Người làm: Nguyễn Thị Nguyện
Zalo: : Nguyễn Thị Nguyện - số đt zalo: 0328167179
Email: nguyenkiendungchi@gmail.com

CĐ10: CHỨNG MINH BDT VÀ TÌM GTLN,GTNN

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất,giá trị nhỏ nhất

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1: (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023)

a) Cho biểu thức $A=-16-|3x-18|-|y-11|$. Tìm x,y để A đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

b) Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Lời giải

a) Ta có: $A=-16-|3x-18|-|y-11|$

Vì $\begin{cases}|3x-18|\geq 0\\ |y-11|\geq 0\end{cases}\Rightarrow -|3x-18|-|y-11|\leq 0$

$A=-16-|3x-18|-|y-11|\leq -16$

Giá trị lớn nhất của A là -16 khi và chỉ khi

$$\Rightarrow -|3x-18|-|y-11|=0\Rightarrow\begin{cases}|3x-18|=0\\ |y-11|=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=18\\ y=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{18}{3}\\ y=11\end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là -16 khi và chỉ khi $\begin{cases}x=\frac{18}{3}\\ y=11\end{cases}$.

Câu 2: (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{|x-2022|-|x-2023|+|x-2024|+2022}{|x-2022|+|x-2023|+|x-2024|}$

Lời giải

$$P=\frac{|x-2022|+|x-2023|+|x-2024|+2022-2|x-2023|}{|x-2022|+|x-2023|+|x-2024|}$$

$$P=1+\frac{2022-2|x-2023|}{|x-2022|+|x-2023|+|x-2024|}$$

$|x-2023|\geq 0\Rightarrow 2022-2|x-2023|\leq 2022$

$|x-2022|+|x-2023|+|x-2024|=|x-2022|+|2024-x|+|x-2023|$

$\geq |x-2022+2024-x|+|x-2023|=2+|x-2023|\geq 2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|x-2022|+|x-2023|+|x-2024|}\leq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{2022-2|x-2023|}{|x-2022|+|x-2023|+|x-2024|}\leq \dfrac{2022}{2}$

$P=1+\dfrac{2022-2|x-2023|}{|x-2022|+|x-2023|+|x-2024|}\leq 1+\dfrac{2022}{2}=1012$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x-2023=0 \\ (x-2022)(2024-x)\geq 0 \end{cases}\Rightarrow x=2023$.

Câu 3: **(HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)**

Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=6109$ và $0\leq z\leq y+4\leq x+19$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x-2$.

(HSG 7 huyện, Tam Nông 2022 - 2023)

Lời giải

Ta có $0\leq z\leq y+4\leq x+19$ nên $z\leq x+19$ và $y\leq x+15$

Suy ra $x+y+z\leq x+x+15+x+19$

$\Rightarrow 6019\leq 3x+34 \Rightarrow 3x\geq 5985 \Rightarrow x\geq 1995$

Do đó $P=x-2\geq 1995-2=1993$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1995$, $y=1995+15=2010$, $z=1995+19=2014$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=x-2$ là 1993 khi $x=1995$, $y=2010$, $z=2014$

Câu 4: **(HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{|x-2020|+|x-2021|+2022}{|x-2020|+|x-2021|+2023}$

Lời giải

$$A=\frac{|x-2020|+|x-2021|+2022}{|x-2020|+|x-2021|+2023}=\frac{|x-2020|+|x-2021|+2023-1}{|x-2020|+|x-2021|+2023}$$

Ta có

$=1-\dfrac{1}{|x-2020|+|x-2021|+2023}$

Khi đó A nhỏ nhất khi $\dfrac{1}{|x-2020|+|x-2021|+2023}$ lớn nhất

$\Rightarrow |x-2020|+|x-2021|+2023$ nhỏ nhất

Ta có:

$|x-2020|+|x-2021|+2023=|x-2020|+|2021-x|+2023\geq |x-2020+2021-x|+2023\geq 2024$

Dấu " = " xảy ra $(x-2020)(x-2021)\geq 0 \Leftrightarrow 2020\leq x\leq 2021$

Vậy $MinA = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024} \Leftrightarrow 2020 \le x \le 2021$

Câu 5: **(HSG 7 trường Nguyệt Ấn- TP Vinh 2022 - 2023)**

Cho x, y là các số nguyên dương thoả mãn: $\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2023}{2022}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của x.

Lời giải

Ta có:

$\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2023}{2022} \Rightarrow 1 + \frac{y}{x+y} = 1 + \frac{1}{2022} \Rightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2022} \Rightarrow 2022y = x + y \Rightarrow x = 2021y$

Vì y là số nguyên dương nên $2021y \ge 2021 \Rightarrow x \ge 2021$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của x bằng 2021, đạt tại $y = 1$

Câu 6: **(HSG 7 huyện Vũ Thư 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D = \sqrt{(2x+1)^2 + 4} + 3\left|4y^2 - 1\right| + 5$

Lời giải

$(2x+1)^2 \ge 0 \forall x \Rightarrow (2x+1)^2 + 4 \ge 4 \forall x \Rightarrow \sqrt{(2x+1)^2 + 4} \ge \sqrt{4} = 2 \forall x$

$\left|4y^2 - 1\right| \ge 0 \ \forall y \Rightarrow 3\left|4y^2 - 1\right| \ge 0 \ \forall y$

$\Rightarrow \sqrt{(2x+1)^2 + 4} + \left|4y^2 - 1\right| + 5 \ge 2 + 0 + 5 = 7 \ \forall x, y$

$\Rightarrow D \ge 7 \Rightarrow D_{\min} = 7$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{-1}{2}$; $4y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2}$

Vậy $D_{\min} = 7$ tại $x = \frac{-1}{2}, y = \pm\frac{1}{2}$.

Câu 7: **(HSG 7 thị xã Bình Long 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x - 2| + |2x - 2023|$ với x là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $A = |2x - 2| + |2x - 2023| = |2 - 2x| + |2x - 2023| \ge |2 - 2x + 2x - 2023| = 2021$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(2 - 2x).(2x - 2023) \ge 0 \Rightarrow 1 \le x \le \frac{2023}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = 2021$ khi $1 \le x \le \frac{2023}{2}$.

Câu 8: **(HSG 7 Khảo sát mũi nhọn 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x - 2021| + |x - 2022| + |x - 2023|$

Lời giải

$A=|x-2021|+|x-2022|+|x-2023|$

$=|x-2021|+|2023-x|+|x-2022|$

$A\geq|x-2021+2023-x|+|x-2022|$

$A\geq 2+|x-2022|\geq 2$

$A=2\Leftrightarrow\begin{cases}x-2021\geq 0\\x-2023\geq 0\\x-2022=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2022$

Vậy GTNN của $A=2$ khi $x=2022$.

Câu 9: **(HSG 7 huyện Krông Ana 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|x-2|+|2x-3|+|3x-4|$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức : $|a|+|b|\geq|a+b|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a.b\geq 0$ ta có:

$|x-2|+|3x-4|=|x-2|+|4-3x|\geq|x-2+4-3x|$

$\Rightarrow|x-2|+|3x-4|=|x-2|+|4-3x|\geq|2-2x|$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x-2).(4-3x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{4}{3}\leq x\leq 2$ (1)

Suy ra: $A=|x-2|+|2x-3|+|3x-4|\geq|2x-3|+|2-2x|\geq|2x-3+2-2x|\Rightarrow A\geq 1$ (2).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(2x-3).(2-2x)\geq 0\Leftrightarrow 1\leq x\leq\frac{3}{2}$ (3)

Kết hợp (1), (2), (3) ta được: $A\geq 1\Leftrightarrow 1\leq x\leq\frac{3}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 1 khi và chỉ khi $1\leq x\leq\frac{3}{2}$

Câu 10: **(HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)**

Tìm GTLN của biểu thức sau : D = $\frac{4}{(2x-3)^2+5}$.

Lời giải

Ta có $D=\frac{4}{(2x-3)^2+5}$ đạt GTLN khi $(2x-3)^2+5$ đạt GTNN

Mà $(2x-3)^2\geq 0\Rightarrow(2x-3)^2+5\geq 5$

$(2x-3)^2+5$ đạt giá trị nhỏ nhất là 5 khi $2x-3=0\Rightarrow 2x=3\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

Vậy D đạt giá trị lớn nhất là bằng $\frac{4}{5}$ khi $x=\frac{3}{2}$

Câu 11: **(HSG 7 TP Ninh Bình 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D=|x-2022|+|x-2023|$

Lời giải

$D=|x-2022|+|x-2023|$

$\Rightarrow D=|x-2022|+|2023-x|\ge|x-2022+2023-x|$

$\Rightarrow D\ge 1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x-2022)(2023-x)\ge 0 \Leftrightarrow 2022\le x\le 2023$

Vậy GTNN của D bằng 1 khi $2022\le x\le 2023$

Câu 12: **(HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)**

Tìm số nguyên dương n để biểu thức $P=\dfrac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có: $P=\dfrac{7n-8}{2n-3}=\dfrac{\frac{7}{2}(2n-3)+\frac{5}{2}}{2n-3}=\dfrac{7}{2}+\dfrac{5}{2(2n-3)}$

P lớn nhất $\Rightarrow \dfrac{5}{2(2n-3)}$ lớn nhất $\Rightarrow 2(2n-3)$ là số dương nhỏ nhất.

Mặt khác, n là số nguyên dương nên $2n-3$ là số nguyên dương nhỏ nhất và bằng 1 khi $n=2$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{7}{2}+\dfrac{5}{2}=6$ khi $n=2$.

Câu 13: **(HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)**

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{2(x-1)^2+4(2x+y-1)^2+19}{(x-1)^2+2(2x+y-1)^2+4}$

Lời giải

$$A=\frac{2(x-1)^2+4(2x+y-1)^2+19}{(x-1)^2+2(2x+y-1)^2+4}=\frac{2\left[(x-1)^2+2(2x+y-1)^2+4\right]+11}{(x-1)^2+2(2x+y-1)^2+4}$$

$$=2+\frac{11}{(x-1)^2+2(2x+y-1)^2+4}$$

Vì $(x-1)^2\ge 0;2(2x+y-1)^2\ge 0\Rightarrow (x-1)^2+2(2x+y-1)^2+4\ge 4$

$$\Rightarrow \frac{11}{(x-1)^2+2(2x+y-1)^2+4}\le\frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow 2+\frac{11}{(x-1)^2+2(2x+y-1)^2+4}\le\frac{19}{4}$$

$$\Rightarrow A\le\frac{19}{4}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=0\\2x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

Vậy Max $A=\dfrac{19}{4}\Leftrightarrow (x;y)=(1;-1)$

Câu 14: **(HSG 7 huyện Nho Quan, Ninh Bình 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|x-2021|+|x-2023|+|x-2025|$.

Lời giải

Ta có: $|x-2021|+|x-2025|=|x-2021|+|2025-x|\geq|x-2021+2025-x|=4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2021\leq x\leq 2025$. (1)

Mặt khác: $|x-2023|\geq 0$, dấu "=" xảy ra khi $x=2023$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P=|x-2021|+|x-2023|+|x-2025|\geq 4$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}2021\leq x\leq 2025\\ x=2023\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi $x=2023$.

Câu 15: **(HSG 7 huyện Thiệu hóa ,tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)**

Với a và b là các số thực, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3a^2+b^2+3ab+3a+2b+3$.

Lời giải

Ta có $P=3a^2+b^2+3ab+3a+2b+3$.

$=a^2+\left(a^2+b^2+1+2ab+2a+2b\right)+a\left(a+b+1\right)+2$

$=a^2+\left(a+b+1\right)^2+a\left(a+b+1\right)+2$

$=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a+b+1\right)^2+a\left(a+b+1\right)+\frac{3a^2}{4}+2$

$=\left(\frac{3}{2}a+b+1\right)^2+\frac{3a^2}{4}+2$

Do đó $P\geq 2$ vì $\left(\frac{3}{2}a+b+1\right)^2\geq 0$ và $\frac{3a^2}{4}>0$

Vậy GTNN của P là 2 khi $a=0;b=-1$

Câu 16: **(HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)**

Cho a,b,c là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn: $\frac{95}{24}<\frac{a+1}{a}+\frac{b+1}{b}+\frac{c+1}{c}<4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P=a+b+c+2011$.

Lời giải

P nhỏ nhất khi a,b,c nhỏ nhất và thỏa mãn điều kiện bài toán.

$\frac{95}{24}<\frac{a+1}{a}+\frac{b+1}{b}+\frac{c+1}{c}<4$

$\frac{95}{24}<1+\frac{1}{a}+1+\frac{1}{b}+1+\frac{1}{c}<4$

$\frac{23}{24}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$ (*)

a, b, c có vai trò như nhau, giả sử $a\geq b\geq c$ $\Rightarrow\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}$.

$\frac{23}{24}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{3}{c}\Rightarrow\frac{23}{24}<\frac{3}{c}\Rightarrow c<3\frac{3}{23}$

Từ $(*)$ $\Rightarrow\frac{1}{c}<1\Rightarrow c>1$

Do đó $1<c<3\frac{3}{23}$ mà c là số tự nhiên $\Rightarrow c=2;c=3$.

TH1: Nếu $c=2$ thì $\frac{11}{24}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$.

$\frac{11}{24}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{2}{b}\Rightarrow\frac{11}{24}<\frac{2}{b}\Rightarrow b<4\frac{4}{11}$

$\frac{1}{b}<\frac{1}{2}\Rightarrow b>2\Rightarrow 4\frac{4}{11}>b>2$

Do b là số tự nhiên nên $\Rightarrow b=3$; $b=4$.

Với $b=3$ thì $\frac{1}{8}<\frac{1}{a}<\frac{1}{6}\Rightarrow 8>a>6$

Do a là số tự nhiên nên $a=7$.

Ta được $a=7; b=3$; $c=2$ thỏa mãn $(*)$ và $a\ge b\ge c$

Với $b=4$ thì $\frac{5}{24}<\frac{1}{a}<\frac{1}{4}\Rightarrow 4\frac{4}{5}>a>4$

Do a là số tự nhiên nên không có giá trị thỏa mãn.

TH2: Nếu $c=3$ thì $\frac{5}{8}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{2}{3}$.

$\frac{1}{b}<\frac{2}{3}\Rightarrow b>1\frac{1}{2}$

$\frac{5}{8}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{2}{b}\Rightarrow\frac{5}{8}<\frac{2}{b}\Rightarrow b<3\frac{1}{5}\Rightarrow 3\frac{1}{5}>b>1\frac{1}{2}$

Do b là số tự nhiên nên $b=2; b=3$.

* Nếu $b=2$ thì $\frac{1}{8}<\frac{1}{a}<\frac{1}{6}\Rightarrow 8>a>6$ mà a là số tự nhiên nên $a=7$.

Ta được $a=7; b=2$; $c=3$ (không thỏa mãn $a\ge b\ge c$)

* Nếu $b=3$ thì $\frac{7}{24}<\frac{1}{a}<\frac{1}{3}\Rightarrow 4\frac{3}{7}>a>3$ mà a là số tự nhiên nên $a=4$.

Ta được $a=4$; $b=3$; $c=2$ không thỏa mãn $(*)$.

Từ các trường hợp trên ta thấy P đạt giá trị nhỏ nhất là $P=a+b+c+2011=2023$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $P=2023$ khi $a=7; b=3$; $c=2$ và các hoán vị của nó.

Câu 17: **(HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)**

Tìm GTLN của biểu thức $B=\frac{2020}{5+(2x-3y)^2+|xy-24|}$

Lời giải

Vì $(2x-3y)^2\ge 0;|xy-24|\ge 0\Rightarrow(2x-3y)^2+|xy-24|\ge 0$

$\Rightarrow 5+(2x-3y)^2+|xy-24|\ge 5$

$\Rightarrow\frac{2020}{5+(2x-3y)^2+|xy-24|}\le\frac{2020}{5}=404$

$\Rightarrow B\le 404$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2x-3y=0 & (1)\\ xy-24=0 & (2)\end{cases}$

Từ $(1) \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$

Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 2k \end{cases}$

Mà $xy - 24 = 0 \Rightarrow 3k.2k - 24 = 0 \Rightarrow 6k^2 = 24 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases}$

Vậy $B_{max} = 404$ khi $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases}$

Câu 18: **(HSG 7 huyện Vũ Thư 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D = \sqrt{(2x+1)^2 + 4} + 3|4y^2 - 1| + 5$

Lời giải

$(2x+1)^2 \geq 0 \forall x \Leftrightarrow (2x+1)^2 + 4 \geq 4 \forall x \Rightarrow \sqrt{(2x+1)^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2 \forall x$

$|4y^2 - 1| \geq 0 \ \forall y \Rightarrow 3|4y^2 - 1| \geq 0 \ \forall y$

$\Rightarrow \sqrt{(2x+1)^2 + 4} + |4y^2 - 1| + 5 \geq 2 + 0 + 5 = 7 \forall x, y \Rightarrow D \geq 7 \Rightarrow D_{min} = 7$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{-1}{2}$; $4y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}$

Vậy $D_{min} = 7$ tại $x = \frac{-1}{2}, y = \pm\frac{1}{2}$

Dạng 2.1: Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1: **(HSG 7 trường Nguyệt Ấn, huyện Ngọc Lặc 2022 - 2023)**

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + ... + \frac{n^2 - 1}{n}$ không thể là một số nguyên.

Lời giải

Tổng S có $n - 1$ số hạng

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + ... + \frac{n^2 - 1}{n} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + ... + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$S = (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right) < n - 1 \quad (1)$$

Mặt khác: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow S > (n-1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = (n-2) + \frac{1}{n} > n-2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $n-2 < S < n-1$

Vậy S không phải là số nguyên

Câu 2: **(HSG 7 huyện Thiệu hóa, Thanh Hóa 2022 - 2023)**

Cho $C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2023^2}$. Chứng minh rằng $C < \frac{3}{4}$.

Lời giải

$C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2023^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + ... + \frac{1}{2023.2023}$

Ta có: $\begin{cases} \frac{1}{3.3} < \frac{1}{2.3} \\ \frac{1}{4.4} < \frac{1}{3.4} \\ .... \\ \frac{1}{2023.2023} < \frac{1}{2022.2023} \end{cases}$

Suy ra $C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{2022.2023}$

$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$

$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2023} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Vậy $C < \frac{3}{4}$

Câu 3: **(HSG 7 huyện Vũ Thư 2022 - 2023)**

Cho biết $a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; ...; a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a^2{}_3} + ... + \frac{1}{na^2} < 2$ với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1

Lời giải

Với mọi $k \geq 2$, ta có: $\frac{1}{k.a_k^2} < \frac{1}{k.a_{k-1}.a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$)

Ta có : $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}.a_k} = \frac{1}{k.a_{k-1}.a_k}$

Suy ra $\frac{1}{k.a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$

Cho $k = 2; 3; ...; n$ ta có: $\frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; ...; \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2}+...+\frac{1}{na_n^2}<\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_1}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+...+\frac{1}{na_n^2}<1+1=2$$

Dạng 2.2 :Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1: **(HSG 7 huyện Trực Ninh 2022 - 2023)**

Cho $A=4^{27}+4^{1000}+4^x$. Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho A là số chính phương.

Lời giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên x để A là số chính phương.

* Xét $x\ge 27$:

Ta có: $A=4^{27}+4^{1000}+4^x=4^{27}\left(1+4^{973}+4^{x-27}\right)$

$$=\left(2^2\right)^{27}\left[\left(2^{x-27}\right)^2+2.2^{x-27}.1+1+4^{973}-2.2^{x-27}\right]$$

$$=\left(2^2\right)^{27}\left[\left(2^{x-27}\right)^2+2^{x-27}+2^{x-27}+1+4^{973}-2.2^{x-27}\right]$$

$$=\left(2^2\right)^{27}\left[2^{x-27}\left(2^{x-27}+1\right)+\left(2^{x-27}+1\right)+4^{973}-2.2^{x-27}\right]$$

$$=\left(2^{27}\right)^2\left[\left(2^{x-27}+1\right)^2+4^{973}-2.2^{x-27}\right]$$

Ta có: $\left(2^{27}\right)^2$ là số chính phương.

Với $x\ge 27$ và $x\in\mathbb{N}$ thì $1+4^{973}+4^{x-27}\in\mathbb{N}$ nên để A là một số chính phương thì $B=\left(2^{x-27}+1\right)^2+4^{973}-2.2^{x-27}$ cũng là một số chính phương

$\Rightarrow B\ge 0$ mà $\left(2^{x-27}+1\right)^2\ge 0$ nên $4^{973}-2.2^{x-27}\ge 0$

$\Rightarrow 2^{1946}-2^{x-26}\ge 0$

$\Rightarrow x-26\le 1946$

$\Rightarrow x\le 1972$

Kết hợp với điều kiện ta có: $27\le x\le 1972$

Vì x là số tự nhiên lớn nhất nên $x=1972$.

Thay $x=1972$ vào A ta được $A=\left[2^{27}.\left(2^{1945}+1\right)\right]^2$ là số chính phương (1)

* Xét $0\le x<27$:

Giả sử tồn tại x thỏa mãn $0\le x<27$ để A là số chính phương

$A=4^{27}+4^{1000}+4^x=4^x\left(4^{27-x}+4^{1000-x}+1\right)$

$$=\left(2^2\right)^x\left[\left(2^{27-x}\right)^2+2.2^{27-x}.1+1+\left(2^2\right)^{1000-x}-2.2^{27-x}\right]$$

$$=\left(2^x\right)^2\left[\left(2^{27-x}\right)^2+2^{27-x}+2^{27-x}+1+2^{2000-2x}-2^{28-x}\right]$$

$$=\left(2^x\right)^2\left[\left(2^{27-x}+1\right)^2+\left(2^{2000-2x}-2^{28-x}\right)\right]$$

Ta có: $\left(2^x\right)^2$ là số chính phương.

Với $0\le x<27$ và $x\in\mathbb{N}$ thì $4^{27-x}+4^{1000-x}+1\in\mathbb{N}$

Nên để A là một số chính phương thì $C=\left(2^{27-x}+1\right)^2+2^{2000-2x}-2^{28-x}$ cũng là một số chính phương $\Rightarrow C\ge 0$ mà $\left(2^{27-x}+1\right)^2\ge 0$

nên $\Rightarrow 2^{2000-2x}-2^{28-x}\ge 0\Rightarrow 2000-2x\ge 28-x\Rightarrow x\le 1972$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x=1972$ là số lớn nhất để A là số chính phương.

Câu 2: **(HSG 7 TP Thanh Hóa 2022 - 2023)**

Gọi $a;b$ là hai giá trị tương ứng của $x;y$ để biểu thức $A=x^2+4x+y^2-4y+100$ đạt giá trị nhỏ nhất. Chứng minh rằng: $(a+b)^{2023}=a^{2023}+b^{2023}$

Lời giải

Ta có: $A=x^2+4x+y^2-4y+100$

$=\left(x^2+4x+4\right)+\left(y^2-4y+4\right)+92$

$=(x+2)^2+(y-2)^2+92$

Vì $(x+2)^2\ge 0;\ (y-2)^2\ge 0\Rightarrow (x+2)^2+(y-2)^2+92\ge 92,\ \forall x,y$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x+2=0$ và $y-2=0\Rightarrow x=-2$ và $y=2$

A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 92 khi $x=-2$; $y=2$ suy ra $a=-2$; $b=2$

+) Thay $a=-2;b=2$ vào vế trái của $(a+b)^{2023}=a^{2023}+b^{2023}$

Ta được: $(-2+2)^{2023}=0^{2023}=0$ (1)

+) Thay $a=-2;b=2$ vào vế phải của $(a+b)^{2023}=a^{2023}+b^{2023}$

Ta được: $(-2)^{2023}+2^{2023}=-2^{2023}+2^{2023}=0$ (2)

Dạng 2.3 :Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Dạng 3 : Bất đẳng thức dạng chữ

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1: **(HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023)**

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3.$$

Lời giải

Đặt $x=b+c-a$; $y=a+c-b$; $z=a+b-c$ ta có: $a=\frac{z+y}{2};b=\frac{x+z}{2};c=\frac{y+x}{2}$

Do đó:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}=\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq\frac{1}{2}(2+2+2)=3$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$.

Câu 2: **(HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)**

Cho ba số a,b,c thỏa mãn: $0\leq a\leq b\leq c\leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\leq 2$.

Lời giải

Ta có: $0\leq a\leq b\leq c\leq 1\Rightarrow(1-a)(1-b)\geq 0\Leftrightarrow 1+ab>a+b$. (1)

Ta lại có: $0\leq a\leq b\leq c\leq 1\Rightarrow 1\geq c$ và $ab\geq 0$. (2)

Cộng từng vế với vế của (1) và (2) ta được:

$1+ab+a+ab\geq a+b+c\Leftrightarrow 2(a+ab)\geq a+b+c$.

nên $\frac{c}{ab+1}=\frac{2c}{2(ab+1)}\leq\frac{2c}{a+b+c}$.

Tương tự ta có: $\frac{b}{ac+1}\leq\frac{2b}{a+b+c}$; $\frac{a}{bc+1}\leq\frac{2a}{a+b+c}$.

Suy ra: $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\leq\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=2$.