N, I, J, O cùng thuộc một đường tròn. Do đó: phân giác trong góc $\widehat{MON}$ đi qua trung điểm của cung $\widehat{MJN}$.

Rõ ràng M, N đối xứng nhau qua trung trực của MN nên JM = JN, tức là J cũng là trung điểm của cung $\widehat{MON}$.

Từ đó suy ra: J thuộc phân giác trong của $\widehat{MON}$ hay O, K, J thẳng hàng.

Ta cần chứng minh các đoạn OI, EN và MF trong ΔJEF đồng quy.

Thật vậy: $\dfrac{OE}{OF}=\dfrac{S_{OEJ}}{S_{OFJ}}=\dfrac{JO.JE.\sin OJE}{JO.JF.\sin OJF}=\dfrac{JE}{JF}.\dfrac{\sin OJE}{\sin OJF}$.

Trong ΔJEF và ΔMON, ta có : $\dfrac{JE}{JF}=\dfrac{\sin JFE}{\sin JEF},\dfrac{OM}{ON}=\dfrac{\sin ONM}{\sin OMN}$.

Mặt khác : $\widehat{OJE}=\widehat{OJN}=\widehat{ONM},\widehat{OJF}=\widehat{OJM}=\widehat{OMN}\Rightarrow\dfrac{\sin OJE}{\sin OJF}=\dfrac{\sin ONM}{\sin OMN}$.

Kết hợp lại, ta được : $\dfrac{OE}{OF}=\dfrac{\sin JFE}{\sin JEF}.\dfrac{OM}{ON}=\dfrac{\sin OFN}{\sin OEM}.\dfrac{OM}{ON}=\dfrac{\sin OFN}{\sin OEM}.\dfrac{OM}{ON}$

$=\dfrac{\sin OFN}{ON.\sin NOF}.\dfrac{OM.\sin MOE}{\sin OEM}=\dfrac{ME}{NF}$.

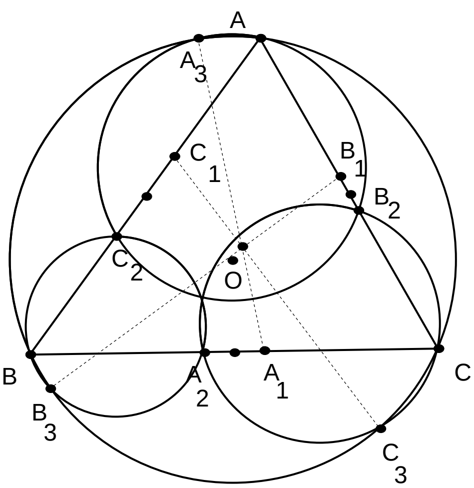
Do đó : $\dfrac{OE}{OF}.\dfrac{FN}{EM}=1\Rightarrow\dfrac{OE}{OF}.\dfrac{NF}{NJ}.\dfrac{MJ}{ME}=1$.

Theo định lí Ceva đảo, ta có OI, EN và MF đồng quy. Đây chính là đpcm.

<u>Bài 5:</u>* *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 và A_2, B_2, C_2 lần lượt là các chân đường cao của tam giác ABC hạ từ các đỉnh A, B, C và các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là các giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2 với đường tròn (O).
Chứng minh rằng: A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.

(*Đề TST 2009*)

Lời giải.



Ta sẽ chứng minh các đường thẳng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 cùng đi qua trọng tâm của tam giác ABC.
Thật vậy:

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC, A’ là điểm đối xứng với A qua trung trực của BC.

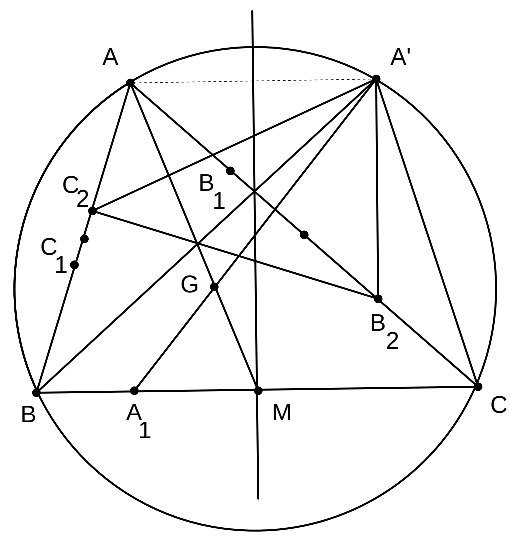
Ta sẽ chứng minh rằng A’ trùng với A_3 hay đường tròn (AB_2C_2) cắt (O) tại A’.

Ta có: A, A’ đối xứng nhau qua trung trực của BC nên: AB = A’C, AC = A’B.

Do A, B và C_1, C_2 cùng đối xứng với nhau qua trung điểm của AB nên $BC_2 = AC_1$.
Tương tự: $CB_2 = AB_1$. Suy ra:

$$\frac{BC_2}{CB_2} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Kết hợp với $\widehat{C_3BA'} = \widehat{B_3CA'}$ (cùng chắn cung AA’), ta được:



$$\Delta C_2BA' \sim \Delta B_2CA' \quad (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BC_2A'} = \widehat{CB_2A'}$$
$$\Rightarrow 180^0 - \widehat{BC_2A'} = 180^0 - \widehat{CB_2A'} \Rightarrow \widehat{AC_2A'} = \widehat{AB_2A'}.$$

Do đó, tứ giác AC_2B_2A’ là tứ giác nội tiếp hay A’ trùng với A_3. Gọi G là giao điểm của trung tuyến AM với A_1A_3. Do AA_3 // A_1M nên: $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{AA_3}{A_1M} = 2$.

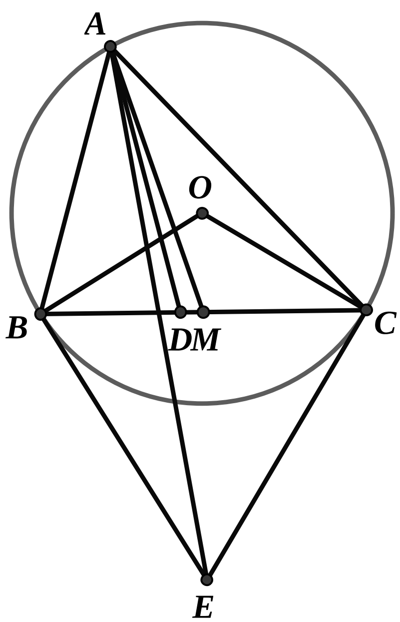
$\Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ABC hay đường thẳng A_1A_3 đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.
Tương tự: B_1B_3, C_1C_3 cũng đi qua G.
Vậy các đường thẳng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.
Ta có đpcm.

Bài 6: ***Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi PT là một trong hai tiếp tuyến chung của hai đường tròn trong đó P, T là các tiếp điểm. Tiếp tuyến tại P và T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng với B qua đường thẳng PT. Chứng minh rằng các điểm A, S, H thẳng hàng.***

(*Đề TST 2001*)

Lời giải.

Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề:



"Trong một tam giác, đường đối trung xuất phát từ một đỉnh đi qua giao điểm của tiếp tuyến tại hai đỉnh còn lại của đường tròn ngoại tiếp tam giác."

Chứng minh:

Xét tam giác ABC nội tiếp (O) có phân giác AD, E là giao điểm của tiếp tuyến tại B và C của (O) với nhau. Gọi AM là đường thẳng đối xứng với AE qua AD (M thuộc BC). Ta sẽ chứng minh rằng M là trung điểm của BC.

Thật vậy, do AM đối xứng với AE qua phân giác AD nên: $\widehat{BAM}=\widehat{CAE},\widehat{CAM}=\widehat{BAE}$. Theo định lí sin trong các tam giác, ta có:

$$\frac{MB}{MC}=\frac{AM.\sin\widehat{BAM}}{AM.\sin\widehat{CAM}}.\frac{\sin\widehat{MBA}}{\sin\widehat{MCA}}=\frac{\sin\widehat{BAM}}{\sin\widehat{CAM}}.\frac{\sin\widehat{CBA}}{\sin\widehat{BCA}}=$$

$$=\frac{\sin\widehat{CAE}}{\sin\widehat{BAE}}.\frac{\sin\widehat{CBA}}{\sin\widehat{BCA}}=\frac{CE}{AE}.\frac{AE}{BE}=1$$

Vậy M là trung điểm BC. Bổ đề được chứng minh.

*Trở lại bài toán:

Ta có:

$\widehat{BPT}=\widehat{BAP},\widehat{BTP}=\widehat{BAT}$. Suy ra:

$\widehat{PAT}=\widehat{BAP}+\widehat{BAT}=\widehat{BPT}+\widehat{BTP}=180^0-\widehat{PBT}$

$=180^0-\widehat{PHT}\Rightarrow\widehat{PAT}+\widehat{PHT}=180^0$

Do đó tứ giác PATH nội tiếp.

Gọi I là giao điểm của AB với PT. Theo tính chất phương tích, ta có:

$IP^2=IB.IA,\ IT^2=IB.IA\Rightarrow IP=IT$

hay I là trung điểm của PT.

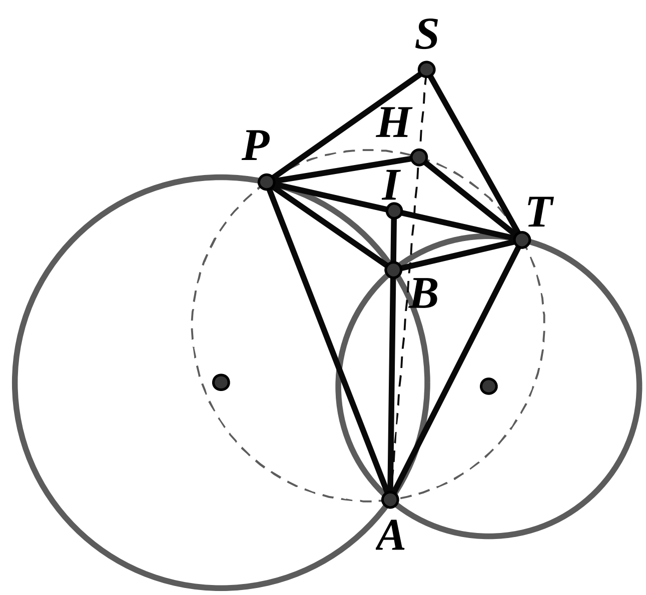
Hơn nữa, ta cũng có:

$\widehat{BAP}=\widehat{BPT}=\widehat{HPT}=\widehat{HAT}$.

Suy ra AH đối xứng với trung tuyến AI của tam giác APT qua phân giác góc $\widehat{PAT}$.

Do S là giao điểm của tiếp tuyến tại P và tại T của (APT) nên theo bổ đề trên, ta có: A, H, S thẳng hàng.

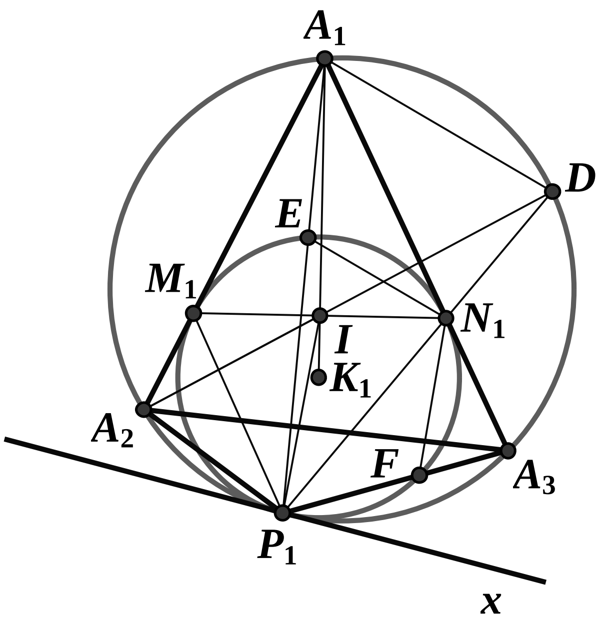
Đây chính là đpcm.



<u>Bài 7</u>: Cho tam giác $A_1A_2A_3$ nội tiếp trong đường tròn (O). Một đường tròn (K_1) tiếp xúc với các cạnh A_1A_2, A_1A_3 và tiếp xúc trong với đường tròn (O) lần lượt tại các điểm M_1, N_1, P_1. Các điểm M_2, N_2, P_2 và M_3, N_3, P_3 xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

(*Đề TST 1999*)

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AP_1, CP_1 với đường tròn (K_1), gọi D là giao điểm của N_1P_1 với (O). Ta sẽ chứng minh rằng D là trung điểm của cung $\widehat{A_1A_3}$. Thật vậy:

Gọi P1x là tiếp tuyến của (O) tại P_1. Ta có:

$\widehat{N_1AE}=\widehat{A_3AP_1}=\widehat{A_3P_1x}=\widehat{FP_1x}=\widehat{FN_1P_1}$

Hơn nữa, tứ giác EN_1FP_1 nội tiếp nên $\widehat{N_1EA}=\widehat{N_1FP_1}$, suy ra: $\Delta AEN_1 \sim \Delta N_1FP_1(g.g)$

$\Rightarrow \widehat{FP_1N_1}=\widehat{AN_1E}=\widehat{AP_1N_1} \Rightarrow$ P_1N_1 là phân giác của góc $\widehat{AP_1A_3}$ hay D là trung điểm của cung $\widehat{A_1A_3}$.

Từ đó, ta cũng có: A_2D là phân giác góc $\widehat{A_1A_2A_3}$. Gọi I là giao điểm của A_2D với M_1N_1. Ta sẽ chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A_1A_2A_3$.

Ta có: $\widehat{IM_1P_1}=\widehat{N_1M_1P_1}=\widehat{N_1P_1x}=\widehat{DP_1x}=\widehat{DA_2P_1}=\widehat{IA_2P_1}\Rightarrow$ Tứ giác $IM_1A_2P_1$ nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{P_1IA_2}=\widehat{P_1M_1A_2}$, mà $\widehat{P_1M_1A_2}=\widehat{P_1N_1M_1}$ nên $\widehat{P_1IA_2}=\widehat{P_1N_1M_1}\Rightarrow \widehat{DIP_1}=\widehat{DN_1I}$.

Do đó: $\Delta DIP_1 \sim \Delta DN_1I(g.g) \Rightarrow \dfrac{DI}{DN_1}=\dfrac{DP_1}{DI}\Rightarrow DI^2=DN_1.DP_1$.

Ta cũng có: $\widehat{DA_1N_1}=\widehat{A_3P_1N_1}=\widehat{DP_1N_1}\Rightarrow \Delta DA_1N_1 \sim \Delta DP_1A_1(g.g)\Rightarrow \dfrac{DA_1}{DP_1}=\dfrac{DN_1}{DA_1}\Rightarrow DA_1^2=DN_1.DP_1$

Do đó: $DI^2=DA_1^2 \Rightarrow DI=DA_1$ hay ΔDIA_1 cân tại D.

$\Rightarrow \widehat{DIA_1}=\widehat{DA_1I}\Rightarrow \widehat{A_1A_2I}+\widehat{IA_1A_2}=\widehat{DA_1N_1}+\widehat{N_1A_1I}\Rightarrow \dfrac{\widehat{A_1A_2A_3}}{2}+\widehat{IA_1A_2}=\dfrac{\widehat{A_1A_2A_3}}{2}+\widehat{N_1A_1I}$

$\Rightarrow \widehat{IA_1A_2}=\widehat{N_1A_1I}$ hay A_1I chính là phân giác $\widehat{A_2A_1A_3}$.

Từ đó suy ra I chính là tâm đường tròn nội tiếp của $\Delta A_1A_2A_3$.

Dễ thấy $\Delta A_1M_1N_1$ cân tại A_1 và A_1I là phân giác $\widehat{A_2A_1A_3}$ nên I là trung điểm của M_1N_1.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có: I là trung điểm của M_2N_2, M_3N_3.

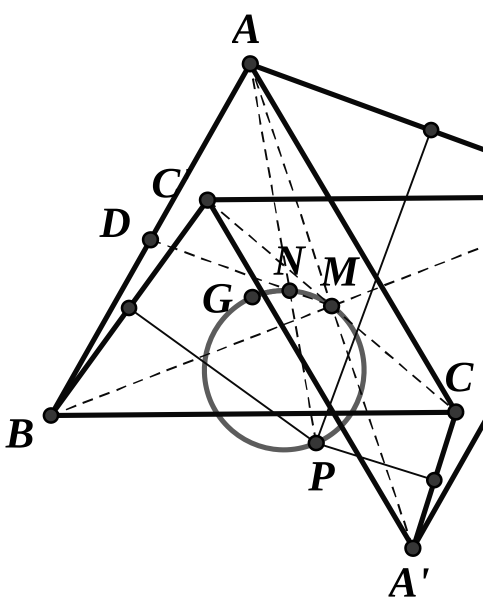
Vậy các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Ta có đpcm.

<u>Bài 8:</u> Cho tam giác ABC đều và điểm M nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của các điểm A, B, C qua phép đối xứng tâm M.

1. ***Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm điểm P trong mặt phẳng cách đều hai đầu mút của các đoạn thẳng AB', BC', CA'.***
2. ***Gọi D là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng khi M thay đổi trong tam giác ABC và không trùng với D thì đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP, trong đó N là giao điểm của DM và AP, luôn đi qua một điểm cố định.***

(*Đề TST 1995*)



Lời giải.

1. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Qua phép đối xứng Φ_1 tâm M (tương đương với phép quay 180^0) :

$G \to G'$, $\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$. Xét phép quay Φ_2 tâm G', góc quay 120^0, ta có:

$\Phi_2 : \Delta A'B'C' \to \Delta B'C'A'$. Suy ra:

$\Delta ABC \xrightarrow{\Phi_1} \Delta A'B'C' \xrightarrow{\Phi_2} \Delta B'C'A'$

Tích của hai phép quay Φ_1, Φ_2 là một phép quay mới do tổng góc quay của chúng là: $180^0 + 120^0 = 300^0 \equiv -60^0 (\bmod 360^0)$

Gọi P là tâm của phép quay $\Phi = \Phi_1.\Phi_2$, rõ ràng P tồn tại và duy nhất. Khi đó, ta có:

$\Phi : G \to G'$, $\Delta ABC \to \Delta B'C'A'$.

Do đó, điểm P cách đều các đầu mút của các đoạn AB', BC', CA'. Đây chính là đpcm.

2. Do D là trung điểm của AB nên $(GA, GD) = 60^0$ .Gọi Ψ là phép biến hình hợp bởi phép quay tâm G, góc quay 60^0 và phép vị tự tâm G, tỉ số $\frac{1}{2}$ theo thứ tự đó.

Ta thấy: $\Psi : G \to G, A \to D$.

Theo câu 1/, Φ biến G thành G' nên: $PG = PG'$, $(PG, PG') = -60^0$ nên tam giác PGG' đều. Hơn nữa, $\Phi_1 : G \to G'$ nên M là trung điểm của GG'. Suy ra: $GM \perp MP, GM = \frac{MP}{2}$.

Do đó: $\Psi : P \to M$. Từ đó, suy ra: $\Psi : \Delta GPA \to \Delta GMD$.

Ta sẽ chứng minh rằng các điểm G, M, N, P cùng thuộc một đường tròn. (*)

Thật vây: Vì qua phép biến hình Ψ, đường thẳng PA biến thành đường thẳng MD nên góc tạo bởi hai đường này là 60^0, tức là: $\widehat{MNP} = 60^0$ hoặc $\widehat{MNP} = 120^0$ (tùy theo góc này nhọn hay tù). Vì $\widehat{PGM} = 60^0$ nên nếu $\widehat{MNP} = 60^0$ thì hai điểm G và N cùng nhìn đoạn PM dưới góc 60^0 nên (*) đúng; nếu như $\widehat{MNP} = 120^0$ thì $\widehat{PGM} + \widehat{MNP} = 180^0$ nên (*) cũng đúng.

Do đó, trong mọi trường hợp, 4 điểm G, M, N, P cùng thuộc một đường tròn hay (MNP) luôn đi qua điểm G cố định. Ta có đpcm.

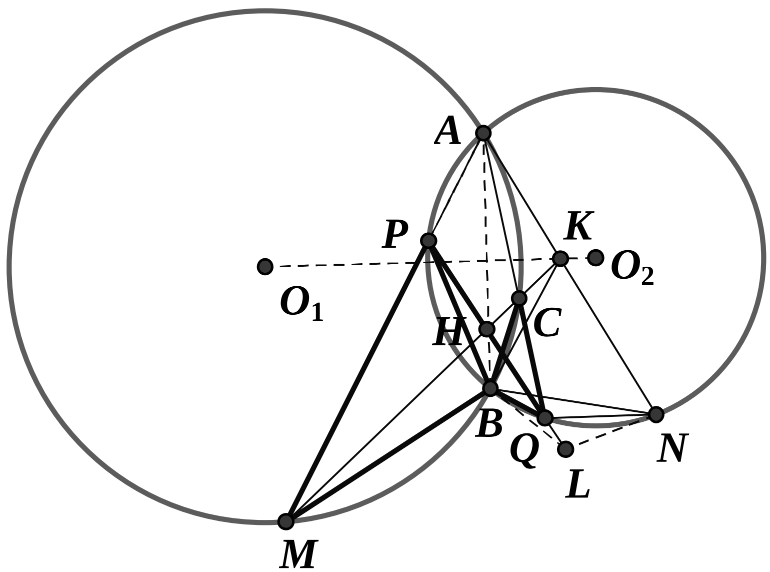
<u>Bài 9:</u> *Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O_1) cắt nhau tại K. Xét một điểm M không trùng với A, B nằm trên đường tròn (O_1). Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng MA với đường tròn (O_2). Gọi C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MK với đường tròn (O_1). Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng CA với đường tròn (O_2). Chứng minh rằng:*

1. ***Trung điểm của đoạn thẳng PQ nằm trên đường thẳng MC.***
2. ***Đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên (O_1).***

(*Đề TST 2004*)

Lời giải.

1. Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cung lớn $\overset{\frown}{AB}$, trường hợp còn lại M thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ được chứng minh tương tự.



Gọi H là giao điểm của đoạn PQ với MC. Ta cần chứng minh rằng: $PH = QH$.

Do BK là tiếp tuyến kẻ từ K của (O_1) và KCM là cát tuyến tương ứng nên:

$\Delta BCK \sim \Delta MBK(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BC}{BM} = \dfrac{CK}{BK}$.

Hoàn toàn tương tự:

$\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{CK}{AK}$.

Mà $AK = BK$ (do KA, KB là các tiếp tuyến của (O_1)) nên từ các tỉ số trên, suy ra:

$\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{BC}{BM}$.

Ta có:

Tứ giác AMBC nội tiếp (O_1) nên: $\widehat{AMB} = \widehat{BCQ} \Rightarrow \widehat{PMB} = \widehat{BCQ}$.

Tứ giác AQBP nội tiếp (O_2) nên: $\widehat{BPM} = \widehat{AQB} \Rightarrow \widehat{BPM} = \widehat{CQB}$.

Suy ra: $\Delta BMP \sim \Delta BCQ(g.g) \Rightarrow \dfrac{MP}{CQ} = \dfrac{BM}{BC}$.

Xét tam giác APQ với cát tuyến CHM, theo định lí Menelaus:

$$\frac{CA}{CQ}.\frac{HQ}{HP}.\frac{MP}{MA} = 1 \Leftrightarrow \frac{HP}{HQ} = \frac{AC}{AM}.\frac{MP}{CQ} = \frac{BC}{BM}.\frac{BM}{BC} = 1.$$

Suy ra H là trung điểm của PQ (đpcm).

2. Xét các góc nội tiếp cùng chắn các cung, ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} = \widehat{BPQ}$ và $\widehat{BCM} = \widehat{BAM} = \widehat{BQP}$, do đó: $\Delta BMC \sim \Delta BPQ(g.g)$.

Do đó, tồn tại một phép đồng dạng f biến ΔBMC thành ΔBPQ.

Rõ ràng nếu một phép đồng dạng biến ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng tương ứng thì nó cũng biến đường tròn ngoại tiếp của tam giác tạo bởi ba điểm ban đầu thành đường tròn ngoại tiếp của tam giác tạo bởi ba điểm sau đó.

Ta thấy: các điểm B, C, M thuộc (O_1), B, P, Q thuộc (O_2) nên từ nhận xét trên: f biến (O_1) thành (O_2).

Gọi N là giao điểm thứ hai của AK với đường tròn (O_2).

Ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{BNQ}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BQ}$ của (O_2)).

Do đó, f biến C thành Q nên cũng biến A thành N.

Suy ra, f biến giao điểm K của tiếp tuyến tại A, B của (O_1) thành giao điểm L của tiếp tuyến tại N và B của đường tròn (O_2).

Hơn nữa, A và K cố định nên N cố định, suy ra L xác định như trên cũng cố định.

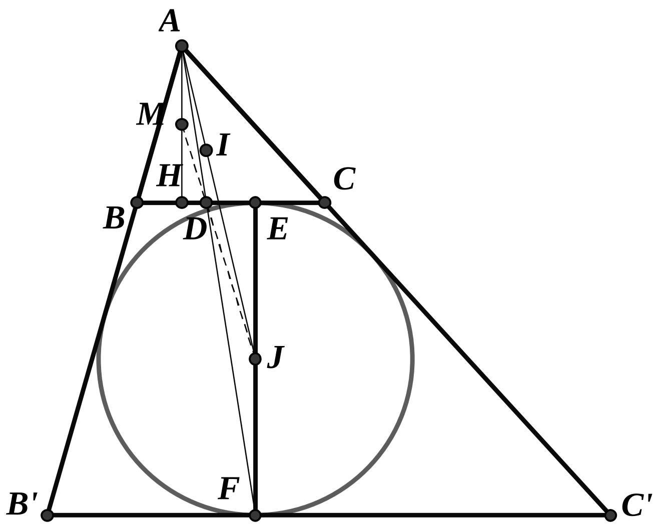
Phép biến hình f này biến M, C tương ứng thành P, Q và K nằm trên đoạn MC nên điểm L cũng phải nằm trên đoạn PQ.

Từ đó, suy ra: đường thẳng PQ luôn đi qua điểm L cố định. Ta có đpcm.

<u>Bài 10</u>: *Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi H, K, L lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm của các đường cao AH, BK, CL. Đường tròn nội tiếp tâm I của tam giác ABC tiếp xúc với các đoạn BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng A_0D, B_0E, C_0F cùng đi qua một điểm và điểm đó nằm trên đường thẳng OI.*
(Nếu O trùng I thì coi OI là đường thẳng tùy ý qua O).

(*Đề TST 2003*)

Lời giải.
Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề:



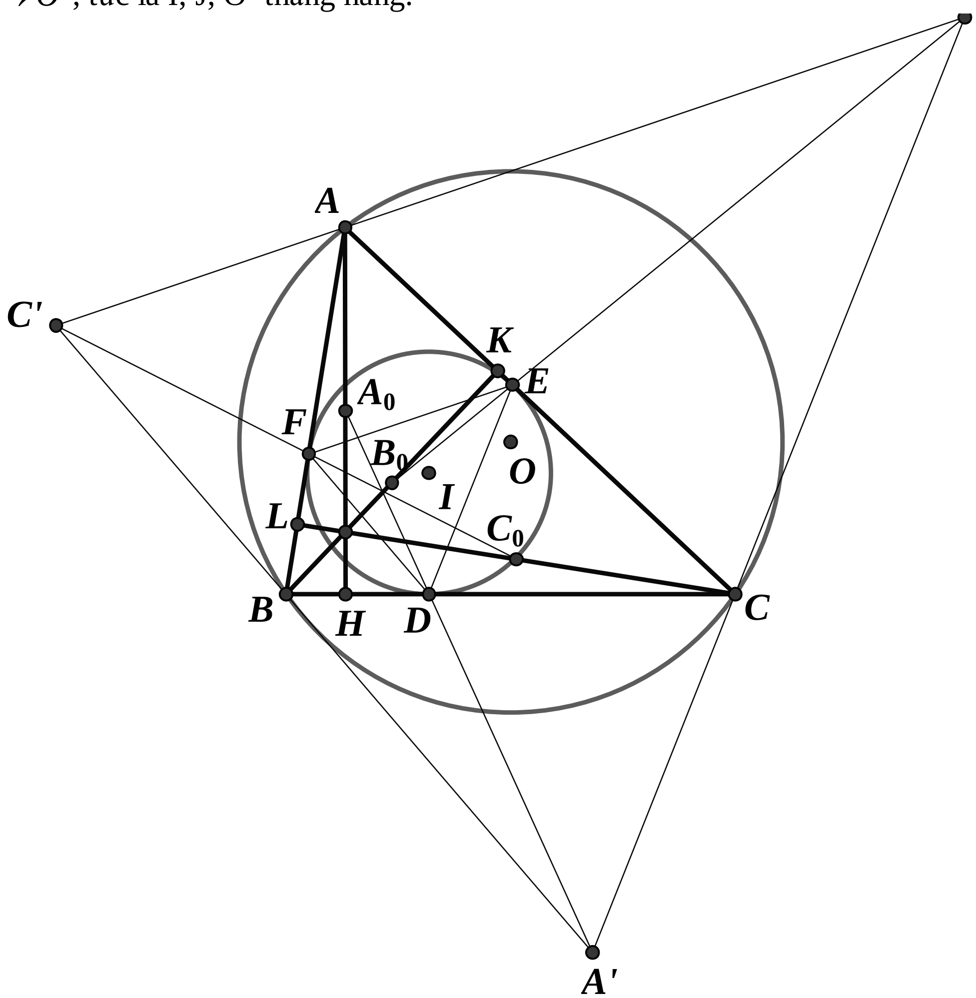
"Cho tam giác ABC nhọn ngoại tiếp đường tròn (I) và (J) là đường tròn bàng tiếp góc A. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC và M là trung điểm AH. (I) tiếp xúc với BC tại D.
Khi đó: M, D, J thẳng hàng."

*Chứng minh: Gọi E là tiếp điểm của (J) trên BC và F là điểm đối xứng với E qua J, gọi B', C' lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến tại F của (J) với các tia AB, AC. Dễ thấy BC // B'C' nên $\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$, tức là tồn tại phép vị tự Γ tâm A sao cho: $\Gamma : \Delta ABC \to \Delta AB'C'$.
Do D là tiếp điểm của (I) trên BC, F là tiếp điểm của (J) trên B'C' nên theo tính chất của phép vị tự, ta có:
$\Gamma : D \to F$, suy ra: A, D, F thẳng hàng.
Gọi J' là giao điểm của đường thẳng DM với EF thì:
$\frac{J'E}{MH} = \frac{DE}{DH} = \frac{DF}{DA} = \frac{J'F}{MA}$, mà $MA = MH$ nên $J'E = J'F \Rightarrow J' \equiv J$, tức là M, D, J thẳng hàng.
Bổ đề được chứng minh.

*Trở lại bài toán:
Gọi A', B', C' lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC.
Theo bổ đề trên thì: A_0, D, A'; B_0, E, B'; C_0, F, C' là các bộ ba điểm thẳng hàng.

Dễ thấy: DE // A'B' (cùng vuông góc với phân giác trong của góc $\widehat{ACB}$).
Tương tự: EF // B'C', FD // C'A'. Từ đó suy ra: $\Delta DEF \sim \Delta A'B'C'$.
Do đó, tồn tại một phép vị tự Ω tâm J thỏa mãn: $\Omega : \Delta DEF \to \Delta A'B'C'$.
Từ đó suy ra các đường thẳng A'D, B'E, C'F đồng quy tại tâm vị tự J nói trên hay A_0D, B_0E, C_0F đồng quy tại J.
Ta chỉ còn cần chứng minh J nằm trên đường thẳng OI.
Ta thấy:
O là tâm đường tròn Euler của tam giác A'B'C'.
I là trực tâm của tam giác A'B'C'.

Suy ra: tâm đường tròn ngoại tiếp O’ của tam giác A’B’C’ đối xứng với I qua O và hiển nhiên nó nằm trên đường thẳng OI.
Hơn nữa: I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF nên theo tính chất của phép vị tự: $\Omega: I \to O'$, tức là I, J, O’ thẳng hàng.



Từ đó suy ra bốn điểm I, J, O’, O thẳng hàng hay J nằm trên đường thẳng OI.
Trong trường hợp I trùng với O thì tam giác ABC đều và bốn điểm I, J, O, O’ trùng nhau, khi đó bài toán vẫn đúng.
Vậy ta có đpcm.

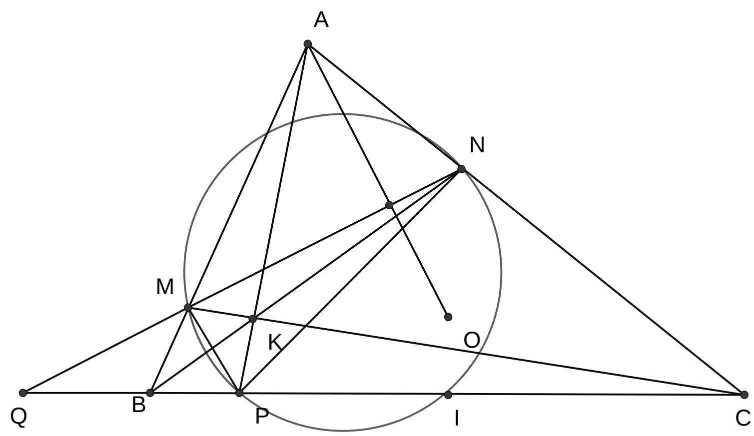
Bài 11: ***Cho tam giác ABC là tam giác nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Một đường thẳng d thay đổi sao cho d luôn vuông góc với OA và luôn cắt các tia AB, AC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng d và các đoạn AB, AC. Giả sử các đường thẳng BN và CN cắt nhau tại K; giả sử đường thẳng AK cắt đường thẳng BC.***

1. ***Gọi P là giao của đường thẳng AK và đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi.***
2. ***Gọi H là trực tâm của tam giác AMN. Đặt BC = a và l là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng HK. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua trực tâm của tam giác ABC.***

   Từ đó suy ra: $l \le \sqrt{4R^2 - a^2}$ ***. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?***

(*Đề TST 2006*)

Lời giải.



a. Không mất tính tổng quát, giả sử AB < AC (trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự).

Do tam giác ABC không cân nên AO không vuông góc với BC và MN không song song với BC, do đó MN phải cắt đường thẳng BC tại một điểm, giả sử là Q; gọi I là trung điểm BC.

Theo định lí Menelaus cho ba điểm Q, M, N thẳng hàng: $\frac{NA}{NC}.\frac{MB}{MA}.\frac{QB}{QC} = 1$.

Mặt khác, theo định lí Céva cho các đoạn AP, BN, CM đồng quy, ta có: $\frac{NA}{NC}.\frac{MB}{MA}.\frac{PB}{PC} = 1$.

Từ đó, suy ra: $\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC}$ hay Q, B, P, C là một hàng điểm điều hòa, suy ra: $IP.IQ = IB^2 = IC^2$

Do I là trung điểm BC nên $OI \perp BC \Rightarrow QI^2 - BI^2 = OQ^2 - OB^2$, do đó:

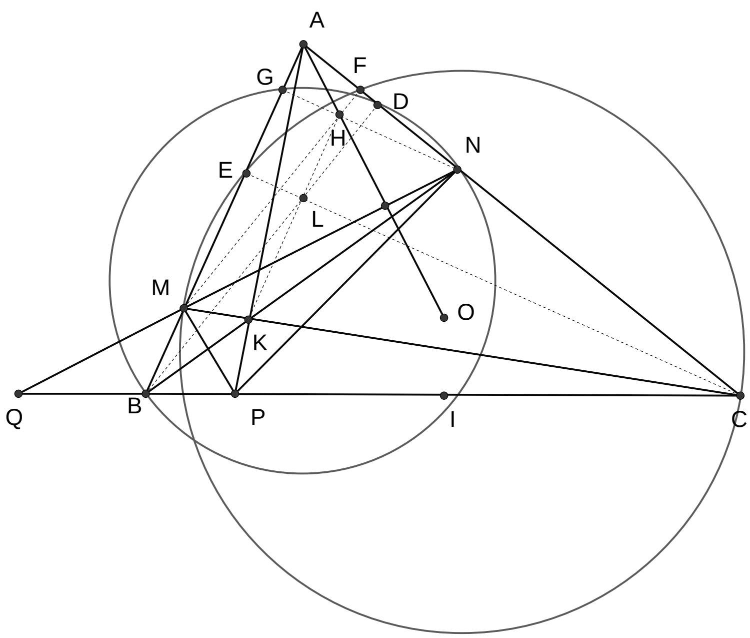
$QI.QP = QI^2 - QI.PI = QI^2 - IB^2 = OQ^2 - OB^2 = QB.QC$

(do theo tính chất phương tích của Q đối với (O) thì $OQ^2 - OB^2 = OQ^2 - R^2 = QB.QC$).

Mà tứ giác BMNC cũng nội tiếp vì có $\widehat{NCB} = \widehat{xAB} = \widehat{AMN}$ (với Ax là tia tiếp tuyến của (O)). Suy ra $QM.QN = QB.QC$.

Từ đó suy ra $QM.QN = QP.QI$, suy ra tứ giác MNIP nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua điểm I cố định. Ta có đpcm.

b. Gọi BD, CE là hai đường cao của tam giác ABC, L là trực tâm của tam giác ABC; gọi MF, NG là hai đường cao của tam giác AMN, H là trực tâm của tam giác AMN. Ta cần chứng minh rằng H, K, L thẳng hàng.



Xét đường tròn (O_1) đường kính BN và (O_2) đường kính CM.

Ta thấy: KM.KC = KB. KN nên K có cùng phương tích đến (O_1), (O_2), tức là K thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn này.

Đồng thời, dễ thấy rằng các điểm D, G thuộc (O_1) và M, F thuộc (O_2).

Do H, L là trực tâm của tam giác ABC và AMN nên LB. LD = LC. LE, HN. HG = HE. HM; tức là H, L cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1), (O_2).

Từ đó suy ra H, K, L cùng thuộc trục đẳng phương của (O_1), (O_2) nên chúng thẳng hàng.

Từ đó suy ra $l \le AL$.

Mặt khác do tam giác ABC nhọn nên $AL = 2OI = \sqrt{R^2 - \dfrac{BC^2}{4}} = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

Do đó $AL = l \le \sqrt{4R^2 - a^2}$. Đây chính là đpcm.

Đến đây, ta sẽ tìm vị trí của d sao cho đẳng thức xảy ra.

Giả sử d cắt AB, AC tại M và N thỏa mãn $\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}=k\Rightarrow MN=k.BC$.

Gọi R, S lần lượt là trung điểm của BN và CM; suy ra R, S cũng chính là tâm của hai đường tròn (O_1), (O_2).

Ta thấy khi đẳng thức xảy ra thì AL vuông góc với trục đẳng phương của (O_1), (O_2), tức là AL song song với đường nối tâm RS của hai đường tròn này, mà AL vuông góc với BC nên RS phải vuông góc với BC.

Ta có: $2\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{NM}$, mà $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{NM}).\overrightarrow{BC}=0$. Do góc tạo bởi MN và BC chính là $\widehat{MQB}=\widehat{ANM}-\widehat{ACB}=\widehat{ABC}-\widehat{ACB}$ nên từ đẳng thức trên suy ra:

$BC^2=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MN}=BC.kBC.\cos(B-C)\Rightarrow k=\frac{1}{\cos(B-C)}$.

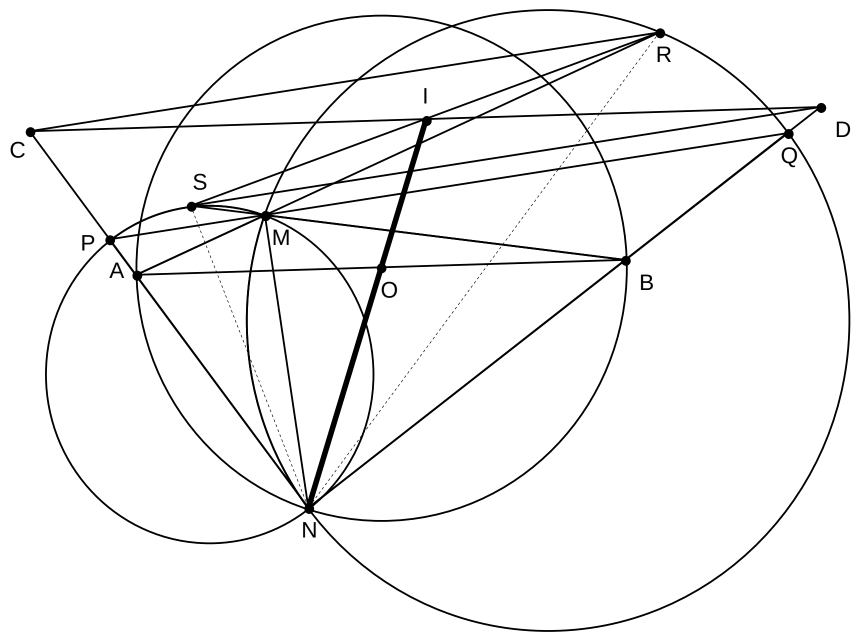
Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $k=\frac{1}{\cos(B-C)}$, tức là đường thẳng d cắt AB tại M, AC tại N sao cho $\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}=\frac{1}{\cos(B-C)}$.

<u>Bài 14</u>: Cho đường tròn (O) đường kính AB và M là một điểm bất kì nằm trong (O), M không nằm trên đoạn thẳng AB. Gọi N là giao điểm của phân giác trong góc M của tam giác AMB với đường tròn (O). Đường phân giác ngoài góc $\widehat{AMB}$ cắt các đường thẳng NA, NB lần lượt tại P, Q. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R, đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S và R, S khác M.

Chứng minh rằng: đường trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định khi M di động phía trong đường tròn.

(*Đề TST 2009*)

Lời giải.



Qua R kẻ đường thẳng song song với PQ cắt NA tại C, qua S kẻ đường thẳng song song với PQ cắt NB tại D. Gọi I là trung điểm của CD .
Ta sẽ chứng minh rằng CD // AB.

Thật vậy, do N nằm trên đường tròn đường kính AB nên: $\widehat{ANB} = 90^0 \Rightarrow AN \perp BN$, suy ra BN là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PN.

Do đó: $\Delta BMN \sim \Delta BNS(g.g)$

Vì PQ là đường phân giác góc ngoài của AMN nên $\widehat{SMP} = \widehat{AMP} = \widehat{QMR} = \widehat{BMQ}$.

Mặt khác: $\widehat{SMP} = \widehat{SNP}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung PS của đường tròn đường kính PN),

$\widehat{QMR} = \widehat{QNR}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung QR của đường tròn đường kính QN).

Do đó: $\widehat{SNP} = \widehat{QNR} \Rightarrow \widehat{SNP} + \widehat{SNR} = \widehat{QNR} + \widehat{SNR} \Rightarrow \widehat{CNR} = \widehat{SNB}$.

Xét hai tam giác Δ BNS và Δ RNC có: $\widehat{CNR} = \widehat{SNB}$ và $\widehat{RCN} = \widehat{MPN} = \widehat{NSM} = \widehat{NSB}$
nên: $\Delta BNS \sim \Delta RNC(g.g)$.

Suy ra các tam giác đồng dạng: $\Delta BMN \sim \Delta BNS \sim \Delta RNC$.

Tương tự, ta cũng có: $\Delta DSN \sim \Delta RAN \sim \Delta NAM$.

* Ta thấy, từ: $\Delta BNS \sim \Delta RNC \Rightarrow \dfrac{NB}{NR} = \dfrac{NS}{NC} \Rightarrow NB.NC = NR.NS$

$$\Delta DSN \sim \Delta RAN \Rightarrow \frac{NS}{NA} = \frac{ND}{NR} \Rightarrow NA.ND = NR.NS\,.$$

Suy ra: $NA.ND = NB.NC \Rightarrow \dfrac{NA}{NB} = \dfrac{NC}{ND} \Rightarrow$ AB // CD

$\Rightarrow$ Trung điểm của AB, trung điểm của CD và N là ba điểm thẳng hàng.
Tức là N, O, I thẳng hàng. (1)

Hơn nữa: $\Delta BMN \sim \Delta RNC \Rightarrow \dfrac{MN}{NC} = \dfrac{BN}{RC} \Rightarrow RC = \dfrac{NB.NC}{MN}\,.$

$$\Delta DSN \sim \Delta NAM \Rightarrow \frac{DN}{MN} = \frac{DS}{NA} \Rightarrow DS = \frac{NA.ND}{MN}\,.$$

Kết hợp các điều trên, ta được: RC = DS, mà RC // DS (cùng song song với PQ) nên tứ giác RCSD là hình bình hành.

Do đó, hai đường chéo CD và RS của tứ giác cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
Suy ra I là trung điểm của CD cũng là trung điểm của RS.
Khi đó: NI chính là đường trung tuyến của tam giác NRS. (2)

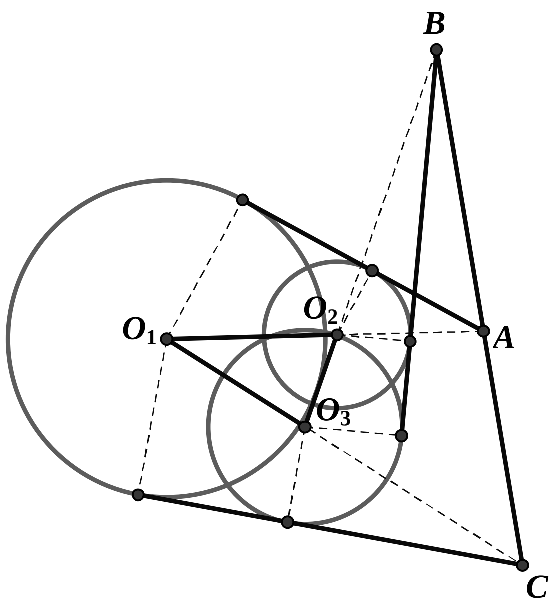
Từ (1) và (2), suy ra: trung tuyến NI của tam giác NRS luôn đi qua O.
Vậy trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua I là điểm cố định khi M di động khắp phía trong đường tròn (O).
Đây chính là điều phải chứng minh.

<u>Bài 12:</u> *Cho tam giác ABC có (I) và (O) lần lượt là các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) trên các cạnh BC, CA, AB. Gọi ω_A, ω_B, ω_C lần lượt là các đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn (I) và (O) lần lượt tại các điểm D, K (với đường tròn ω_A); tại E, M (với đường tròn ω_B) và tại F, N (với đường tròn ω_C). Chứng minh rằng:*

1. ***Các đường thẳng DK, EM, FN đồng quy tại P.***
2. ***Trực tâm của tam giác DEF nằm trên đoạn OP.***

(*Đề TST 2005*)

Lời giải.



1. Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có bán kính đôi một khác nhau; A, B, C lần lượt là tâm vị tự của các cặp đường tròn (O_1) và (O_2), (O_2) và (O_3), (O_3) và (O_1).
Chứng minh rằng nếu trong các tâm vị tự đó, có ba tâm vị tự ngoài hoặc hai tâm vị tự trong, một tâm vị tự ngoài thì A, B, C thẳng hàng.

*Chứng minh:

Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của các đường tròn $(O_1),(O_2),(O_3)$, các giá trị R_1, R_2, R_3 này đôi một khác nhau.

Theo tính chất về tâm vị tự, ta có: $\dfrac{\overline{AO_1}}{\overline{AO_2}} = (-1)^a \dfrac{R_1}{R_2}$.

Tương tự: $\dfrac{\overline{BO_2}}{\overline{BO_3}} = (-1)^b \dfrac{R_2}{R_3}$, $\dfrac{\overline{CO_3}}{\overline{CO_1}} = (-1)^c \dfrac{R_3}{R_1}$, trong đó, mỗi số a, b, c nhận giá trị là 0 (khi nó là tâm vị tự ngoài) hoặc 1 (khi nó là tâm vị tự trong).

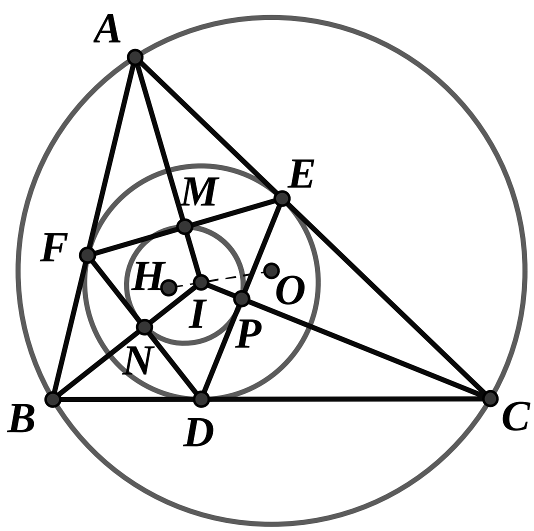
Theo giả thiết trong a, b, c có ba giá trị là 0 hoặc hai giá trị 0, một giá trị 1. Từ đó: $\dfrac{\overline{AO_1}}{\overline{AO_2}}.\dfrac{\overline{BO_2}}{\overline{BO_3}}.\dfrac{\overline{CO_3}}{\overline{CO_1}} = 1$, theo định lí Menelaus đảo cho tam giác $O_1O_2O_3$, ta có: A, B, C thẳng hàng. Bổ đề được chứng minh.

*Trở lại bài toán:

Gọi P' là tâm vị tự trong của hai đường tròn (O) và (I). Dễ thấy: D là điểm tiếp xúc ngoài của ω_A và (I) nên cũng chính là tâm vị tự trong của hai đường tròn này; K là điểm tiếp xúc trong của hai đường tròn ω_A và (O) nên là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn này. Theo bổ đề trên thì P', D, K thẳng hàng hay đường thẳng DK đi qua P'. Tương tự, các đường thẳng EM và FN cũng đi qua P'; tức là ba đường thẳng DK, EM, FN đồng quy và điểm P' chính là điểm P của đề bài.

2. Ta chứng minh bổ đề sau:

Cho tam giác ABC có (O), (I) lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC. Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác DEF nằm trên đường thẳng OI.



* Chứng minh:

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn EF, FD, DE. Dễ thấy AI là trung trực của đoạn EF nên M thuộc đường thẳng AI hay A, M, I thẳng hàng. Tương tự: B, N, I và C, P, I cũng thẳng hàng. Xét phép nghịch đảo Φ tâm I, phương tích r^2 với r là bán kính đường tròn (I). Dễ thấy: tam giác IEA vuông tại E có EM là đường cao nên: $IM.IA = IE^2 = r^2$, suy ra: $\Phi : M \to A$. Tương tự: $\Phi : N \to B, P \to C$.

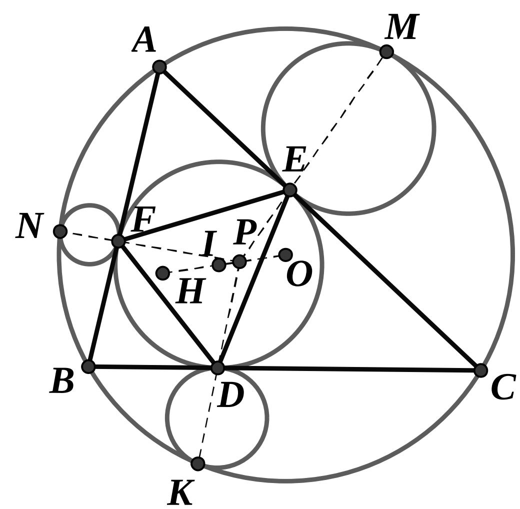
Do đó: $\Phi : \Delta MNP \to \Delta ABC$. Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP thì $\Phi : E \to O$, suy ra: E, I, O thẳng hàng.

Hơn nữa, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF, E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP cũng chính là tâm đường tròn Euler của tam giác DEF này nên E, I, H thẳng hàng.

Từ đó suy ra H, I, O thẳng hàng. Bổ đề được chứng minh.

* Trở lại bài toán:

Gọi H là trực tâm tam giác DEF thì theo bổ đề trên: H, I, O thẳng hàng.
Theo câu 1/, điểm P nằm trên đoạn OI.
Suy ra: 4 điểm H, I, P, O thẳng hàng.
Từ đó suy ra trực tâm H của tam giác DEF nằm trên đường thẳng OI.
Ta có đpcm.



***Bài 13**: Cho tam giác nhọn ABC với đường tròn tâm I nội tiếp. Gọi (K_a) là đường tròn đi qua A, AK_a vuông góc với BC và (K_a) tiếp xúc trong với (I) tại A_1. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự .*

1/ Chứng minh: AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui tại P.

2/ Gọi (J_a), (J_b), (J_c) tương ứng là các đường tròn đối xứng với các đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC qua trung điểm BC, AC, AB.

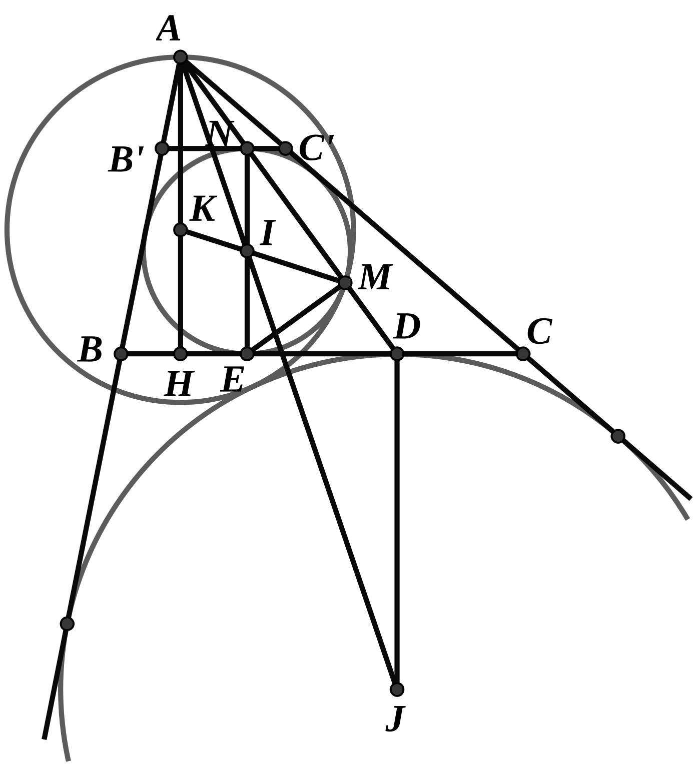
Chứng minh P là tâm đẳng phương của 3 đường tròn (J_a), (J_b), (J_c).

(*Đề TST 2007*)

Lời giải.

1/ Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) có D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A lên BC. Gọi M, N là giao điểm của AD với (I) (N nằm giữa A và M). Giả sử IM cắt đường cao AH tại K. Chứng minh rằng: KA = KM.



* Thật vậy:

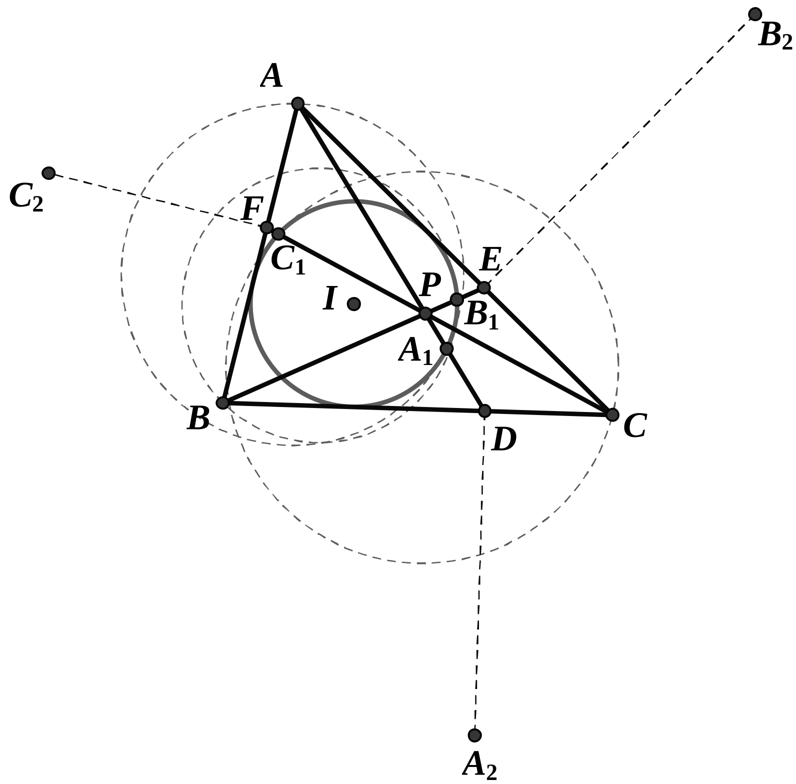
Gọi E là tiếp điểm của (I) lên BC. Giả sử IE cắt (I) tại điểm thứ hai là N’ khác E. Qua N’ vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại B’ và C’. Dễ thấy tồn tại một phép vị tự biến tam giác AB’C’ thành tam giác ABC. Phép vị tự đó cũng biến tiếp điểm N’ của đường tròn bàng tiếp (I) của ΔAB’C’ lên B’C’ thành tiếp điểm D của đường tròn bàng tiếp (J) của ΔABC lên BC. Suy ra A, N’, D thẳng hàng hay N’ trùng với N. Khi đó, tam giác IMN đồng dạng với ΔKMA (do IN // AK), mà ΔIMN cân tại I nên ΔKAM cân tại K hay KA = KM. Ta có đpcm. Từ đây suy ra: đường tròn có tâm thuộc đường cao góc A, đi qua A và tiếp xúc với (I) tại M thì M nằm trên AD. Dễ thấy đường tròn đó là duy nhất.

**Trở lại bài toán:*

Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC lên các cạnh BC, CA, AB.

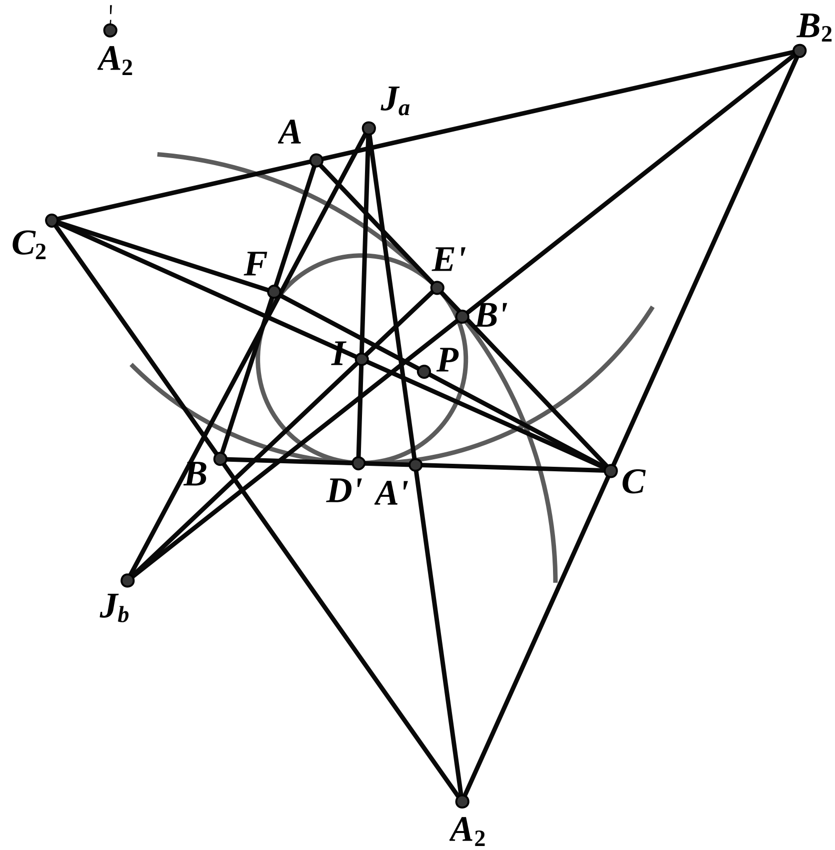
Theo bổ đề trên, ta thấy: $A_1 \in AD, B_1 \in CF, C_1 \in BE$.

Suy ra: AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi AD, BE, CF đồng quy. (1)



Mặt khác: nếu ta đặt
$BC = a, CA = b, AB = c,$
$\frac{AB + BC + CA}{2} = p$
thì có thể dễ dàng tính được:
$DB = EC = p - c$,
$DC = AF = p - b$,
$AE = BF = p - a$.
Suy ra: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$,
theo định lí Ceva đảo, ta có AD, BE, CF đồng quy. (2)
Từ (1) và (2), ta có $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ đồng quy.
Ta có đpcm.

2/ Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của BC, CA; A_2, B_2, C_2 lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC.
Gọi D', E' lần lượt là tiếp điểm của (I) lên BC, CA.
Dễ thấy D đối xứng với D' qua trung điểm A' của BC, A_2 đối xứng với J_a qua A' nên J_aD' // A_2D, mà
$A_2D \perp BC \Rightarrow J_aD' \perp BC$.
Do đó: (J_a) tiếp xúc với BC tại D'. Hoàn toàn tương tự: (J_b) tiếp xúc với CA tại E'.
Ta có: $CD' = CE'$ nên phương tích từ C đến (J_a) và (J_b) bằng nhau, tức là C thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn này.



Ta sẽ chứng minh rằng CP, cũng chính là CF, vuông góc với đoạn nối tâm J_aJ_b của hai đường tròn (J_a), (J_b).

Theo cách xác định các điểm J_a, J_b, ta thấy A' là trung điểm của A_2J_a, B' là trung điểm của B_2J_b.
Do đó: $2\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{J_aJ_b}$ hay $\overrightarrow{J_aJ_b} = 2\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{A_2B_2}$. Ta cũng có:
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CC_2} + \overrightarrow{C_2F}$.
Ta có: $\overrightarrow{J_aJ_b}.\overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{A_2B_2})(\overrightarrow{CC_2} + \overrightarrow{C_2F}) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CC_2} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{C_2F} - \overrightarrow{A_2B_2}.\overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{A_2B_2}.\overrightarrow{C_2F} =$
$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{A_2B_2}.\overrightarrow{C_2F}$ (do C_2F vuông góc với AB, A_2B_2 vuông góc với CC_2). (1)

Mặt khác, ta thấy A, B, C chính là chân các đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ nên rõ ràng: $\Delta C_2AB \sim \Delta C_2B_2A_2$, mà C_2F là đường cao của ΔC_2AB, C_2C là đường cao của $\Delta C_2B_2A_2$ nên:
$\dfrac{C_2F}{AB} = \dfrac{C_2C}{A_2B_2} \Rightarrow C_2F.A_2B_2 = AB.CC_2$. Cũng từ hai tam giác ΔC_2AB, $\Delta C_2B_2A_2$ đồng dạng; ta có:
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CC_2}) = (\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{C_2F})$. Do đó: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CC_2} = \overrightarrow{A_2B_2}.\overrightarrow{C_2F}$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra: $\overrightarrow{J_aJ_b}.\overrightarrow{C_2F} = 0$ hay $C_2F \perp J_aJ_b$.

Do đó C_2F chính là trục đẳng phương của hai đường tròn (J_a), (J_b), tức là P thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (J_a), (J_b).
Hoàn toàn tương tự, ta cũng có P thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (J_c), (J_b).

Từ đó suy ra P chính là tâm đẳng phương của (J_a), (J_b), (J_c).
Đây chính là đpcm.

Bài 15: ***Cho tam giác ABC có:*** $AB = c, BC = a, CA = b$***. Lấy sáu điểm*** $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ***phân biệt không trùng với A, B, C và các điểm*** A_1, A_2 ***thuộc đường thẳng BC,*** B_1, B_2 ***thuộc đường thẳng CA, các điểm*** C_1, C_2 ***thuộc đường thẳng AB. Gọi*** α, β, γ ***là các số thực xác định bởi:***

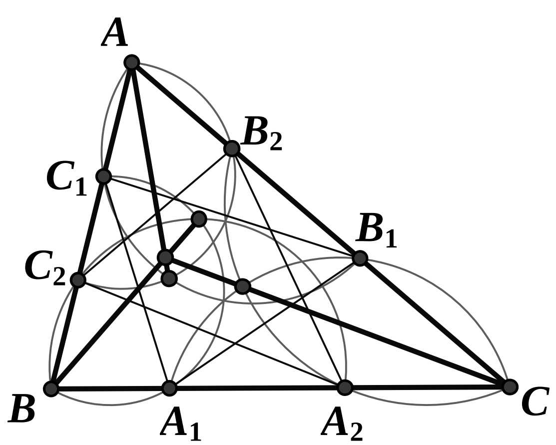
$\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{\alpha}{a}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{B_1B_2} = \frac{\beta}{b}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{C_1C_2} = \frac{\gamma}{c}\overrightarrow{AB}$.

Xét các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_1C_1, AB_2C_2, BC_1A_1, BC_2A_2, CA_1B_1, CA_2B_2$ ***và gọi*** d_A, d_B, d_C ***lần lượt là các trục đẳng phương của cặp đường tròn đi qua A, B, C. Chứng minh rằng:*** d_A, d_B, d_C ***đồng quy khi và chỉ khi*** $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$.

(*Đề TST 1995*)

Lời giải.

Trước hết, ta nêu định nghĩa sau: Cho tam giác ABC và điểm M bất kì, khoảng cách đại số từ M đến BC là khoảng cách từ M đến BC nhận thêm dấu + nếu M cùng phía với A so với BC và nhận thêm dấu – trong trường hợp ngược lại. Tương tự với khoảng cách từ M đến CA và AB.



Dễ thấy các số α, β, γ đã cho khác 0 do các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ là phân biệt.

Xét cặp đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1, AB_2C_2; ta sẽ chứng minh rằng trục đẳng phương của chúng chính là tập hợp các điểm có khoảng cách đại số đến BC và CA tỉ lệ với γ, β.

*Thật vậy:

Trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxy lấy điểm $A(0;0)$, B thuộc chiều dương của Ox và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha,\ 0^0 < \alpha < 180^0$. Khi đó:

$\frac{\overrightarrow{AB}}{c} = (1,0), \frac{\overrightarrow{AC}}{b} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Đặt $B_1(b_1\cot\varphi, b_1),\ B_2(b_2\cot\varphi, b_2),\ C_1(c_1, 0),\ C_2(c_2, 0),\ b_1, b_2 \neq 0, b_1 \neq b_2, c_1, c_2 \neq 0, c_1 \neq c_2$.

Mà $\overrightarrow{B_1B_2} = \frac{\beta}{b}\overrightarrow{CA} \Rightarrow (b_2 - b_1)\cot\varphi; b_2 - b_1) = \beta(-\cos\varphi; \sin\varphi) \Rightarrow b_2 - b_1 = \beta\sin\varphi$

$\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{\gamma}{c}\overrightarrow{AB} \Rightarrow (c_2 - c_1; 0) = \gamma(1;0) \Rightarrow c_2 - c_1 = \gamma$.

Đường tròn (AB_1C_1) đi qua hai điểm A và C_1 nên PT có dạng là: $x^2 + y^2 - c_1x - \lambda_1 y = 0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, nó cũng đi qua B_1 nên $\lambda_1 = \frac{b_1 - c_1\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

Hoàn toàn tương tự, đường tròn (AB_2C_2) có PT là: $x^2 + y^2 - c_1x - \lambda_2 y = 0$ với $\lambda_1 = \frac{b_2 - c_2\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

Trục đẳng phương của hai đường tròn này là: $(c_2 - c_1)x + (\lambda_2 - \lambda_1)y = 0 \Leftrightarrow \gamma x - \frac{\beta + \gamma\cos\varphi}{\sin\varphi}y = 0$

$\Rightarrow \dfrac{y}{x\sin\varphi - y\cos\varphi} = \dfrac{\gamma}{\beta}$.

Hơn nữa, y chính là khoảng cách đại số từ $M(x,y)$ đến AB; còn $x\sin\varphi - y\cos\varphi$ chính là khoảng cách đại số từ $M(x,y)$ đến AC. Tức là quỹ tích các điểm có khoảng cách đại số đến AB và AC tỉ lệ với $\dfrac{\gamma}{\beta}$ là trục đẳng phương của AB_1C_1, AB_2C_2. Nhận xét trên được chứng minh.

Với mỗi điểm M trong mặt phẳng, kí hiệu X, Y, Z là khoảng cách đại số từ M đến các cạnh BC, CA, AB thì dễ thấy rằng, ta luôn có $aX + bY + cZ = 2S$ (với S là diện tích tam giác ABC) và ngược lại, mỗi bộ (X, Y, Z) thỏa mãn $aX + bY + cZ = 2S$ xác định duy nhất 1 điểm M. Theo chứng minh ở trên, trục đẳng phương của các cặp đường tròn là:

$(d_A): \dfrac{Y}{\beta} = \dfrac{Z}{\gamma}, \quad (d_B): \dfrac{Z}{\gamma} = \dfrac{X}{\alpha}, \quad (d_C): \dfrac{X}{\alpha} = \dfrac{Y}{\beta}$.

Suy ra, điểm chung của ba đường thẳng d_A, d_B, d_C (nếu có) là nghiệm của HPT:

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 2S \\ \dfrac{X}{\alpha} = \dfrac{Y}{\beta} = \dfrac{Z}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = \frac{2S}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.$$

Hệ này có nghiệm khi và chỉ khi $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$ hay ba đường thẳng d_A, d_B, d_C đồng quy khi và chỉ khi $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$. Ta có đpcm.

<u>Bài 16:</u> Cho tam giác ABC nhọn, không cân có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi AD, BE, CF lần lượt là các đường phân giác trong của tam giác. Trên các đường thẳng AD, BE, CF lần lượt lấy các điểm L, M, N sao cho $\frac{AL}{AD}=\frac{BM}{BE}=\frac{CN}{CF}=k$ (k là một hằng số dương).

Gọi (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt là các đường tròn đi qua L, tiếp xúc với OA tại A ; đi qua M tiếp xúc với OB tại B và đi qua N tiếp xúc với OC tại C.

1. ***Chứng minh rằng với $k=\frac{1}{2}$, ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung và đường thẳng nối hai điểm đó đi qua trọng tâm tam giác ABC.***
2. ***Tìm tất cả các giá trị k sao cho 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung.***

(Đề TST 2008)

Lời giải.

Trước hết, xin nêu 4 bổ đề sau:

(1) Cho ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c và hai đường thẳng phân biệt d, d'. Các đường thẳng d, d' theo thứ tự cắt a, b, c tại $A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2$ thỏa mãn điều kiện:

$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}}=k$. *Các điểm A_3, B_3, C_3 thuộc a, b, c sao cho:* $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}=\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}}=\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1C_3}}$.

Khi đó, A_3, B_3, C_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_3C_3}}=k$.

(2) Cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c và ba đường thẳng phân biệt khác a', b', c' . Các đường thẳng a', b', c' theo thứ tự cắt a, b, c tại $A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3$ (các điểm này đôi một phân biệt). Khi đó nếu $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}}=\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_3C_3}}$ thì hoặc $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}=\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}}=\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1C_3}}$ hoặc a, b, c đôi một song song.

(3) Cho tam giác ABC và M bất kì. Các tia AM, BM, CM lần lượt cắt BC, CA, AB ở A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 cắt các đường thẳng AB, BC, CA lần lượt ở A_2, B_2, C_2. Các điểm A_3, B_3, C_3 theo thứ tự nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho

$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}}=\frac{\overline{B_1B_3}}{\overline{B_1B_2}}=\frac{\overline{C_1C_3}}{\overline{C_1C_2}}=k, k\neq 0$. *Khi đó, A_3, B_3, C_3 thẳng hàng khi và chỉ khi $k=1$ hoặc $k=\frac{1}{2}$.*

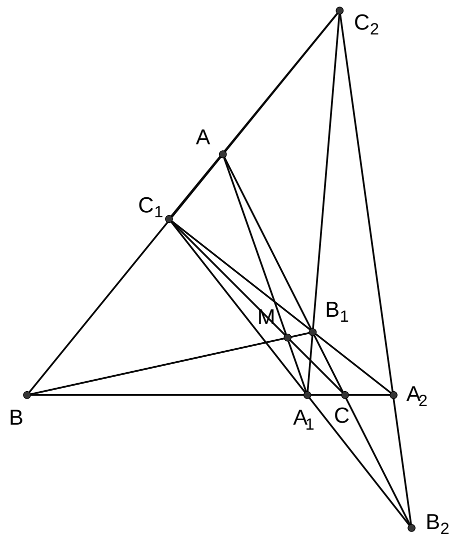
.

(4) Cho tam giác ABC không cân ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng EF cắt BC tại M, đường thẳng AD cắt (I) tại N (khác D). Chứng minh rằng: MN tiếp xúc với (I).

Các bổ đề (1), (2) có thể chứng minh dễ dàng bằng các biểu diễn theo vectơ. Dưới đây trình bày các chứng minh cho bổ đề (3), (4).

*** Chứng minh bổ đề (3):**

\+ Điều kiện đủ:



\- Với k = 1, ta có A_3, B_3, C_3 theo thứ tự trùng với A_2, B_2, C_2. Vì AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy nên theo định lí Menelaus thì $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=-1$. Vì A_2, B_1, C_1 thẳng hàng nên $\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=1$. Suy ra: $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}=-\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$.

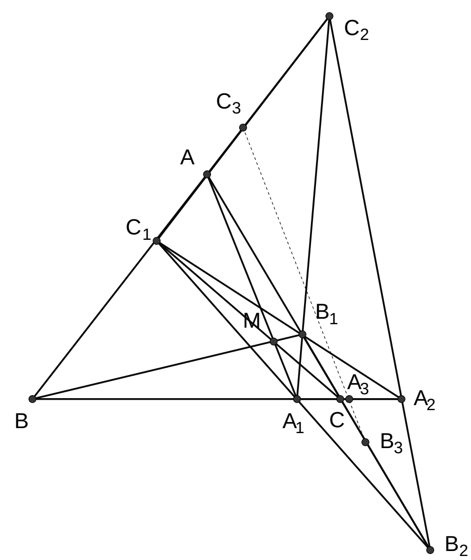
Tương tự: $\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}=-\frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}},\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=-\frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}}$.

Nhân từng vế các đẳng thức trên,

$$\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}.\frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}}.\frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}}=\left(-\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\right).\left(-\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\right).\left(-\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}\right)=-1.$$

Tức là A_2, B_2, C_2 thẳng hàng hay A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

Với $k=\frac{1}{2}$, A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.



Theo chứng minh trên, ta đã có: $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}=-\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$.

Theo tính chất tỉ lệ thức thì:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}=-\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}=\frac{\overline{A_1B}+\overline{A_2B}}{\overline{A_1C}-\overline{A_2C}}=\frac{\overline{A_1B}-\overline{A_2B}}{\overline{A_1C}+\overline{A_2C}}\Rightarrow\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}=\frac{2\overline{A_3B}}{\overline{A_2A_1}}=\frac{\overline{A_2A_1}}{2\overline{A_3C}}$$

Suy ra: $\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}=\frac{2\overline{A_3B}}{\overline{A_2A_1}}.\frac{\overline{A_2A_1}}{2\overline{A_3C}}=\left(\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\right)^2$. Tương tự:

$$\frac{\overline{B_3C}}{\overline{B_3A}}=\left(\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\right)^2,\frac{\overline{C_3A}}{\overline{C_3B}}=\left(\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}\right)^2.$$

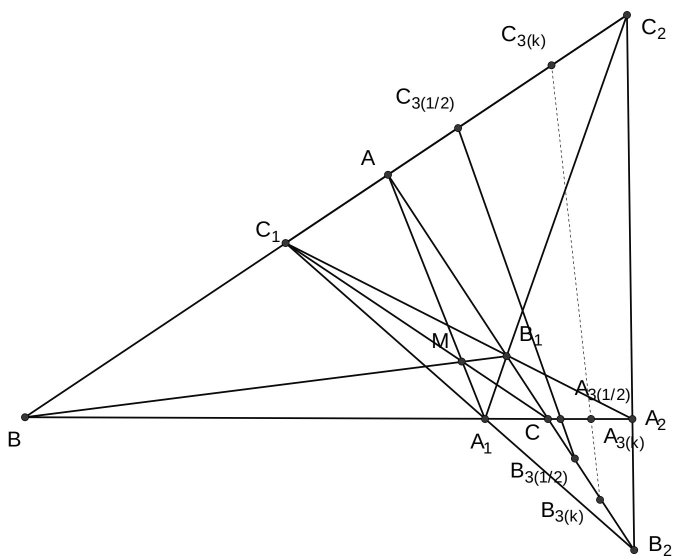
Nhân từng vế các đẳng thức trên, ta được:

$\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}.\frac{\overline{B_3C}}{\overline{B_3A}}.\frac{\overline{C_3A}}{\overline{C_3B}}=\left(\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\right)^2.\left(\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\right)^2.\left(\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}\right)^2=1$. Do đó, A_3, B_3, C_3 th ẳng hàng.

\+ Điều kiện cần: Khi $k\neq 1$, ta kí hiệu $A_{3(k)},B_{3(k)},C_{3(k)}$ thay cho A_3, B_3, C_3. Giả sử tồn tại số k đồng thời khác 1 và $\frac{1}{2}$ mà $A_{3(k)},B_{3(k)},C_{3(k)}$ thẳng hàng. Khi đó, các điểm: $A_{3(k)},B_{3(k)},C_{3(k)}$ và $A_{3(1/2)},B_{3(1/2)},C_{3(1/2)}$ đôi một khác nhau. Dễ thấy: $\frac{\overline{A_2A_{3(1/2)}}}{\overline{A_2A_{3(k)}}}=\frac{\overline{B_2B_{3(1/2)}}}{\overline{B_2B_{3(k)}}}=\frac{\overline{C_2C_{3(1/2)}}}{\overline{C_2C_{3(k)}}}=\frac{1/2-1}{k-1}$.

Theo chứng minh ở điều kiện đủ thì hai bộ điểm A_2, B_2, C_2 và $A_{3(1/2)}, B_{3(1/2)}, C_{3(1/2)}$ thẳng hàng, mà theo điều giả sử ở trên thì $A_{3(k)}, B_{3(k)}, C_{3(k)}$ cũng thẳng hàng nên theo bổ đề (2), hoặc đường thẳng $A_2B_2C_2$ và $A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}C_{3(1/2)}$ song song hoặc $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}} = \dfrac{\overline{A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}}}{\overline{A_{3(1/2)}C_{3(1/2)}}}$.

+ Nếu $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}} = \dfrac{\overline{A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}}}{\overline{A_{3(1/2)}C_{3(1/2)}}}$ thì chú ý rằng: $\dfrac{\overline{A_1A_{3(1/2)}}}{\overline{A_1A_2}} = \dfrac{\overline{B_1B_{3(1/2)}}}{\overline{B_1B_2}} = \dfrac{\overline{C_1C_{3(1/2)}}}{\overline{C_1C_2}}$, theo bổ đề (1) thì A_1, B_1, C_1 thẳng hàng, mâu thuẫn.



+ Nếu $A_2B_2C_2$ và $A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}C_{3(1/2)}$ song song với nhau thì chú ý rằng $A_{3(1/2)}, B_{3(1/2)}, C_{3(1/2)}$ theo thứ tự là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Ta có:

$\overrightarrow{A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2})$,

$\overrightarrow{A_{3(1/2)}C_{3(1/2)}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_2C_2})$. Suy ra:

A_1B_1 song song với A_2B_2 và $A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}$, A_1C_1 song song với A_2C_2 và $A_{3(1/2)}C_{3(1/2)}$. Từ đó suy ra, A_1, B_1, C_1 cũng thẳng hàng, mâu thuẫn.

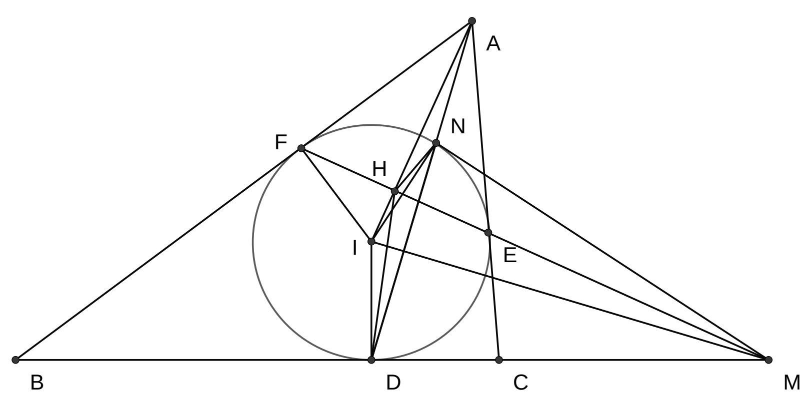
Do đó chỉ có $k = 0$ và $k = \dfrac{1}{2}$ thỏa mãn.

Vậy bổ đề (3) được chứng minh.

***Chứng minh bổ đề (4):**

Gọi H là giao điểm của EF và AI. Ta thấy: $IA \perp EF$. Tam giác AIF vuông tại F có đường cao FH nên : $IF^2 = IH.IA \Rightarrow ID^2 = IH.IA$. Suy ra: $\Delta IDH \sim \Delta IAD(c.g.c)$.

Do đó: $\widehat{IHD} = \widehat{IDA}$. Mặt khác: tam giác IDN cân tại I nên $\widehat{IND} = \widehat{IDN} = \widehat{IDA}$. Từ đó, ta được: $\widehat{IND} = \widehat{IHD}$.

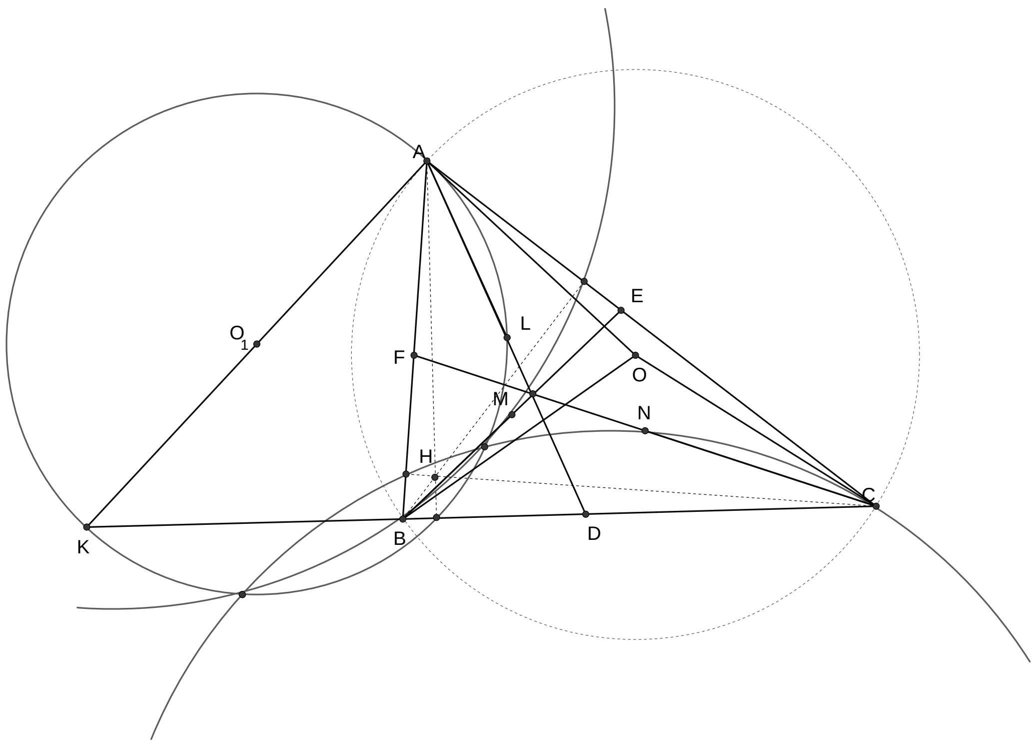


$\Rightarrow$ Tứ giác IDNH nội tiếp. Hơn nữa, tứ giác IDMH cũng nội tiếp vì có $\widehat{IDM} = \widehat{IHM} = 90^0$. Do đó: 5 điểm, I, D, M, N, H cùng thuộc một đường tròn. Suy ra: IMNH nội tiếp hay $\widehat{INM} = \widehat{IHM} = 90^0 \Rightarrow MN \perp IN$. Vậy MN là tiếp tuyến của (I). Bổ đề (4) được chứng minh.

Trở lại bài toán đã cho:

1. Khi $k = \frac{1}{2}$ thì L, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn AD, BE, CF.

Gọi H là trực tâm của ΔABC và δ là phương tích của H đối với đường tròn Euler đi qua chân 3 đường cao của ΔABC. Gọi K là giao điểm của đường thẳng AO_1 với đường thẳng BC.
Ta sẽ chứng minh rằng K nằm trên (O_1).
Thật vậy:
Do ΔABC là tam giác nhọn nên O nằm trong tam giác. Ta có:
$\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{OAB} = 90^0 - \widehat{ACB}$.
Không mất tính tổng quát, giả sử tia AD nằm giữa hai tia AO và AB. Khi đó:



$$\widehat{OAD} = \widehat{OAB} - \widehat{DAB} = 90^0 - \widehat{ACB} - \frac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow \widehat{KAD} = 90^0 - \widehat{OAD} = \widehat{ACB} + \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Mặt khác: $\widehat{ADB} = \widehat{DAC} + \widehat{DCA} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \widehat{ACB}$ nên $\widehat{KAD} = \widehat{KDA}$.

Ta cũng có $O_1A = O_1L \Rightarrow \Delta AO_1L$ cân tại O_1 nên $\widehat{O_1AL} = \widehat{O_1LA}$.

Từ đó suy ra: $\widehat{O_1LA} = \widehat{KDA}$ hay O_1L // KD, mà L là trung điểm của AD nên O_1 là trung điểm của AK hay K thuộc đường tròn (O_1). Do đó (O_1) cắt BC tại chân đường cao của ΔABC. Từ đó suy ra phương tích của H đối với đường tròn (O_1) chính là δ.
Hoàn toàn tương tự với các đường tròn (O_2), (O_3).

Do H có cùng phương tích đến các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) nên H chính là tâm đẳng phương của 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3).

Hơn nữa: do OA là tiếp tuyến của (O_1) tại A nên phương tích của O đối với (O_1) chính là OA^2. Tương tự như vậy, phương tích của O đối với đường tròn (O_2) và (O_3) lần lượt là OB^2, OC^2, mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC nên OA = OB = OC hay O có cùng phương tích đến các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3), suy ra: O cũng là tâm đẳng phương của 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3).

Giả sử của 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có 3 trục đẳng phương khác nhau thì chúng phải đồng quy tại tâm đẳng phương, mà O và H cùng là tâm đẳng phương của chúng nên O phải trùng với H hay ΔABC đều, mâu thuẫn với giả thiết ΔABC không cân.

Do đó, điều giả sử trên là sai và 3 đường tròn đã cho phải có 1 trục đẳng phương chung, trục đẳng phương đó chính là đường thẳng đi qua O và H. Ta cũng thấy rằng O nằm ngoài cả 3 đường tròn, H thì nằm giữa các đường cao của ΔABC nên nó nằm trong cả 3 đường tròn. Suy ra đường thẳng OH cắt cả 3 đường tròn tại 2 điểm nào đó.

Vậy 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng 2 điểm chung, hơn nữa, đường thẳng đi qua hai điểm chung đó chính là đường thẳng OH và do đó, nó cũng sẽ đi qua trọng tâm của tam giác (đường thẳng Euler). Ta có đpcm.

2. Ta sẽ chứng minh rằng ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $k = \frac{1}{2}$. Thật vậy:

Điều kiện đủ:

- Khi $k = \frac{1}{2}$, khẳng định đã chứng minh ở câu 1/.

- Ta sẽ tiếp tục chứng minh rằng với k = 1, ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt đi qua L, tiếp xúc với OA tại A ; đi qua M tiếp xúc với OB tại B và đi qua N tiếp xúc với OC tại C cũng có đúng hai điểm chung. Thật vậy:

- Khi k = 1, các điểm L, M, N tương ứng trùng với các điểm D, E, F.

Theo chứng minh ở câu 1/, đường tròn (K, KA) đi qua D và tiếp xúc với OA tại A nên chính là đường tròn (O_1) đang được xét. Gọi d_1, d_2, d_3 là tiếp tuyến của đường tròn (O) lần lượt tại A, B, C. Gọi X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm của d_2, d_3; d_3, d_1; d_1, d_2.

Vì O_1 thuộc đường thẳng BC và OA tiếp xúc với (O_1) tại A nên O_1 thuộc d_1, từ đó suy ra O_1 chính là giao điểm của BC và d_1.

Tương tự: O_2, O_3 lần lượt chính là giao điểm của CA và d_2, AB và d_3.

Qua các điểm O_1, O_2, O_3 vẽ các tiếp tuyến tới đường tròn (O) lần lượt là O_1T_1, O_2T_2, O_3T_2 (trong đó T_1, T_2, T_3 là các tiếp điểm).

Ta có: $O_1T_1 = O_1A,\ O_2T_2 = O_2B,\ O_3T_3 = O_3C$, tức là T_1, T_2, T_3 cũng tương ứng thuộc các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3).

Theo bổ đề (4) ở trên, (xét tam giác XYZ có (O) là đường tròn nội tiếp) các đường thẳng AT_1, BT_2, CT_3 tương ứng trùng với các đường thẳng AX, BY, CZ.

Hơn nữa, XB = XC, YC = YA, ZA = ZA nên:

$\frac{\overline{AY}}{\overline{AZ}}.\frac{\overline{BZ}}{\overline{BX}}.\frac{\overline{CX}}{\overline{CY}} = -1 \Rightarrow$ AX, BY, CZ đồng quy (theo định lí Ceva đảo trong tam giác XYZ).

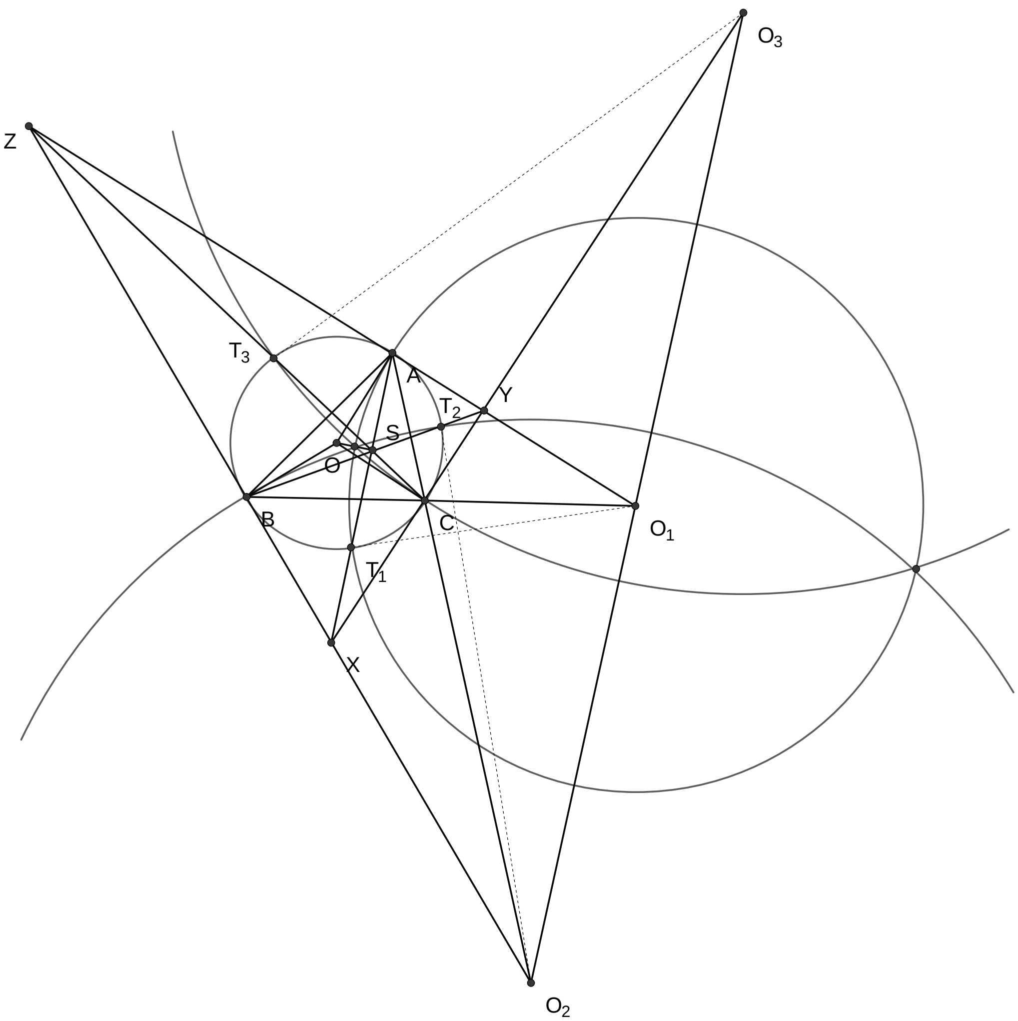
Do đó: AT_1, BT_2, CT_3 đồng quy. Đặt điểm chung của ba đường thẳng đó là S, rõ ràng S nằm trong (O). Do T_1, T_2, T_3 nằm trên (O) nên theo tính chất phương tích:

$\overline{SA.ST_1} = \overline{SB.ST_2} = \overline{SC.ST_3} \Rightarrow P_{S/(O_1)} = P_{S/(O_2)} = P_{S/(O_3)}$.

Tương tự câu 1/, ta có: $P_{O/(O_1)} = P_{O/(O_2)} = P_{O/(O_3)}$, tức là OS là trục đẳng phương chung của ba đường tròn O_1), (O_2), (O_3).

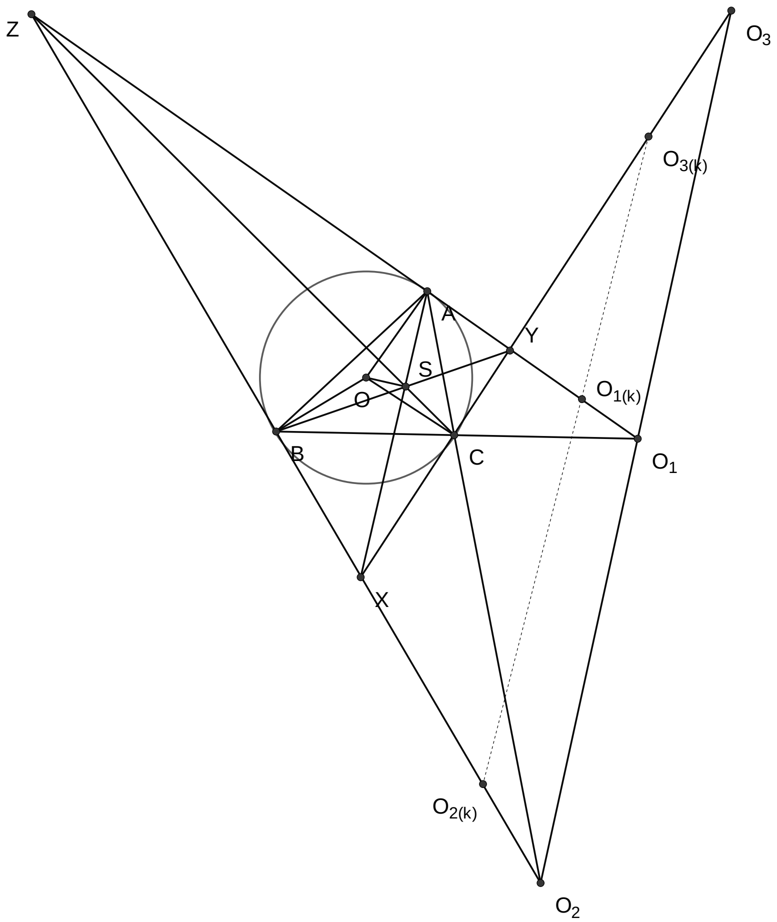
Mặt khác, S nằm trong cả ba đường tròn, O nằm ngoài cả ba đường tròn nên đường thẳng OS cắt cả ba đường tròn tại hai điểm, tức là (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung.

Vậy trong trường hợp k = 1, ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) cũng có đúng hai điểm chung. Điều kiện đủ của khẳng định trên được chứng minh.



***Điều kiện cần**:

Với một giá trị $k>0, k\neq 1$, gọi $O_{1(k)}, O_{2(k)}, O_{3(k)}$ lần lượt là tâm của các đường tròn đi qua L, tiếp xúc với (O) tại A; đi qua M, tiếp xúc với (O) tại B, đi qua N, tiếp xúc với (O) tại N.



Giả sử các đường tròn $\left(O_{1(k)}\right), \left(O_{2(k)}\right), \left(O_{3(k)}\right)$ nói trên có đúng hai điểm chung, tức là ba tâm của chúng là $O_{1(k)}, O_{2(k)}, O_{3(k)}$ thẳng hàng. (1)

Gọi d_1, d_2, d_3 là tiếp tuyến của đường tròn (O) lần lượt tại A, B, C. Gọi X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm của d_2, d_3; d_3, d_1; d_1, d_2. Chứng minh tương tự như trên, AX, BY, CZ đồng quy. (2)

Đặt O_1, O_2, O_3 là giao điểm của BC với YZ, CA với ZX, AB với XY. Dễ thấy rằng: $O_{1(k)}, O_{2(k)}, O_{3(k)}$ lần lượt thuộc các đoạn thẳng AO_1, BO_2, CO_3 và $\dfrac{\overline{AO_{1(k)}}}{\overline{AO_1}}=\dfrac{AL}{AD}$, $\dfrac{\overline{BO_{2(k)}}}{\overline{BO_2}}=\dfrac{BM}{BE}$, $\dfrac{\overline{CO_{3(k)}}}{\overline{CO_3}}=\dfrac{CN}{CF}$. Suy ra:

$$\frac{\overline{AO_{1(k)}}}{\overline{AO_1}}=\frac{\overline{BO_{2(k)}}}{\overline{BO_2}}=\frac{\overline{CO_{3(k)}}}{\overline{CO_3}}=k.$$
(3)

Từ (1), (2), (3), áp dụng bổ đề 3, ta có k = 1 hoặc $k=\dfrac{1}{2}$.

Do đó, nếu các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung thì k = 1 hoặc $k=\dfrac{1}{2}$.

Điều kiện cần của khẳng định được chứng minh.

Vậy tất cả các giá trị k cần tìm là k = 1 và $k=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.