

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

Thông thường đứng trước bài toán giải hệ phương trình học sinh nghĩ ngay đến các dạng cơ bản đã học : phương pháp cộng, phương pháp thế, phương pháp đặt ẩn phụ để giải. Nhưng thực tế qua các đề thi đại học hoặc đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh các năm vừa qua học sinh toàn gặp các hệ phương trình phức tạp mà để giải được nó cần phải có những kỹ năng đặt biệt. Một trong những kỹ năng đó là sử dụng tính đơn điệu của hàm số vào giải hệ phương trình. Với mong muốn các học sinh của mình sẽ làm tốt câu này trong các kỳ thi tuyển sinh đại học, tôi mạnh dạn đưa ra sáng kiến kinh nghiệm "***Rèn luyện kỹ năng giải hệ phương trình bằng phương pháp hàm số***". Nội dung sáng kiến kinh nghiệm gồm 2 phần:

Phần I: Các kiến thức cơ bản cần trang bị

Phần II: Kỹ năng phân tích tìm hàm đặc trưng và tự giải quyết vấn đề.

Do khả năng còn hạn chế và kinh nghiệm chưa nhiều nên trong SKKN của tôi có thể có những phần chưa hoàn chỉnh. Rất mong được sự đóng góp quý báu của quý thầy cô.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

B. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

I. CƠ SỞ LÝ LUẬN CỦA VẤN ĐỀ

1/ Một học sinh không thể học hệ phương trình tốt nếu các kiến thức liên quan đến biến đổi đa thức không tốt.

2/ Một học sinh không thể giải được các hệ phương trình lạ nếu không được trang bị các kỹ năng nhận dạng và biến đổi đặc biệt đối với dạng bài đó.

.....

II. THỰC TRẠNG CỦA VẤN ĐỀ

1/ Thực trạng chung : Hầu hết các học sinh có cảm giác "sợ và ngại" học hệ phương trình các dạng không mẫu mực, nhất là phản ứng dụng đạo hàm được đưa vào sau khi các em được tiếp cận hệ phương trình cơ bản cách đó quá lâu.

2/ Thực trạng đối với giáo viên: Do đây là phần kiến thức khó, thời lượng dành cho hệ phương trình trong chương trình quá ít, vì vậy một số giáo viên không mặn mà khi dạy phần kiến thức này.

3/ Thực trạng đối với học sinh: Hầu hết học sinh chưa có cách học tốt khi gặp phần kiến thức này và luôn có cảm giác "sợ". Vì vậy hầu hết các em đều học chưa tốt phần kiến thức này.

III. GIẢI PHÁP VÀ TỔ CHỨC THỰC HIỆN.

1. Trang bị lại cho học sinh một số kiến thức :

Tính chất 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên tập D thì số nghiệm của phương trình $f(x) = k$ (k là hằng số không đổi) trên D không nhiều hơn một và $f(x) = f(y)$ khi và chỉ khi $x = y$ với mọi x, y thuộc D .

Tính chất 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và hàm số $y = g(x)$ luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) và liên tục trên tập D thì số nghiệm của phương trình $f(x) = g(y)$ không nhiều hơn một.

Tính chất 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$. Nếu phương trình $f'(x) = 0$ có $n - 1 (n \in \mathbb{N})$ nghiệm thuộc $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất n nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$

Chú ý :

Nếu hệ có một trong hai phương trình ta đưa về dạng : $f(x) = f(y)$ với x, y thuộc D thì khi đó ta khảo sát một hàm số đặc trưng : $y = f(t)$ trên tập D . Nếu $y = f(t)$ là hàm số đơn điệu thì $f(x) = f(y)$ khi và chỉ khi $x = y$. Trong phương

pháp này khó nhất là phải xác định được tập giá trị của x và y , nếu tập giá trị của chúng khác nhau thì các em không được dùng phương pháp trên mà phải chuyển chúng về dạng tích : $f(x) - f(y) = 0$ hay $(x - y) \cdot A(x; y) = 0$. Khi đó ta xét trường hợp $x - y = 0$, và trường hợp $A(x; y) = 0$.

2. Kỹ năng giải hệ phương trình bằng sử dụng phương pháp hàm số :

$$\begin{cases} x^3 + x - 2 = y^3 + 3y^2 + 4y & (1) \\ x^5 + y^3 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình :

*/ **Cách thức mà trong thực tế bản thân đã làm:**

- Hãy lựa chọn biến đổi phương trình trong hệ về dạng $f(x) = f(y)$.
- Nhận xét gì về tập giá trị của x và của $(y + 1)$?
- Hàm số có đơn điệu trên tập được xét không ?
- **Hướng dẫn giải:**

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + x = (y + 1)^3 + (y + 1) \quad (1')$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên R

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in R$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên R

Khi đó : $(1') \Leftrightarrow f(x) = f(y + 1) \Leftrightarrow x = y + 1$ thế vào phương trình (2), ta được:

$$x^5 + (1 - x)^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^4 + x^2 - 3x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^4 + x^2 - 3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^4 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0(VN) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y & (1) \\ x^8 + y^4 = 1 & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình :

Hướng dẫn giải:

Từ phương trình (2) suy ra điều kiện có nghiệm của hệ phương trình là :

$$|x| \leq 1; |y| \leq 1$$

Xét hàm số : $f(t) = t^3 - 5t$ trên tập $[-1; 1]$

$f'(t) = 3t^2 - 5 < 0, \forall t \in [-1; 1]$. Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Phương trình (1) tương đương với : $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thế vào phương trình (2), ta được :

$$(x^4)^2 + x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Rightarrow x = y = \pm \sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ y = -\sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \end{array} \right. \quad \text{và} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ y = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \end{array} \right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

Nhận xét : Khi sử dụng phương pháp hàm số để giải hệ phương trình một điều khá quan trọng đó là chỉ ra hàm số được xét trên tập nào.

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3 + 3y^2} & (1) \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2 + 8y} & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 3 : Giải hệ phương trình :

***/ Cách thức mà trong thực tế bản thân đã làm:**

- Hãy lựa chọn biến đổi phương trình trong hệ về dạng $f(x) = f(y)$.
- Nhận xét gì về tập giá trị của $(x-1)$ và của $\sqrt{y+3}$?
- Hàm số có đơn điệu trên tập được xét không ?
- Hướng dẫn giải:**

$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 \geq 0 \\ y^2 + 8y \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Điều kiện :

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = y\sqrt{y+3} \Leftrightarrow (x-1)^3 - 3(x-1) = (\sqrt{y+3})^3 - 3(\sqrt{y+3}) \quad (1')$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên tập $[1; +\infty)$

$$f'(t) = 3t^2 - 3 \geq 0, \forall t \geq 1 \Rightarrow f(t) \text{ là hàm số đồng biến trên khoảng } (1; +\infty)$$

Khi đó : $(1') \Leftrightarrow f(x-1) = f(\sqrt{y+3}) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{y+3} \Leftrightarrow (x-1)^2 = y+3$ kết hợp với phương trình (2), ta được :

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = y + 3 \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2 + 8y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = y & (1') \\ 9(x-2) = y^2 + 8y & (2') \end{cases}$$

Thế (1') vào (2'), ta được :

$$9x - 18 = (x^2 - 2x - 2)^2 + 8(x^2 - 2x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 17x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x^3 - x^2 + 5x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x^3 - x^2 + 5x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2(x - 1) + 4x + (x - 2) = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 1 \text{ (Tm)}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} (8x - 3)\sqrt{2x - 1} - y - 4y^3 = 0 & (1) \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 4 : Giải hệ phương trình :

Hướng dẫn giải:

Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow [4(2x - 1) + 1]\sqrt{2x - 1} = y + 4y^3 \Leftrightarrow 4(\sqrt{2x - 1})^3 + \sqrt{2x - 1} = 4y^3 + y \quad (1')$$

Xét hàm số : $f(t) = 4t^3 + t$ trên tập $[0; +\infty)$

$f'(t) = 12t^2 + 1 > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Khi đó : $(1') \Leftrightarrow f(\sqrt{2x - 1}) = f(y) \Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = y \Leftrightarrow y^2 + 1 = 2x$ thế vào phương trình (2), ta được :

$$(y^2 + 1)^2 - 4(y^2 + 1) + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y - 1)(y + 1)(y + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \\ y = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Khi $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Khi $y = -1 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

Khi $y = -2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Khi $y = 1 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

$$(x; y) = \left\{ (1; -1); (1; -1); \left(\frac{1}{2}; 0\right); \left(\frac{5}{2}; -2\right) \right\}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là :

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 8 = (y - x)(y^2 + xy + x^2 + 6) & (1) \\ (x + y - 13)(\sqrt{3y - 14} - \sqrt{x + 1}) = 5 & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 5 : Giải hệ phương trình :

***/ Cách thức mà trong thực tế bản thân đã làm:**

- Hãy lựa chọn biến đổi phương trình trong hệ về dạng $f(x) = f(y)$.
- Nhận xét gì về tập giá trị của $(x + 1)$ và của $(y - 1)$?
- Hàm số có đơn điệu trên tập được xét không ?
- **Hướng dẫn giải:**

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3y - 14 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq \frac{14}{3} (*) \end{cases}$$

Điều kiện :

Ta có : $(1) \Leftrightarrow (x + 1)^3 + 3(x + 1) = (y - 1)^3 + 3(y - 1) \quad (1')$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in R$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên R

Khi đó : $(1') \Leftrightarrow f(x + 1) = f(y - 1) \Leftrightarrow x + 1 = y - 1 \Leftrightarrow y = x + 2$ thế vào phương

trình (2), ta được : $(2x - 11)(\sqrt{3x - 8} - \sqrt{x + 1}) = 5 \quad (3)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x - 8} - \sqrt{x + 1} - \frac{5}{2x - 11} = 0 \quad (4) \quad \left(\text{Do } x = \frac{11}{2} \text{ không là nghiệm của (3)} \right)$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3x - 8} - \sqrt{x + 1} - \frac{5}{2x - 11}$ trên $D = \left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2} \right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty \right)$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 8}} - \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} + \frac{10}{(2x - 11)^2}$$

$$= \frac{6x + 17}{2\sqrt{(3x - 8)(x + 1)}(3\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x - 8})} + \frac{10}{(2x - 11)^2} > 0, \forall x \in \left(\frac{8}{3}; \frac{11}{2} \right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty \right)$$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{8}{3}; \frac{11}{2} \right)$ và $\left(\frac{11}{2}; +\infty \right)$

- Khi $x \in \left(\frac{8}{3}; \frac{11}{2} \right)$: $(4) \Leftrightarrow g(x) = g(3) \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5$ (thỏa mãn điều kiện (*))

- Khi $x \in \left(\frac{11}{2}; +\infty \right)$: $(4) \Leftrightarrow g(x) = g(8) \Leftrightarrow x = 8 \Rightarrow y = 10$ (thỏa mãn điều kiện (*))

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \end{cases}$

$$\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 & (1) \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy+6x+1 & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình :

***/ Cách thức mà trong thực tế bản thân đã làm:**

- Hãy lựa chọn biến đổi phương trình trong hệ về dạng $f(x) = f(y)$.
- Nhận xét gì về tập giá trị của x và của (-y) ?
- Hàm số có đơn điệu trên tập được xét không ?
- **Hướng dẫn giải:**

Xét hàm số : $f(t) = t + \sqrt{1+t^2}$ trên R.

$$f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{1+t^2}} > \frac{|t| - t}{\sqrt{1+t^2}} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Suy ra hàm số đồng biến trên R

Ta có : $(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = -y + \sqrt{1+(-y)^2} \Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y$ thế vào phương trình (2), ta được :

$$\begin{aligned} x\sqrt{6x+2x^2+1} &= -4x^2+6x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{6x+2x^2+1} - \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{25x^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6x+2x^2+1} = 3x \\ \sqrt{6x+2x^2+1} = -2x \end{cases} \end{aligned}$$

Khi $\sqrt{6x+2x^2+1} = 3x$, ta có :

$$\begin{cases} x = -y \\ x \geq 0 \\ 2x^2 + 6x + 1 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x \geq 0 \\ -7x^2 + 6x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Khi $\sqrt{6x+2x^2+1} = -2x$, ta có :

$$\begin{cases} x = -y \\ x \leq 0 \\ 2x^2 + 6x + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x \leq 0 \\ -2x^2 + 6x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{11}}{2} \\ y = \frac{-3+\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ phương trình là : } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{11}}{2} \\ y = \frac{-3+\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{A 2012})$$

Hướng dẫn giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) & (1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) suy ra :

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x-1 \leq \frac{1}{2}; \left|y + \frac{1}{2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y+1 \leq \frac{3}{2}$$

Xét hàm số : $f(t) = t^3 - 12t$ trên đoạn $K = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$
 $f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0, \forall t \in K$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó : $(1) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y+1) \Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow y = x-2$ thế vào phương trình (2), ta được :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

- Với $x = \frac{1}{2}$, ta có : $y = -\frac{3}{2}$

- Với $x = \frac{3}{2}$, ta có : $y = -\frac{1}{2}$

$$(x, y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

Nhận xét : Phương trình (1) của hệ có yếu tố ta đáng lưu tâm $x^3 - 3x^2$ và $y^3 + 3y^2$ đó là một phần của hằng đẳng thức.

$$\begin{cases} \frac{x^4 - 16}{8x} = \frac{y^4 - 1}{y} \\ x^2 - 2xy + y^2 = 8 \end{cases}$$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình :

*/ Cách thức mà trong thực tế bản thân đã làm:

- Hãy lựa chọn biến đổi phương trình trong hệ về dạng $f(x) = f(y)$.
- Nhận xét gì về tập giá trị của $\frac{x}{2}$ và của y ?
- Hàm số có đơn điệu trên tập được xét không ?
- **Hướng dẫn giải:**

Điều kiện : $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

$$\frac{x^4 - 16}{8x} = \frac{y^4 - 1}{y} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4 - 1}{\frac{x}{2}} = \frac{y^4 - 1}{y}$$

Ta có : (1)

Xét hàm số : $f(t) = \frac{t^4 - 1}{t}$ trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(t) = 3t^2 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in D$$

. Suy ra : Hàm số $f(t)$ đồng biến trên D .

+ Trên $(0; +\infty)$: (1) $\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = y$ thế vào phương trình còn lại của hệ

ta được : $y^2 = 8 \Rightarrow y = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$ (thỏa mãn)

+ Trên $(-\infty; 0)$: (1) $\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = y$ thế vào phương trình còn lại của hệ

ta được : $y^2 = 8 \Rightarrow y = -2\sqrt{2} \Rightarrow x = -4\sqrt{2}$ (thỏa mãn)

$$(x, y) = \left[(-4\sqrt{2}; -2\sqrt{2}); (4\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \right]$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

Nhận xét : Có nhiều bài toán cho ta thấy ngay hàm số cần xét nhưng có những bài cần có một số bước biến đổi cơ bản mới có được cái ta cần.

$$\begin{cases} x + 3y + 1 = y^2 - \frac{1}{y} + \frac{3x + 4}{\sqrt{x + 1}} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sqrt{9y - 2} + \sqrt{7x + 2y + 2} = 2y + 3 \end{cases} \quad (2)$$

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình :

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 9y - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ y \geq \frac{2}{9} \end{cases} (*)$$

Điều kiện :

$$(1) \Leftrightarrow y^2 - \frac{1}{y} - 3y = (x + 1) - \frac{1}{\sqrt{x + 1}} - 3\sqrt{x + 1} \quad (1')$$

Ta có :

Xét hàm số $f(t) = t^2 - \frac{1}{t} - 3t$ trên khoảng $(0; +\infty)$

$$f'(t) = 2t + \frac{1}{t^2} - 3 = \frac{(2t+1)(t-1)^2}{t^2} \geq 0, \forall t \in (0; +\infty)$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Khi đó : $(1') \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x+1 = y^2$ thế vào phương trình (2), ta được :

$$\sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7y^2+2y-5} = 2y+3$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{9y-2} - (y+2) \right] + \left[\sqrt[3]{7y^2+2y-5} - (y+1) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-5y+6}{\sqrt{9y-2} + (y+2)} + \frac{(y+1)(y^2-5y+6)}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + (\sqrt[3]{7y^2+2y-5})^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-5y+6).h(x) = 0$$

Vì

$$h(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{9y-2} + (y+2)} + \frac{y+1}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + (\sqrt[3]{7y^2+2y-5})^2} \right] > 0$$

với $\forall y \geq \frac{2}{9}$ nên $y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=3 \end{cases}$

-Khi $y=2 \Rightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện (*))

-Khi $y=3 \Rightarrow x=8$ (thỏa mãn điều kiện (*))

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} & (1) \\ 3x^2 - 8x - 3 = 4(x+1)\sqrt{y+1} & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình :

***/ Cách thức mà trong thực tế bản thân đã làm:**

- Hãy lựa chọn biến đổi phương trình trong hệ về dạng $f(x) = f(y)$.

- Nhận xét gì về tập giá trị của $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ và của $\sqrt{y+1}$?

- Hàm số có đơn điệu trên tập được xét không ?

- Hướng dẫn giải:**

Điều kiện : $\begin{cases} x > -1 \\ y \geq -1 \end{cases} (*)$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right)^3 + \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right) = (\sqrt{y+1})^3 + (\sqrt{y+1}) \quad (1')$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $D = [0; +\infty)$

$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Khi đó : $(1') \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}$ thế vào phương trình

(2), ta được : $3x^2 - 8x - 3 = 4x\sqrt{x+1} \Leftrightarrow (2x-1)^2 = (x+2\sqrt{x+1})^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = x-1 & (3) \\ 2\sqrt{x+1} = 1-3x & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4(x+1) = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 6x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{3}$$

Suy ra : $\sqrt{y+1} = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} \Leftrightarrow y = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ 4(x+1) = (1-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 10x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5-2\sqrt{13}}{9}$$

$$\sqrt{y+1} = \frac{\frac{5-2\sqrt{13}}{9}}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{13}}{9}+1}} \Leftrightarrow y = -\frac{41+7\sqrt{13}}{72}$$

Suy ra : (thỏa mãn điều kiện)

$$\text{Vậy nghiệm của hệ phương trình là : } \begin{cases} x = \frac{5-2\sqrt{13}}{9} \\ y = -\frac{41+7\sqrt{13}}{72} \end{cases}; \begin{cases} x = 3+2\sqrt{3} \\ y = \frac{4+3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

$$\begin{cases} 5 + 16.4^{x^2-2y} = (5 + 16^{x^2-2y}).7^{2y-x^2+2} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + 17x + 10y + 17 = 2(x^2 + 4)\sqrt{4y+11} & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình :

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = x^2 - 2y$ phương trình (1) có dạng

$$5 + 16 \cdot 4^t = (5 + 16^t) \cdot 7^{2-t} \Leftrightarrow \frac{5 + 4^{2+t}}{7^{2+t}} = \frac{5 + 4^{2t}}{7^{2t}} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x \Rightarrow f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Phương trình (3) có dạng $f(t+2) = f(2t) \Leftrightarrow t+2 = 2t \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2y = 2$
 Khi đó phương trình (2) có dạng

$$x^3 + 5x^2 + 17x + 7 = 2(x^2 + 4)\sqrt{2x^2 + 7}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 + (x+2)^2 + (x+2) = (2x^2 + 7)\sqrt{2x^2 + 7} + (2x^2 + 7) + \sqrt{2x^2 + 7}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$

$f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Phương trình trên có dạng

$$f(x+2) = f(\sqrt{2x^2 + 7}) \Leftrightarrow x+2 = \sqrt{2x^2 + 7} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Suy ra : Hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (x;y) là: $\left(1; \frac{-1}{2}\right), \left(3; \frac{7}{2}\right)$.

$$\begin{cases} 4\sqrt{1+2x^2y} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-2x^2y} + \sqrt{1-x^2} \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4+x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1} \end{cases}$$

Ví dụ 12: Giải hệ phương trình :

Hướng dẫn giải:

Điều kiện : $-1 \leq x \leq 1$

Ta thấy $(x,y) = (0;a), a \in \mathbb{R}$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Khi $x \neq 0$, ta có :

$$2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4+x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1} \Leftrightarrow 2y + 2y\sqrt{4y^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \quad (*)$$

Xét hàm số : $f(t) = t + t\sqrt{t^2+1}$

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến}$$

Do đó : $(*) \Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x}$ thế vào phương trình còn lại của hệ ta

$$\text{có : } 4\sqrt{1+x} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{1+x} \geq 0 \\ b = \sqrt{1-x} \geq 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{1+x} \geq 0 \\ b = \sqrt{1-x} \geq 0 \end{cases}$ ta có : $3x = x - 1 + 2(x+1) - 1 = 2a^2 + b^2 - 1$

Phương trình trở thành :

$$2a^2 + b^2 + ab - 4a + 2b = 0 \Leftrightarrow (2a - b)(a + b - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Với $2a = b$, ta có : $2\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5} \Rightarrow y = -\frac{5}{6}$

Với $a + b = 2$, ta có : $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow x = 0$ (loại)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(x; y) = \left\{ \left(-\frac{3}{5}; -\frac{5}{6} \right); (0; a) \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

Ví dụ 13: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{x-2} - \sqrt{y^4+5} = y & (1) \\ x^2 + 2x(y-2) + y^2 - 8y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện : $x \geq 2$

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)+5} + \sqrt[4]{x-2} = \sqrt{y^4+5} + y \quad (1')$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^4+5}$ trên $[0; +\infty)$

$$f'(t) = 1 + \frac{2t^3}{\sqrt{t^4+5}} > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

Khi đó : $f(\sqrt[4]{x-2}) = f(y) \Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2} = y \Leftrightarrow x = y^4 + 2$ thế vào phương trình (2),

ta được : $4y = (y^4 + y)^2 \Leftrightarrow y(y^7 + 2y^4 + y - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^7 + 2y^4 + y - 4 = 0 \end{cases} \quad (3)$

Với $y = 0 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

Giải (3): Xét hàm số $g(y) = y^7 + 2y^4 + y - 4$ trên $[0; +\infty)$

$$g'(y) = 7y^6 + 8y^3 + 1 > 0, \forall y \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Hàm số } g(y) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

Lại có : $(3) \Leftrightarrow g(y) = g(1) \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Ví dụ 14: Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 20\sqrt{6-x} - 17\sqrt{5-y} - 3x\sqrt{6-x} + 3y\sqrt{5-y} = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x+y+5} + 3\sqrt{3x+2y+11} = x^2 + 6x + 13 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 5 \\ 2x + y + 5 \geq 0 \\ 3x + 2y + 11 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$(1) \Leftrightarrow (20 - 3x)\sqrt{6 - x} = (17 - 3y)\sqrt{5 - y}$$

$$\Leftrightarrow (3(6 - x) + 2)\sqrt{6 - x} = (3(5 - y) + 2)\sqrt{5 - y} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = (3t + 2)\sqrt{t}$ trên tập $[0; +\infty)$

$$f'(t) = 3\sqrt{t} + \frac{3t + 2}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

Khi đó : $(3) \Leftrightarrow f(6 - x) = f(5 - y) \Leftrightarrow 6 - x = 5 - y \Leftrightarrow y = x - 1$ thế vào phương

trình (2), ta được : $2\sqrt{3x + 4} + 3\sqrt{5x + 9} = x^2 + 6x + 13$ (Điều kiện : $x \geq -\frac{4}{3}$)

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3x + 4} - (x + 2)) + 3(\sqrt{5x + 9} - (x + 3)) = x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x(x + 1)}{\sqrt{3x + 4} + (x + 2)} + \frac{-3x(x + 1)}{\sqrt{5x + 9} + (x + 3)} = x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) \left(\frac{2}{\sqrt{3x + 4} + (x + 2)} + \frac{3}{\sqrt{5x + 9} + (x + 3)} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \quad (\text{vì } \frac{2}{\sqrt{3x + 4} + (x + 2)} + \frac{3}{\sqrt{5x + 9} + (x + 3)} + 1 > 1 \text{ với mọi } x \text{ thuộc TXĐ})$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = -1$ (thỏa mãn hệ phương trình)

Với $x = -1 \Rightarrow y = -2$ (thỏa mãn hệ phương trình)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(x; y) \in \{(0; -1); (-1; -2)\}$

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = 3^y & (1) \\ y + \sqrt{y^2 + 1} = 3^x & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 15 : Giải hệ phương trình :

Hướng dẫn giải:

Trừ theo vế phương trình (1) cho phương trình (2), ta được :

$$(x + \sqrt{x^2 + 1}) - (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 3^y - 3^x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} + 3^x = y + \sqrt{y^2 + 1} + 3^y \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} + 3^t$ trên $\mathbb{R}$

$$f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3' \ln 3 > 0, \forall t \in R \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } R.$$

Khi đó : (3) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thế vào phương trình (2), ta được :

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = 3^x \Leftrightarrow 1 = 3^x (\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad (4)$$

Xét hàm số $g(x) = 3^x (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ trên R

$$g'(x) = 3^x (\sqrt{x^2 + 1} - x) \left(\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) > 0, \text{ do } \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \text{ và } \sqrt{x^2 + 1} \geq 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên R .

Khi đó : (4) $\Leftrightarrow g(x) = g(0) \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Ví dụ 16 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (xy - 3)\sqrt{y+2} + \sqrt{x} = \sqrt{x^5} + (y - 3x)\sqrt{y+2} & (1) \\ \sqrt{9x^2 + 16} - 2\sqrt{2y+8} = 4\sqrt{2-x} & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow (x - 1) \left[(y + 3)\sqrt{y+2} - (x + 1)\sqrt{x} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (y + 3)\sqrt{y+2} - (x + 1)\sqrt{x} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Với } x = 1 : \text{ Từ phương trình (2), ta được } 2\sqrt{2y+8} = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{31}{8} \text{ (loại)}$$

Ta có :

$$(3) \Leftrightarrow (y + 2 + 1)\sqrt{y+2} = (x + 1)\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{y+2})^3 + (\sqrt{y+2}) = (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{x}) \quad (3')$$

Xét hàm số Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên R

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in R$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên R

Khi đó : (3) $\Leftrightarrow f(\sqrt{y+2}) = f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2} = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = x - 2$ thế vào phương

trình (2), ta được : $\sqrt{9x^2 + 16} = 4\sqrt{2-x} + 2\sqrt{2x+4}$

$$\Leftrightarrow 9x^2 = 32 - 8x + 16\sqrt{2(4-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}-(x^2+8x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2(4-x^2)}=\frac{x}{2} \\ \sqrt{2(4-x^2)}=-\frac{x}{2}-4 \end{cases} \quad (4)$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 = \frac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2}-6}{3}$$

(thỏa mãn điều kiện)

$$(x; y) = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}-6}{3} \right)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất :

Ví dụ 17: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-2)=6\ln\left[(y+\sqrt{y^2+9})(\sqrt{x^2+9}-x)\right]-12\ln 3 \\ \sqrt[3]{2x-y+34}-\sqrt[3]{2y-x-3}=1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 - 2x + 2y = 6\ln \frac{(y+\sqrt{y^2+9})(x^2+9-x^2)}{x+\sqrt{x^2+9}} - 6\ln 9$$

PT(1)

$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 - 2x + 2y = 6\ln(y+\sqrt{y^2+9}) - 6\ln(x+\sqrt{x^2+9})$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x + 6\ln(x+\sqrt{x^2+9}) = y^3 - 2y + 6\ln(y+\sqrt{y^2+9})$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 - 2t + 6\ln(t+\sqrt{t^2+9})$ với $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 2 + \frac{6}{\sqrt{t^2+9}} = 3\left(t^2 + \frac{2}{\sqrt{t^2+9}} - \frac{2}{3}\right)$$

Xét hàm số: $g(u) = u + \frac{2}{\sqrt{u+9}} - \frac{2}{3}$ với $u \geq 0$

$$\Rightarrow g'(u) = 1 - \frac{1}{\sqrt{(u+9)^3}} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{9^3}} > 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(u)$ đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow g(u) \geq g(0) = 0$

Suy ra: $f'(t) = 3g(t^2) \geq 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thế vào phương trình (2), ta được :

$$\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+34} + \sqrt[3]{3-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x+34+3-x+3\sqrt{(x+34)(3-x)}(\sqrt[3]{x+34}+\sqrt[3]{3-x})=1$$

$$\Rightarrow 37+3\sqrt{(x+34)(3-x)}=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+31x-102}=12$$

$$\Leftrightarrow x^2+31x-102=1728 \Leftrightarrow x^2+31x-1830=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-61 \\ x=30 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy $x=-61; x=30$ là nghiệm của phương trình.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $(x,y)=\{(30;30);(-61;-61)\}$

$$\begin{cases} (1+4^{2x-y})5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} & (1) \\ \frac{x-y}{4}=\ln(x+3)-\ln(y+3) & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 18: Giải hệ phương trình:

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} x > -3 \\ y > -3 \end{cases}$$

Điều kiện :

Đặt $t=2x-y$, phương trình (1) trở thành:

$$(1+4^t).5^{1-t}=1+2^{t+1} \Leftrightarrow \frac{1+4^t}{5^t}=\frac{1+2^{t+1}}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}.2^t \quad (3)$$

Ta có hàm số $f(t)=\left(\frac{1}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t$ nghịch biến và hàm số $g(t)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}.2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà $t=1$ thỏa mãn (3), nên $t=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3)

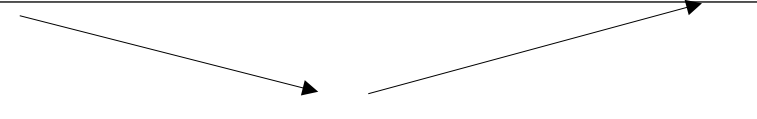
$$\Rightarrow 2x-y=1$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow x-4\ln(x+3)=y-4\ln(y+3) \quad (*)$$

Xét hàm số: $y=f(t)=t-4\ln(t+3)$ với $t > -3$ ($(*) \Leftrightarrow f(x)=f(y)$)

$$\text{Ta có: } f'(t)=1-\frac{4}{t+3}=\frac{t-1}{t+3}, f'(t)=0 \Rightarrow t=1$$

BBT:

t	-3	1	$+\infty$
f'(t)	-	0	+
f(t)			

Với $x=1 \Rightarrow y=1$ ta có $x=y=1$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

$$\text{Từ } 2x-y=1 \Leftrightarrow y-x=x-1$$

Với $x \neq 1$, ta có:

$$\text{Khi } x > 1 \Rightarrow y > x > 1 \Rightarrow f(y) > f(x)$$

Khi $x < 1 \Rightarrow y < x < 1 \Rightarrow f(y) > f(x)$

Suy ra với $\begin{cases} \forall x \in (-3; +\infty) \setminus \{1\} \\ 2x - y = 1, \end{cases}$ ta luôn có $f(y) > f(x)$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2y(4y^2 + 3x^2) = x^4(x^2 + 3) & (1) \\ 2012^x(\sqrt{2y - 2x + 5} - x + 1) = 4024 & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 19: Giải hệ phương trình:

Hướng dẫn giải:

Điều kiện : $2y - 2x + 5 \geq 0$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 0$ nhưng lại không thỏa mãn (2) vậy x khác 0 . Từ (1) chia hai vế cho $x^2 \neq 0$. Ta được :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2y(4y^2 + 3x^2)}{x^3} = \frac{x^4(x^2 + 3)}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2y}{x} \right) \left[\left(\frac{2y}{x} \right)^2 + 3 \right] = x^3 + 3x \Leftrightarrow \left(\frac{2y}{x} \right)^3 + 3 \left(\frac{2y}{x} \right) = x^3 + 3x \quad (3)$$

Xét hàm số : $f(t) = t^3 + 3t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ với mọi t thuộc $\mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó : $(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{2y}{x}\right) = f(x) \Leftrightarrow \frac{2y}{x} = x \Leftrightarrow 2y = x^2$ thế vào phương trình (2), ta được :

$$(2) \Leftrightarrow 2012^x(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - x + 1) = 4024$$

$$\Leftrightarrow 2012 \cdot 2012^{x-1}(\sqrt{(x-1)^2 + 4} - (x-1)) = 4024$$

Lại đặt $t = x - 1$ suy ra :

$$2012 \cdot 2012^t(\sqrt{t^2 + 4} - t) = 4024 \Leftrightarrow g(t) = 2012^t(\sqrt{t^2 + 4} - t) = 2$$

Xét hàm số :

$$g(t) = 2012^t(\sqrt{t^2 + 4} - t) \Rightarrow g'(t) = 2012^t \ln 2012(\sqrt{t^2 + 4} - t) + 2012^t \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} - 1 \right)$$

$$g'(t) = 2012^t(\sqrt{t^2 + 4} - t) \left[\ln 2012 - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} \right] > 0$$

Có :

$$(\forall t \sqrt{t^2 + 4} - t > 0 \text{ và } \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} < 1 < \ln 2012)$$

mà $g(2)=0$ nên $t=0$ là nghiệm duy nhất và : $t = x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1; y = \frac{1}{2}$

$$(x; y) = \left(1; \frac{1}{2} \right)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 & (2) \end{cases}$$

Ví dụ 20: Giải hệ phương trình:

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq \frac{5}{2} \end{cases} (*)$$

Điều kiện :

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 4x^3 + x = -(y - 3)\sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow (2x)^3 + (2x) = (\sqrt{5 - 2y})^3 + (\sqrt{5 - 2y}) \quad (3)$$

Xét hàm số : $f(u) = u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u$. Suy ra $f(u)$ luôn đồng biến

$$f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow 4x^2 = 5 - 2y \Leftrightarrow 2y = 5 - 4x^2$$

Thế vào

$$(2), \text{ ta được : } g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5 - 4x^2}{2} \right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7 = 0 \quad \text{với } x \in \left[0; \frac{3}{4} \right]. \text{ Ta thấy}$$

$x=0$ và $x = \frac{3}{4}$ không là nghiệm .

$$g'(x) = 8x - 8x \left(\frac{5}{2} - 2x^2 \right) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{3}{4} \right)$$

Mặt khác : $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2 \right)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất :

Bài tập tự luyện

$$\begin{cases} x + \sqrt{x(x^2 - 3x + 3)} = \sqrt[3]{y + 2} + \sqrt{y + 3} + 1 \\ 3\sqrt{x - 1} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = \sqrt[3]{y + 2} + 1 \end{cases}$$

Bài 1. Giải hệ phương trình :

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 96} + 95y = y^2 \sqrt{x^2 + 96} - x^2 y \\ \frac{2(y^2 - 3x - 94)}{\sqrt{y}} = 3\sqrt{xy - 96\frac{x}{y} + \frac{8}{y}} \end{cases}$$

Bài 3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{\frac{8y^2+1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Bài 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (53 - 5x)\sqrt{10 - x} + (5y - 48)\sqrt{9 - y} = 0 \\ \sqrt{2x - y + 6} + x^2 - 2x - 66 = \sqrt{-2x + y + 11} \end{cases}$$

Bài 5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \\ \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \end{cases}$$

Bài 6. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3xy(1 + \sqrt{9y^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \\ x^3(9y^2 + 1) + 4(x^2 + 1)\sqrt{x} = 10 \end{cases}$$

Với chuyên đề này tôi đã giảng dạy tại lớp 12A1 và 12A2. Tôi thấy, với cách hướng dẫn học sinh cách suy nghĩ, cách tự đặt câu hỏi, tự trả lời những câu hỏi của mình trong quá trình làm một bài toán nói chung và nhất là trong cách biến đổi ra hàm đặc trưng và điều kiện sử dụng phương pháp này. Với cách làm đó Tôi thấy phần lớn học sinh của lớp học hứng thú, tự tin biến đổi và không còn thấy e ngại với hệ phương trình dạng này nữa. Cụ thể như sau:

Qua hai lần kiểm tra đối chứng, thu được kết quả sau:

Lớp		Sĩ số	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu	Kém
12A1	Lần kiểm tra 1	48	1	6	22	19	0
	Lần kiểm tra 2		8	15	25	0	0
12A2	Lần kiểm tra 1	47	0	2	12	30	3

	Lần kiểm tra 2		2	9	21	15	0
--	----------------	--	---	---	----	----	---

C. KẾT LUẬN

I. Kết quả nghiên cứu :

Thông qua quá trình giảng dạy ở các lớp 12A1, 12A2 và ôn thi đội tuyển cho đối tượng học sinh khá giỏi, tôi đã áp dụng đề tài trên và kết quả cho thấy:

- Học sinh có khả năng nhìn nhận và biến đổi chính xác cách giải một hệ phương trình *có thể sử dụng tính đơn điệu của hàm số*.
- *Hình thành được tư duy logic, kỹ năng giải các hệ phương trình bằng phương pháp hàm số. Đồng thời tạo hứng thú trong học tập cho học sinh. Tôi đã thống kê kết quả và thấy hiệu quả rõ rệt của sáng kiến kinh nghiệm này.*

2. Kiến nghị và đề xuất.

- Trong quá trình dạy học về phương trình, hệ phương trình và bất phương trình nói chung, tôi thấy các phương pháp giải hệ phương trình chưa được trình bày một cách đầy đủ, đặc biệt là phương pháp hàm số. Rất mong có thêm nhiều tài liệu hơn nữa viết về đề tài này để góp phần cho việc dạy và học đạt hiệu quả cao hơn.

- Trong quá trình giảng dạy, tôi nhận thấy tài liệu này rất hữu ích đối với tôi và đã mang lại những kết quả khả quan khi dạy học sinh. Hy vọng nó sẽ trở thành tài liệu tham khảo cho các giáo viên, học sinh và những người quan tâm đến vấn đề hệ phương trình. Do thời gian có hạn nên việc nghiên cứu không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc để đề tài được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng, tôi xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi hoàn thành sáng kiến kinh nghiệm này !

D. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Sách Đại số 10 chương trình nâng cao - NXB Giáo dục
- Sách Đại số 12 chương trình nâng cao - NXB Giáo dục
- Tạp chí toán học và tuổi trẻ.
- Đại số sơ cấp- Trần Phương - Lê Hồng Đức. NXB Hà Nội.
- Đề thi Đại học và Cao đẳng từ 2002 đến 2015 của Bộ GD & ĐT.
- Đề thi HSG cấp tỉnh Tỉnh Thanh Hóa
- Lời giải đề thi Học sinh giỏi toán 12 - Trần Tiến tự. NXB ĐHQG Hà Nội
- Chuyên đề nâng cao đại số trung học phổ thông - Phạm Quốc Phong. NXB GD
- Từ internet : www.math.vn; www.vnmath.com; www.laisac.page.tl; ...

MỤC LỤC

	Trang
A Đặt vấn đề	1
B Giải quyết vấn đề	2
I Cơ sở lý luận của vấn đề	2
II Thực trạng của vấn đề	2
III Giải pháp và tổ chức thực hiện	2
1 Trang bị lại cho học sinh một số kiến thức	2
2 Kỹ năng giải hệ phương trình bằng phương pháp hàm số	3
C Kết luận	20
D Tài liệu tham khảo	21
E Mục lục	22

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG
ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 19 tháng 5 năm 2016.
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình viết, không sao chép nội dung của
người khác.
(Ký và ghi rõ họ tên)

Hoàng Minh Thành