

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT NÔNG CÔNG 3

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

HƯỚNG DẪN HỌC SINH GIẢI BÀI TOÁN TÌM
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT BẰNG
PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Người thực hiện: Nguyễn Lê Minh
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực: Toán

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU.....	2
2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.....	3
2.1 Cơ sở lý luận.....	3
2.2 Thực trạng vấn đề.....	3
.....	4
2.3 Nội dung.....	4
2.3.1 Một số bất đẳng thức thường dùng.....	4
2.3.2 Xét hàm một biến.....	4
2.3.3 Đối biến đối xứng.....	6
2.3.4 Đánh giá kết hợp đối biến.....	8
2.3.5 Phương pháp tiếp tuyến.....	17
2.3.6 Một số bài tập vận dụng.....	20
2.4 Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm.....	21
3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	21
Tài Liệu tham khảo.....	22

1. MỞ ĐẦU

Hàm số là một khái niệm cơ bản của toán học, nó đóng vai trò trung tâm trong chương trình toán THPT, Hàm số cũng là nền tảng của nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học và các khoa học khác. Nắm được các vấn đề về hàm số không chỉ giúp người học giải quyết các bài toán có những ràng buộc phức tạp, mà còn rèn luyện tư duy hệ thống, sáng tạo, có thói quen xem xét sự vật, hiện tượng trong sự vận động và phụ thuộc lẫn nhau.

Trong kỳ thi THPT quốc gia và thi học sinh giỏi những năm gần đây bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức, là bài toán có tính phân loại cao. Một phần lớn trong các bài toán này có thể giải được bằng phương pháp hàm số. Tuy nhiên sách giáo khoa chỉ trình bày vấn đề này với các ví dụ và bài tập ở mức độ vận dụng thấp, các sách tham khảo, các website toán có viết khá nhiều phương pháp giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, trong đó có một số ví dụ về ứng dụng đạo hàm giải bài toán dạng này. Vì vậy các bài tập lại quá khó với các em học sinh khi mới bắt đầu tiếp cận vấn đề, câu hỏi thường trực của các em là tại sao lại có cách đặt ẩn mới này, hay lại có cách đánh giá kia, hơn nữa khả năng tự đọc sách, tự học của các em học cũng còn nhiều hạn chế. Nhằm mục đích giúp học sinh bước đầu có thể định hướng và tìm kiếm lời giải cho dạng toán này. Tôi mạnh dạn thực hiện chuyên đề: **“Hướng dẫn học sinh giải bài toán tìm giá trị lớn, giá trị nhỏ nhất bằng phương pháp hàm số”**.

Trong chuyên đề này Tôi trình bày các bài toán có vận dụng các bất đẳng thức đơn giản, thường gặp để xác định hàm số, đánh giá và phân tích lời giải giúp các em học sinh có cái nhìn rõ ràng về một lời giải, các bài tập ban đầu khá dễ cũng sẽ làm cho học sinh tự tin khi tiếp cận vấn đề này. Sau cùng bằng cách vận dụng những kiến thức này các em sẽ giải được một số bài toán vừa mới thi gần đây. Trong chuyên đề này tôi cũng trình bày phương pháp tiếp tuyến giải bài toán: “Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức...”, có trong Đề thi khảo sát chất lượng lớp 12 THPT năm 2106 của Sở GD&ĐT Thanh Hóa và nêu một số bài tập tương tự.

Tôi thực hiện chuyên đề này bằng cách tập hợp lại các ví dụ và các bài tập có cùng cách giải, sắp xếp chúng từ mức độ dễ, đến trung bình phù hợp cho học sinh trường THPT Nông Công 3.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1 Cơ sở lý luận

Đối với hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $D \subset R$.

- Nếu tồn tại một giá trị $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in D$ thì $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất của $f(x)$.
- Nếu tồn tại một giá trị $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in D$ thì $f(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên D , nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên D , nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Hàm số $f(x)$ nếu liên tục trên $[a; b]$ có đạo hàm trên $(a; b)$ thì bằng cách xét sự biến thiên trên đoạn được chỉ ra ta có thể xác định được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x)$.

Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức ba biến thì việc quan sát, nhận xét về biểu thức cần đánh giá là hết sức quan trọng, thông qua việc nhận xét tính chất đối xứng, sự bình đẳng về vai trò của các biến, mối quan hệ giữa các biến, từ đó xác định biến mới, điều kiện xác định của biến mới và xây dựng được hàm số.

2.2 Thực trạng vấn đề

Học sinh trường THPT Nông Công 3 là học sinh được tuyển từ vùng 3 của huyện Nông Công, một vùng còn rất nhiều khó khăn, điểm tuyển sinh đầu vào còn thấp. Trong khi đó bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất là một vấn đề khó trong chương trình toán THPT. Vì vậy học sinh rất ngại khi gặp loại toán này, các em thường không biết bắt đầu từ đâu, khai thác giả thiết đã cho như thế nào, sử dụng sự đối xứng, hoặc tìm ra sự đối xứng của các biến, xác lập các quan hệ có ích của các biến để có thể đánh giá cũng là một khó khăn lớn đối với các em.

Trong năm học 2014 – 2015, khi chưa dạy chuyên đề này. Sau khi dạy phần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số cho lớp 12A1, tôi cho lớp làm bài kiểm tra thì kết quả thu được là khiêm tốn.

Kết quả qua bài kiểm tra thử ở lớp 12A1 - Trường THPT Nông Công III

Năm học	Lớp	Tổng số	Điểm 8 trở lên		Điểm từ 5 đến 8		Điểm dưới 5	
			Số	Tỷ lệ	Số	Tỷ lệ	Số	Tỷ lệ

			lượng		lượng		lượng	
2014-2015	12A1	49	8	16.3%	20	40.8%	21	42.9%

2.3 Nội dung

2.3.1 Một số bất đẳng thức thường dùng.

Loại 1: Với mọi số thực a, b, c ta luôn có các kết quả sau:

- i) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
- ii) $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$
- iii) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$
- iv) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$
- v) $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Loại 2: Với mọi số thực dương x, y, z ta có

- i) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Dấu “=” khi $x = y$
- ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$. Dấu “=” khi $x = y = z$

Loại 3: Với mọi số $x, y, z \geq 1$ ta có

- i) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$
- ii) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{3}{1+\sqrt[3]{xyz}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$

2.3.2 Xét hàm một biến

Bài toán 1: Cho $0 \leq x, y, z \leq 1$ Thỏa mãn $x + y + z = \frac{3}{2}$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải: Không mất tính tổng quát, giả sử $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ khi đó $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$

$$\text{Có } P = x^2 + y^2 + z^2 \leq \left(\frac{3}{2} - z\right)^2 + z^2 = 2z^2 - 3z + \frac{9}{4}$$

$$\text{Xét hàm số } f(z) = 2z^2 - 3z + \frac{9}{4} \quad \forall z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right];$$

$$f'(z) = 4z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3}{4}$$

Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{5}{4}$; $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8} \Rightarrow f(z) \leq \frac{5}{4} \quad \forall z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$;

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{4}$, khi $x=0, y=\frac{1}{2}, z=1$ hoặc các hoán vị của nó.

Bài toán 2: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 0$, và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$

(Đề tuyển sinh Đại học Khối B năm 2012)

Lời giải

Từ giả thiết $x + y + z = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Có: $0 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x(y + z) + 2yz = 1 - 2x^2 + 2yz$

Nên $yz = x^2 - \frac{1}{2}$

Mặt khác $yz \leq \frac{y^2 + z^2}{2} = \frac{1 - x^2}{2} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2} \leq \frac{1 - x^2}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$

Khi đó

$$P = x^5 + (y^2 + z^2)(y^3 + z^3) - y^2 z^2 (y + z)$$

$$P = x^5 + (1 - x^2) \left[(y^2 + z^2)(y + z) - yz(y + z) \right] + \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 x$$

$$P = x^5 + (1 - x^2) \left[- (1 - x^2)x + \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)x \right] + \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 x$$

$$P = \frac{5}{4}(2x^3 - x)$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - x. \quad \forall x \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$

Có $f'(x) = 6x^2 - 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{9}; \quad f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{\sqrt{6}}{9} \text{ dấu bằng khi } x = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow P \leq \frac{5\sqrt{6}}{36}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{6}}{36}$

$$\text{Khi } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ y + z = -x \\ yx = x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ y = z = -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

2.3.3 Đổi biến đối xứng

Bài toán 1. Cho x, y, z không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = xy + yz + zx + \frac{5}{x + y + z}$

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = x + y + z \Rightarrow xy + yz + zx = \frac{t^2 - 3}{2}$$

Mặt khác $0 \leq xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 = 3$ nên $3 \leq t^2 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{3} \leq t \leq 3$ vì $t > 0$

$$\text{Khi đó } A = \frac{t^2}{2} + \frac{5}{t} - \frac{3}{2}, \quad t \in [\sqrt{3}; 3]$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{5}{t} - \frac{3}{2}, \quad t \in [\sqrt{3}; 3]$$

$$\text{Có } f'(t) = t - \frac{5}{t^2} = \frac{t^3 - 5}{t^2} > 0 \quad \forall t \in [\sqrt{3}; 3] \text{ do đó } f(t) \text{ đồng biến trên } [\sqrt{3}; 3]$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}) \leq f(t) \leq f(3) \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{3}} \leq f(t) \leq \frac{14}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{14}{3}$ khi $x = y = z = 1$; giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{5}{\sqrt{3}}$

khi hai trong ba số bằng 0 số còn lại bằng $\sqrt{3}$.

Bài toán 2. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca = 12$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} + ab + bc + ca$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có:

$$12 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 4$$

$$12 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \in [3; 4]$

Cũng từ giả thiết ta có:

$$*) \quad ab + bc + ca = 12 - 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$*) \quad 3(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) = 12$$

$$\Leftrightarrow 5(a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c)^2 = 24$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = \sqrt{24 - 5(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\text{Do đó } P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{24 - 5(a^2 + b^2 + c^2)}} + 12 - 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Đặt $t = \sqrt{24 - 5(a^2 + b^2 + c^2)}$ vì $a^2 + b^2 + c^2 \in [3; 4]$ nên $t \in [2; 3]$

$$\text{Và } P = \frac{\frac{1}{5}(24 - t^2)}{t} + 12 - 3 \frac{24 - t^2}{5} = \frac{1}{5} \left(3t^2 - t + \frac{24}{t} \right) - \frac{12}{5}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 3t^2 - t - \frac{24}{t} \quad \forall t \in [2; 3]$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 6t - 1 - \frac{24}{t^2} = (t - 1) + \left(5t - \frac{24}{t^2} \right) > 0 \quad \forall t \in [2; 3]$$

$$\text{Nên hàm số đồng biến trên } [2; 3] \Rightarrow \max_{[2; 3]} f(t) = f(3) = 32; \min_{[2; 3]} f(t) = f(2) = 22$$

$$\Rightarrow 2 \leq P \leq 4 \quad \forall t \in [2; 3];$$

$$P = 2 \Leftrightarrow t = 2 \text{ khi } a = 2, b = c = 0$$

$$P = 4 \Leftrightarrow t = 3 \text{ khi } a = b = c = 1$$

Bài toán 3

Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x(x + y + z) = 3yz$, ta có:

$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \leq 5(y + z)^3$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2009)

Nhận xét: Từ giả thiết và biểu thức cần chứng minh ta nhận thấy các biểu thức đẳng cấp đối xứng đối với y, z .

$$\text{Thật vậy, từ giả thiết ta có: } x(x + y + z) = 3yz \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 3 \frac{y}{x} \frac{z}{x}$$

Và biểu thức cần chứng minh có thể viết lại như sau:

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{y}{x}\right)^3 + \left(1 + \frac{z}{x}\right)^3 + 3\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right) \leq 5\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right)^3$$

Đặt $a = \frac{y}{x}$; $b = \frac{z}{x}$, khi đó a, b là các số dương thỏa mãn $1 + a + b = 3ab$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(1+a)^3 + (1+b)^3 + 3(1+a)(1+b)(a+b) \leq 5(a+b)^3$$

$$\Leftrightarrow 2 + 6a + 6b + 6a^2 + 6b^2 + a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 6ab \leq 5(a+b)^3$$

$$\Leftrightarrow 2 + 6(a+b) + 6ab + 6a^2 + 6b^2 + (a+b)^3 \leq 5(a+b)^3$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3(a+b) - 3ab + 3(a+b)^2 \leq 2(a+b)^3$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b) + 3(a+b)^2 \leq 2(a+b)^3 \quad (\text{vì } 1 + a + b = 3ab)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 3(a+b) \leq 2(a+b)^2 \quad (1)$$

Đặt $t = a + b$, ta có $1 + t = 1 + a + b = 3ab \leq 3 \frac{(a+b)^2}{4} = 3 \frac{t^2}{4}$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$$

Khi đó từ biểu thức (1) ta cần chứng minh

$$f(t) = 2t^2 - 3t - 2 = (t-2)(2t+1) \geq 0 \quad \forall t \in [2; +\infty)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 2 \Leftrightarrow a = b = 1 \Leftrightarrow x = y = z$

2.3.4 Đánh giá kết hợp đổi biến

a. Đánh giá ba biến đối xứng

Bài toán 1. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2010)

Lời giải:

Ta có $M \geq (ab + bc + ca)^2 + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{1 - 2(ab + bc + ca)}$.

$$\text{Đặt } t = ab + bc + ca \Rightarrow 0 \leq t = ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t}, \quad t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$$

$$\text{Có } f'(t) = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1-2t}}, \quad f''(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}} \leq 0.$$

$f'(0) = 0$ suy ra $f'(x)$ nghịch biến trên $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ nên $f'(t) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0$.

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ do đó $f(t) \geq f(0) = 2, \forall t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$

Vì vậy $M \geq f(t) \geq 2 \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$

Giá trị nhỏ nhất của M là 2 khi $ab = bc = ca, ab + bc + ca = 0$, và $a + b + c = 1$
 $\Leftrightarrow (a; b; c) = (1; 0; 0)$ hoặc $(0; 1; 0)$ hoặc $(0; 0; 1)$

Bài toán 2: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2013)

Lời giải:

Ta có

$$\begin{aligned} (a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} &\leq (a+b)\frac{a+b+4c}{2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab + 4ac + 4bc}{2} \\ &\leq \frac{a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2(a^2 + c^2) + 2(b^2 + c^2)}{2} \leq 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

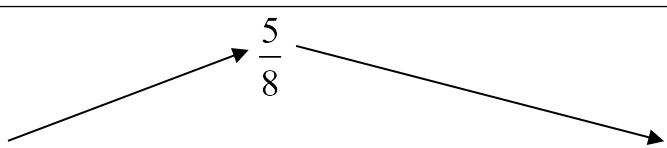
$$\text{Khi đó } P \leq \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4} \Rightarrow t > 2$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2 - 4)}, \quad t > 2$$

$$\text{Ta có } f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{9t}{(t^2 - 4)^2} = \frac{-(t-4)(4t^3 + 7t^2 - 4t - 16)}{t^2(t^2 - 4)}$$

Do $4t^3 + 7t^2 - 4t - 16 = 4(t^3 - 4) + t(7t - 4) > 0 \quad \forall t > 2$ nên $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$
suy ra bảng biến thiên

t	2	4	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Từ bảng biến thiên ta có $P \leq \frac{5}{8}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{8}$ dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 2$

Nhận xét. Ngoài cách đánh giá và xét hàm như trên ta còn có cách đánh giá và xét hàm như sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(c+2)^2 \geq \frac{1}{4}(a+b+c+2)^2;$$

$$3(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \leq (3a+3b)\frac{a+b+4c}{2} = \frac{1}{2}(3a+3b)(a+b+4c)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{4a+4b+4c}{2} \right)^2 = 2(a+b+c)^2$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{8}{a+b+c+2} - \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

$$\text{Đặt } t = a+b+c \Rightarrow t > 0 \text{ khi đó } P \leq \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2}, \quad \forall t \in (0; +\infty) \text{ ta được } f(t) \leq f(6) = \frac{5}{8} \text{ từ đây ta}$$

cũng có kết quả tương tự.

Bài toán 3:

Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{1+yz}{9}$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2014)

Lời giải:

Ta có

$$0 \leq (x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2zx + 2yz = 2(1 - xy - xz + yz)$$

$$\Rightarrow x^2 + yz + x + 1 = x(x+y+z+1) + (1 - xy - xz + yz) \geq x(x+y+z+1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} \leq \frac{x}{x+y+z+1}$$

Mặt khác:

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x(y+z) + 2yz = 2 + 2yz + 2x(y+z)$$

$$\leq 2 + 2yz + [x^2 + (y+z)^2] = 2 + 2yz + x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = 4(1 + yz)$$

$$\Rightarrow -\frac{1+yz}{9} \leq -\frac{(x+y+z)^2}{36}$$

Khi đó

$$P \leq \frac{x}{x+y+z+1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{(x+y+z)^2}{36} = \frac{x+y+z}{x+y+z+1} - \frac{(x+y+z)^2}{36}$$

Đặt $t = x + y + z$ có $t \geq 0$

$$0 \leq t^2 \leq (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 6$$

$$\Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow P \leq f(t) = \frac{t}{t+1} - \frac{t^2}{36} \quad t \in [0; \sqrt{6}]$$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{t}{18} = -\frac{(t-2)(t^2+4t+9)}{18(t+1)^2} \Rightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên

t	0	2	$\sqrt{6}$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

$$\Rightarrow f(t) \leq \frac{5}{9} \quad \forall t \in [0; \sqrt{6}] \Rightarrow P \leq \frac{5}{9}$$

Khi $x = y = 1$ và $z = 0$ thì $P = \frac{5}{9}$. Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{5}{9}$

b. Đánh giá hai biến đối xứng

Bài toán 1: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}$$

Lời giải: Trước tiên ta chứng minh kết quả sau đây: $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$

Thật vậy: $ab + bc + ca = 1$ nên $1 + a^2 = (a+b)(a+c)$; $1 + b^2 = (b+c)(b+a)$

$$\text{do đó: } \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} = \frac{a(b+c) + b(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

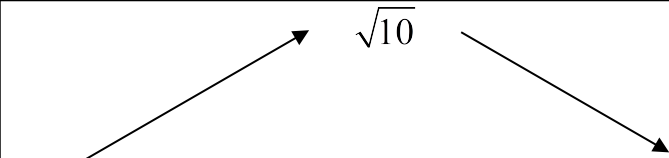
$$= \frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} \leq \frac{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=b \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{3c}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{1+3c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(c) = \frac{3c+1}{\sqrt{1+c^2}}, \quad \forall c \in (0; +\infty)$$

Ta có $f'(c) = \frac{3-c}{(1+c^2)\sqrt{1+c^2}}$; $f'(c)=0 \Leftrightarrow c=3$ suy ra bảng biến thiên:

T	0	3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có $P \leq \sqrt{10}$, dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} a=b; c=3 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\sqrt{10}-3 \\ c=3 \end{cases}$$

Bài toán 2: Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $x \geq y, \quad x \geq z$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2011)

Cách 1. Trước tiên ta chứng minh Bất đẳng thức sau

$$\begin{cases} a, b > 0 \\ ab \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad (*)$$

$$\text{Bất đẳng thức } (*) \Leftrightarrow (a+b+2)(1+\sqrt{ab}) \geq 2(1+a)(1+b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+2)\sqrt{ab} \geq 2(1+a)(1+b) - (a+b+2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+2)\sqrt{ab} \geq a+b+2ab$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab}) - (a+b-2\sqrt{ab}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (\text{BĐT này luôn đúng } \forall ab \geq 1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ab=1$ hoặc $a=b$

Ta có $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} = \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}}$ Áp dụng BĐT (*)

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } \frac{x}{y}=1 \text{ hoặc } z^2=xy$$

Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}}=t$. Do $1 \leq y \leq x \leq 4$ nên $1 \leq t \leq 2$

Ta có $P \geq \frac{1}{2+3\frac{1}{t^2}} + \frac{2}{1+t} = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}, \quad t \in [1; 2]$

$$f'(t) = \frac{2t(2t^2+3) - 4t^3}{(2t^2+3)^2} - \frac{2}{(t+1)^2} = -2 \left(\frac{4t^4 - 3t^3 + 6t^2 - 3t + 9}{(2t^2+3)^2(t+1)^2} \right) < 0, \quad \forall t \geq 1$$

Suy ra $P \geq f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{34}{33}$ khi và chỉ khi

$$\frac{x}{y} = t^2 = 4 \text{ và } z^2 = xy \Rightarrow x=4, y=1, z=2$$

Cách 2: Xem P như là hàm số của biến z

$$P(z) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

$$\Rightarrow P'(z) = \frac{-y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(z+x)^2} = \frac{x(y+z)^2 - y(z+x)^2}{(y+z)^2(z+x)^2}$$

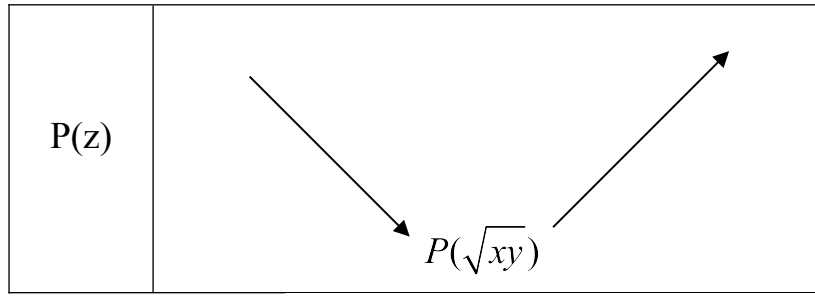
$$P'(z) = 0 \Leftrightarrow x(y+z)^2 = y(z+x)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(z^2 - xy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=\sqrt{xy} \end{cases}$$

Nếu $x=y$ thì $P = \frac{x}{2x+3x} + \frac{x}{x+z} + \frac{z}{z+x} = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}$

Nếu $z = \sqrt{xy}$ ta có bảng biến thiên sau:

z	1	$\sqrt{xy}$	4
P'(z)	-	0	+



Từ bảng biến thiên ta có $P(z) \geq P(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+x}$

$$= \frac{x}{2x+3y} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} = \frac{x}{2x+3y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ ($1 \leq t \leq 2$) ta được

$$P(z) \geq \frac{1}{2+\frac{3}{t^2}} + \frac{2}{1+t} = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}, \quad t \in [1; 2]$$

Tới đây ta tiếp tục như cách 1.

Bài toán 3: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2013)

Lời giải: Do c là số thực dương nên ta có thể viết lại Biểu thức cần chứng minh

như sau:
$$P = \frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3} + \frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2}$$

Đặt $x = \frac{a}{c}; y = \frac{b}{c}$ ($x > 0; y > 0$)

Khi đó điều kiện của bài toán trở thành $xy + x + y = 3$ và

$$P = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Với mọi $u > 0, v > 0$ ta có

$$u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) \geq (u+v)^3 - \frac{3}{4}(u+v)^3 = \frac{(u+v)^3}{4}$$

$$\text{Do đó } \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} \geq 8 \left(\frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} \right)^3 = 8 \left(\frac{(x+y)^2 - 2xy + 3x + 3y}{xy + 3x + 3y + 9} \right)^3$$

Thay $xy = 3 - x - y$ ta có

$$\frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} \geq 8 \left(\frac{(x+y-1)(x+y+6)}{2(x+y+6)} \right)^3 = (x+y-1)^3$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } P &\geq (x+y-1)^3 - \sqrt{x^2 + y^2} = (x+y-1)^3 - \sqrt{(x+y)^2 - 2xy} \\ &= (x+y-1)^3 - \sqrt{(x+y)^2 + 2(x+y) - 6} \end{aligned}$$

Đặt $t = x + y$ ta có

$$3 = x + y + xy \leq x + y + \frac{(x+y)^2}{4} = t + \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow (t-2)(t+6) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$$

$$P \geq f(t) = (t-1)^3 - \sqrt{t^2 + 2t - 6} \quad \forall t \geq 2$$

$$f'(t) = 3(t-1)^2 - \frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2t - 6}}$$

$$\text{Với } t \geq 2 \text{ ta có } 3(t-1)^2 \geq 3 \text{ và } \frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2t - 6}} = \sqrt{1 + \frac{7}{(t+1)^2 - 7}} \leq \sqrt{1 + \frac{7}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Nên } f'(t) \geq 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow f(t) \geq f(2) = 1 - \sqrt{2}.$$

Do đó $P \geq 1 - \sqrt{2}$. Khi $a = b = c$ thì $P = 1 - \sqrt{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất $P = 1 - \sqrt{2}$.

Bài toán 4: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn

$-1 - 2\sqrt{2} < x < -1 + 2\sqrt{2}$, $y > 0$, $z > 0$ và $x + y + z = -1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức } P = \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{8 - (y+z)^2}$$

(Đề Khảo sát chất lượng khối 12 THPT năm 2015, Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Lời giải:

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{8 - (1+x)^2}$$

$$\text{Đầu tiên ta chứng minh BĐT } \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz} \quad (*)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} &\geq \frac{1}{1+yz} \Leftrightarrow (1+yz)[(1+z)^2 + (1+y)^2] \geq [(1+y)(1+z)]^2 \\ &\Leftrightarrow (1+yz)(2+2z+2y+z^2+y^2) \geq (1+yz+z+y)^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2(z+y)(1+yz) + 2(1+yz) + (1+yz)(y-z)^2 + 2yx(1+yz) \\ \geq (1+yz)^2 + 2(1+yz)(y+z) + (y+z)^2 \\ \Leftrightarrow yz(y-z)^2 + (1-yz)^2 \geq 0 \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $y = z = 1$

Từ BĐT (*) ta có

$$\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz} \geq \frac{1}{1+\left(\frac{y+z}{2}\right)^2} = \frac{4}{4+(1+x)^2} \\ \Rightarrow P \geq \frac{4}{4+(1+x)^2} + \frac{1}{8-(1+x)^2}$$

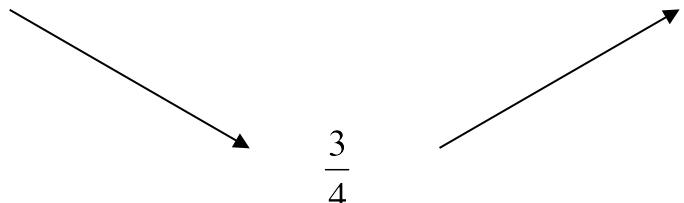
$$\text{Do } -1-2\sqrt{2} < x < -1+2\sqrt{2} \Rightarrow (1+x)^2 \in [0;8]$$

$$\text{Đặt } t = (1+x)^2 \Rightarrow t \in [0;8] \text{ và } P \geq f(t) = \frac{4}{4+t} + \frac{1}{8-t}, \quad \forall t \in [0;8]$$

$$\text{Có } f'(t) = -\frac{4}{(4+t)^2} + \frac{1}{(8-t)^2} = \frac{-3t^2 + 72t - 240}{(4+t)^2(8-t)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4; t = 20$$

(loại)

Bảng biến thiên

t	0	4	20
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

$$\text{Do đó } P \geq f(t) \geq \frac{3}{4} \text{ và } P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)^2 = 4 \\ y = z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = z = 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$ khi $x = -3, y = z = 1$

Bài toán 5 Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

Giải. Ta có

$$(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc$$

$$\Rightarrow P = \frac{(ab + bc + ca)^2 + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

$$\text{Đặt } x = ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 12$$

$$\text{Do } a, b, c \in [1; 3] \Rightarrow (a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow abc - x + 5 \geq 0 \Rightarrow abc \geq x - 5$$

$$a, b, c \in [1; 3] \Rightarrow (a - 3)(b - 3)(c - 3) \leq 0$$

$$\Rightarrow abc - 3(ab + bc + ca) + 9(a + b + c) - 27 \leq 0$$

$$\Rightarrow abc - 3x + 27 \leq 0$$

$$\Rightarrow abc \leq 3x - 27$$

$$\Rightarrow 3x - 27 \geq abc \geq x - 5$$

$$\Rightarrow x \geq 11$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{x^2 + 72}{x} - \frac{1}{2}(x - 5) = \frac{x}{2} + \frac{72}{x} + \frac{5}{2} = f(x), \quad x \in [11; 12]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{72}{x^2} \leq 0 \quad \forall x \in [11; 12]$$

$$\Rightarrow P \leq f(x) \leq f(11) = \frac{160}{11} \text{ dấu "=" khi } \begin{cases} a + b + c = 6 \\ ab + bc + ca = 11 \\ abc = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{160}{11}$ khi $a = 1; b = 2; c = 3$.

2.3.5 Phương pháp tiếp tuyến

Đối với một số hàm số, tiếp tuyến tại một điểm nào đó luôn nằm trên hay nằm dưới đồ thị hàm số.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng I , liên tục và có đạo hàm trên I khi đó tiếp tuyến tại điểm $x_0 \in I$ có phương trình $y = a(x - x_0) + b$ sẽ luôn nằm trên hoặc nằm dưới đồ thị của hàm $f(x)$.

$$f(x) \leq a(x - x_0) + b \text{ hoặc là } f(x) \geq a(x - x_0) + b \quad \forall x \in I$$

Do đó

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in I \Rightarrow f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq a(x_1 + x_2 + \dots + x_n - nx_0) + nb$$

Hoặc là $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq a(x_1 + x_2 + \dots + x_n - nx_0) + nb$

Bài toán 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

(Bất đẳng thức Nesbitt)

Phân tích

Bất đẳng thức đã cho thuần nhất với ba biến a, b, c nên ta có thể chuẩn hóa cho $a + b + c = 3$ khi đó ta sẽ chứng minh $\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2}$

Vế trái có dạng tổng hàm và bất đẳng thức có dấu bằng khi $a = b = c = 1$ nên ta tìm phương trình tiếp tuyến tại $x = 1$ của hàm số $f(x) = \frac{x}{3-x}$.

Tiếp tuyến có dạng $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{3x - 1}{4}$

Do vậy ta sẽ chứng minh $\frac{x}{3-x} \geq \frac{3x-1}{4}$ với $0 < x < 3$

Giải.

Do tính thuần nhất của ba biến a, b, c nên không mất tính tổng quát giả sử $a + b + c = 3$ khi đó bất đẳng thức trở thành $\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2}$

Ta chứng minh $\frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4}$

Có $\frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4} \Leftrightarrow 4a \geq -3a^2 + 10a - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3(a-1)^2 \geq 0$

Tương tự ta có $\frac{b}{3-b} \geq \frac{3b-1}{4}$; $\frac{c}{3-c} \geq \frac{3c-1}{4}$

$\Rightarrow \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3a-1+3b-1+3c-1}{4} = \frac{3}{2}$

Dấu "=" khi $a = b = c = 1$

Bài toán 2. Cho $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$$

Bất đẳng thức có dấu bằng tại $a = b = c = \frac{1}{3}$ nên ta viết phương trình tiếp tuyến

tại $x = \frac{1}{3}$ của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Tiếp tuyến có phương trình: $y = f'(\frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3}) = \frac{36x + 3}{50}$

Lời giải: Ta chứng minh: $\frac{a}{a^2 + 1} \leq \frac{36a + 3}{50}$

Thật vậy

$$\frac{a}{a^2 + 1} \leq \frac{36a + 3}{50} \Leftrightarrow 36a^3 + 3a^2 - 14a + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (4a + 3)(3a - 1)^2 \geq 0 \quad \forall a \geq -\frac{3}{4}$$

Tương tự ta chứng minh được $\frac{b}{b^2 + 1} \leq \frac{36b + 3}{50}; \quad \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{36c + 3}{50}$

$$\text{Cộng các vế có } \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{36a + 3 + 36b + 3 + 36c + 3}{50} = \frac{9}{10}$$

Dấu "=" khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài toán 3. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức. $P = (a + b + c) \left(\frac{3a - b}{a^2 + ab} + \frac{3b - c}{b^2 + bc} + \frac{3c - a}{c^2 + ca} \right)$

(Khảo sát chất lượng lớp 12 THPT năm học 2015 – 2016)

Lời giải

Đây là bất đẳng thức thuần nhất với cả ba biến a, b, c nên ta có thể chuẩn hóa $a + b + c = 1$

$$\Rightarrow P = \frac{3a - b}{a^2 + ab} + \frac{3b - c}{b^2 + bc} + \frac{3c - a}{c^2 + ca} = \frac{4a - (a + b)}{a(a + b)} + \frac{4b - (b + c)}{b(b + c)} + \frac{4c - (c + a)}{c(c + a)}$$

$$P = \frac{4}{a + b} - \frac{1}{a} + \frac{4}{b + c} - \frac{1}{b} + \frac{4}{c + a} - \frac{1}{c} = \frac{4}{1 - c} - \frac{1}{a} + \frac{4}{1 - a} - \frac{1}{b} + \frac{4}{1 - b} - \frac{1}{c}$$

$$P = \frac{5a - 1}{a - a^2} + \frac{5b - 1}{b - b^2} + \frac{5c - 1}{c - c^2}$$

Do a, b, c là ba cạnh của tam giác nên $b + c > a \Leftrightarrow 1 - a > a \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$

Vậy $a \in (0; 1)$ tương tự ta có $b, c \in (0; 1)$

Xét hàm số $f(x) = \frac{5x - 1}{x - x^2} \quad \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ phương trình tiếp tuyến của đồ thị

hàm số $f(x)$ tại điểm $x = \frac{1}{3}$ là $y = f'(x) \left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 18x - 3$

Do vậy ta sẽ chứng minh $\frac{5a - 1}{a - a^2} \leq 18a - 3 \quad \forall a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Thật vậy có

$$\frac{5a-1}{a-a^2} \leq 18a-3 \Leftrightarrow \frac{18a^3-21a^2+8a-1}{a-a^2} \leq \frac{(3a-1)^2(2a-1)}{a(1-a)} \leq 0 \quad \forall a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $\frac{5b-1}{b-b^2} \leq 18b-3$; $\frac{5c-1}{c-c^2} \leq 18c-3$

Ta có $P \leq 18a-3+18b-3+18c-3=18(a+b+c)-9=9$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

2.3.6 Một số bài tập vận dụng

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn

$$3(a+b+c)^2 = 12 + 5(ab+bc+ca).$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} + ab+bc+ca$$

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=\sqrt{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$B = 2015 - 2(ab+bc+ca)^3 + 27a^2b^2c^2 - 3(a+b+c)^2 + 12(ab+bc+ca)$$

Bài 3. Cho các số thực $x, y, z \in [0; 2]$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + xy + yz + zx$

Bài 4. Cho a, b, c là ba số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$C = \frac{2}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Bài 5. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của $P = \frac{a\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}+b} + \frac{b\sqrt{b}}{b+\sqrt{bc}+c} + \frac{c\sqrt{c}}{c+\sqrt{ca}+a} + \frac{1}{27\sqrt{abc}}$

Bài 6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức $A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} + \frac{121}{14(ab+bc+ca)}$

Bài 7. Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn: $x+y=2$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức $P = \frac{1}{xy+1} + xy$

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + 9}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{b^2 + 9}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{c^2 + 9}{2c^2 + (a + b)^2} \leq 5$$

Bài 9. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c > 0$. Chứng minh

$$\text{rằng } \left(\frac{a}{a+2}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+2}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+2}\right)^3 + \left(\frac{d}{d+2}\right)^3 \geq \frac{4}{27}$$

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = \frac{1}{6}$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức: } E = \frac{a^2}{(1+a)^2} + \frac{4b^2}{(1+2b)^2} + \frac{36c^3}{(1+3c)^3}$$

2.4 Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm.

Đề tài của tôi đã được kiểm nghiệm trong các năm học giảng dạy lớp 12, được học sinh đồng tình và đạt được kết quả, nâng cao khả năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức. Các em hứng thú học tập hơn, những em học sinh với mức học trung bình, đã có kỹ năng giải dạng bài tập này. Số học sinh tham gia giải dạng này tăng rõ rệt. Cụ thể ở các lớp khối 12 sau khi áp dụng sáng kiến này vào giảng dạy thì kết quả qua các bài kiểm tra thử như sau :

Kết quả bài kiểm tra thử ở các lớp 12 - Trường THPT Nông Cống III

Năm học	Lớp	Tổng số	Điểm 8 trở lên		Điểm từ 5 đến 8		Điểm dưới 5	
			Số lượng	Tỷ lệ	Số lượng	Tỷ lệ	Số lượng	Tỷ lệ
2015- 2016	12B 1	47	35	74.5%	7	14.9%	5	10.6%
	12B3	42	15	35,7%	20	47.6%	7	16.7%

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

I. Kết luận:

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức ba biến là một phần khó, nhưng hấp dẫn đối với cả Giáo viên và Học sinh, việc giảng dạy để làm sao các em học tốt phần này luôn là một trăn trở của các thầy cô giáo.

Phương pháp hàm số không phải sẽ giải được tất cả các bài toán dạng này, nhưng nó đang tỏ ra là một phương pháp hiệu quả khi giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức ba biến. Khi dạy chuyên đề này, giáo viên nên bắt đầu từ những ví dụ dễ, một cách chậm rãi làm cho học sinh hiểu rõ từng bài giải, nắm được tư tưởng giải dạng toán, không nên vội đưa học sinh vào các bài tập khó, vận dụng nhiều bất đẳng thức. Vì vậy khi thực hiện chuyên đề này tôi nhận thấy các em rất chú ý tiếp thu và bước đầu đã giải được một số bài toán.

Trên đây là một con đường giúp học sinh học tốt phần Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất mà tôi đã đúc rút được trong suốt quá trình giảng dạy.

Mặc dù đã cố gắng tìm tòi, nghiên cứu song chắc chắn còn có nhiều thiếu sót và hạn chế. Tôi rất mong được sự quan tâm của tất cả các đồng nghiệp bổ sung và góp ý cho tôi. Tôi xin chân thành cảm ơn.

II. Kiến nghị và đề xuất:

- Đề nghị các cấp lãnh đạo tạo điều kiện giúp đỡ học sinh và giáo viên có nhiều hơn nữa tài liệu sách tham khảo đổi mới và phòng thư viện để nghiên cứu học tập nâng cao kiến thức chuyên môn nghiệp vụ .

- Nhà trường cần tổ chức các bồi trao đổi phương pháp giảng dạy. Có tủ sách lưu lại các tài liệu chuyên đề bồi dưỡng ôn tập của giáo viên hàng năm để làm cơ sở nghiên cứu phát triển chuyên đề.

- Học sinh cần tăng cường học tập trao đổi, học nhóm nâng cao chất lượng học tập.

Tài Liệu tham khảo

- [1] Đoàn Quỳnh – Nguyễn Huy Đoan – Trần Phương Dung – Nguyễn Xuân Liêm – Đặng Hùng Thắng, *Giải tích 12 nâng cao*, NXBGD Việt Nam, 2010
- [2] Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên) – Trần Phương Dung – Nguyễn Xuân Liêm – Phạm Thị Bạch Ngọc – Đoàn Quỳnh – Đặng Hùng Thắng, *Bài tập Giải tích 12 nâng cao*, NXBGD Việt nam 2010.
- [3] Đoàn Quỳnh – Trần Nam Dũng – Hà Huy Khoái – Đặng Hùng Thắng – Nguyễn Trọng Huân, *Tài liệu chuyên Toán Giải tích 12*, NXBGD Việt Nam, 2012.
- [4] Đoàn Quỳnh – Trần Nam Dũng – Hà Huy Khoái – Đặng Hùng Thắng – Nguyễn Trọng Huân, *Bài tập Tài liệu chuyên Toán Giải tích 12*, NXBGD Việt Nam, 2012.
- [5] Lê Xuân Sơn – Lê Khánh Hưng, *Phương pháp Hàm số trong giải toán*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2014.
- [6] Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh, *Sử Dụng AM – GM để chứng minh Bất đẳng thức*, NXB Đại học Sư phạm, 2011.
- [7] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
- [8] Đề thi tuyển sinh và đề thi THPT Quốc Gia các năm vừa qua.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ Thanh Hóa, ngày 10 tháng 5 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình viết, không sao chép nội dung
của người khác.

Nguyễn Lê Minh