

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán (chuyên)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Khóa thi ngày: 06-08/6/2023

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{5x+15\sqrt{x}}{x-9} + \frac{3(x+4\sqrt{x}+3)}{x+5\sqrt{x}+6} - \frac{15}{x-\sqrt{x}-6}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các số nguyên x để $\frac{A}{4}$ là số nguyên.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số hàng đơn vị bằng tổng các nghịch đảo của các chữ số hàng nghìn, hàng trăm và hàng chục.

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x + 1$. Đường thẳng (d'): $y = ax + b$ song song với đường thẳng (d) và cắt (P) tại hai điểm A, B. Biết điểm A có hoành độ bằng 2, tìm các hệ số a, b và tính diện tích tam giác OAB (với O là gốc tọa độ).

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x + 4 = 2(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3})$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5 \\ 2x - y + xy = 5 \end{cases}$.

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho hình bình hành ABCD (tam giác ABC nhọn). Gọi M là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC, E là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng AD.

a) Chứng minh tứ giác CDEH là hình thang cân.

b) Đường thẳng CM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K (K khác C).

Chứng minh $MH^2 = MK \cdot MC$ và $\widehat{KHM} = \widehat{KDA}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O), hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng BE, CF với đường tròn (O) (M khác B, N khác C). Đường thẳng MN lần lượt cắt hai đường thẳng BC, AC tại D, L.

a) Chứng minh $AH^2 = AL \cdot AC$.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. Chứng minh AI vuông góc với DH.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$ và biểu thức

$$T = \sqrt{x^2 + kyz} + \sqrt{y^2 + kzx} + \sqrt{z^2 + kxy} \quad (k \text{ là số thực không âm}).$$

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức T khi $k = 2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức T khi $k = 1$.

----- HẾT -----

* Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

* Họ và tên thí sinh: Số báo danh: