TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Nguyên hàm của hàm ẩn hoặc liên quan đến phương trình f(x),f'(x),f''(x)

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=[u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)\Leftrightarrow[u(x)f(x)]'=h(x)$

Suy ra $u(x)f(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta dược $e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)$

Suy ra $e^x\cdot f(x)=\int e^x\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)-f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta dược $e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=e^{-x}\cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x}\cdot f(x)=\int e^{-x}\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=h(x)$

(Phương trình vi phân tuyên tinh cấp 1)

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+p(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot f(x)=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\Leftrightarrow\left[f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\right]'=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra $f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta đựơc $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+p(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-p(x)$

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln|f(x)|=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot[f(x)]^n=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}+p(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}=-p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = -\int p(x)dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1. **(Mã 103 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$ **B.** $-\frac{1}{40}$ **C.** $-\frac{41}{400}$ **D.** $-\frac{1}{10}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$

Do $f(2) = -\frac{1}{25}$, nên ta có $C = -9$. Do đó $f(x) = -\frac{1}{x^4+9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$.

Câu 2. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x).e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(9;10)$. **C.** $(11;12)$. **D.** $(13;14)$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(0) = 2$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0;+\infty)$.

Từ giả thiết $(f'(x))^2 = f(x).e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f'(x) = \sqrt{f(x)}.e^{\frac{x}{2}}$, $\forall x \in [0;+\infty)$.

Do đó, $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $\forall x \in [0;+\infty)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C$, $\forall x \in [0;+\infty)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f(0) = 2$, ta được $C = \sqrt{2} - 1$.

Từ đó, tính được $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \approx 9{,}81$.

Câu 3. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=x^3f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int x^3dx\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x^4}{4}+C$.

Mà $f(2)=-\dfrac{4}{19}\Rightarrow\dfrac{19}{4}=\dfrac{16}{4}+C\Rightarrow C=\dfrac{3}{4}$. Suy ra $f(x)=-\dfrac{4}{x^4+3}$.

Vậy $f(1)=-1$.

Câu 4. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1)=-2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Biết $f(2)=a+b.\ln 3$ (a, $b\in\mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2+b^2)$ là

A. $\dfrac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Chia cả hai vế của biểu thức $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}.$$

Vậy $\dfrac{x}{x+1}.f(x)=\int\left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C$.

Do $f(1)=-2\ln 2$ nên ta có $\dfrac{1}{2}.f(1)=1-\ln 2+C\Leftrightarrow-\ln 2=1-\ln 2+C\Leftrightarrow C=-1$.

Khi đó $f(x)=\dfrac{x+1}{x}\left(x-\ln|x+1|-1\right)$.

Vậy ta có $f(2)=\dfrac{3}{2}(2-\ln 3-1)=\dfrac{3}{2}(1-\ln 3)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3\Rightarrow a=\dfrac{3}{2},\ b=-\dfrac{3}{2}$.

Suy ra $2(a^2+b^2)=2\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2\right]=9$.

Câu 5. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)<0,\forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x),\forall x>0$ và $f(1)=-\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1)+f(2)+...+f(2020)$ bằng

A. $-\dfrac{2020}{2021}$. **B.** $-\dfrac{2015}{2019}$. **C.** $-\dfrac{2019}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2016}{2021}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int (2x+1)\mathrm{d}x\Rightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=x^2+x+C$.

Mà $f(1)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{-1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$.

$$\begin{cases} f(1)=\dfrac{1}{2}-1 \\ f(2)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2} \\ f(3)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2020)=\dfrac{1}{2021}-\dfrac{1}{2020} \end{cases} \Rightarrow f(1)+f(2)+....+f(2020)=-1+\dfrac{1}{2021}=-\dfrac{2020}{2021}.$$

Câu 6. **(Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\dfrac{-3}{16}$. **B.** $T=\dfrac{21}{16}$. **C.** $T=\dfrac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$

$\Leftrightarrow f'(x)+\dfrac{x+2}{x(x+1)}f(x)=1\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1}f'(x)+\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x^2}{x+1}f(x)\right]'=\dfrac{x^2}{x+1}\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1}f(x)=\int \dfrac{x^2}{x+1}dx\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1}f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c\right)$.

Ta có $f(1)=2\ln 2+1\Leftrightarrow c=1$.

Từ đó $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+1\right)$, $f(2)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\ln 3$. Nên $\begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy $T=a^2-b=-\dfrac{3}{16}$.

Câu 7. **(THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018)** Cho hs $y=f(x)$ thỏa mãn $y'=xy^2$ và $f(-1)=1$ thì giá trị $f(2)$ là

A. e^2. **B.** $2e$. **C.** $e+1$. **D.** e^3.

Lời giải

Ta có $y'=xy^2\Rightarrow\dfrac{y'}{y}=x^2\Rightarrow\int\dfrac{y'}{y}\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln y=\dfrac{x^3}{3}+C\Leftrightarrow y=\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+C}$.

Theo giả thiết $f(-1)=1$ nên $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}+C}=1\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $y=f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}}$. Do đó $f(2)=\mathrm{e}^3$.

Câu 8. **(Sở Hà Nội Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ với mọi x và thỏa mãn $f(1)=-\dfrac{1}{2}, f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ .Biết $f(1)+f(2)+...+f(2019)=\dfrac{a}{b}-1$ với $a,b\in\mathbb{N},(a,b)=1$ .Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $a-b=2019$. **B.** $ab>2019$. **C.** $2a+b=2022$. **D.** $b\le 2020$.

Lời giải

$f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+1)dx$

$\Rightarrow\int\dfrac{d(f(x))}{f^2(x)}=\int(2x+1)dx$

$\Rightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=x^2+x+C$ (1) (Với C là hằng số thực).

Thay $x=1$ vào (1) được $2+C=-\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}$ $\Leftrightarrow C=0$ .Vậy $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$.

$T=f(1)+f(2)+...+f(2019)=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)+...+\left(\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2019}\right)=-1+\dfrac{1}{2020}$.

Suy ra: $\begin{cases}a=1\\b=2020\end{cases}\Rightarrow a-b=-2019$ (Chọn đáp số sai).

Câu 9. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f(4)$?

A. 24. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có: $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}f'(x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}x^2$.

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'=\dfrac{3}{2}x^2\Rightarrow\int\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'dx=\int\dfrac{3}{2}x^2dx$.

$\Rightarrow\sqrt{x}.f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+C$. $(*)$

Mà $f(1)=\dfrac{1}{2}$ nên từ $(*)$ có: $\sqrt{1}.f(1)=\dfrac{1}{2}.1^3+C\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{x}}{2}$.

Vậy $f(4)=\dfrac{4^2\sqrt{4}}{2}=16$.

Câu 10. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x+1}.f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)<2$ **B.** $2<f(x)<4$ **C.** $f(x)>6$ **D.** $4<f(x)<6$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)=2\sqrt{x+1}+C$

Mà $f(0)=1$ nên $C=-2\Rightarrow f(x)=e^{2\sqrt{x+1}-2}\Rightarrow f(3)=e^2>6$

Câu 11. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$. Biết $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3,\forall x\in[2;4], f(2)=\dfrac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\dfrac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\dfrac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[2;4]$ $\Rightarrow f(x)\ge f(2)$ mà $f(2)=\dfrac{7}{4}$. Do đó: $f(x)>0,\forall x\in[2;4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3\Leftrightarrow x^3\left[4f(x)+1\right]=\left[f'(x)\right]^3$

$\Leftrightarrow x.\sqrt[3]{4f(x)+1}=f'(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=x$.

Suy ra: $\int\dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\int\dfrac{\mathrm{d}\left[4f(x)+1\right]}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=\dfrac{x^2}{2}+C\Leftrightarrow\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{\left[4f(x)+1\right]^2}=\dfrac{x^2}{2}+C$.

$f(2)=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}=2+C\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy: $f(x)=\dfrac{\sqrt{\left[\dfrac{4}{3}\left(x^2-1\right)\right]^3}-1}{4}\Rightarrow f(4)=\dfrac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

A. $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. **B.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** e. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải

$f(x)+f'(x)=x$ (1).

Nhân 2 vế của (1) với e^x ta được $\mathrm{e}^x.f(x)+\mathrm{e}^x.f'(x)=x.\mathrm{e}^x$.

Hay $\left[\mathrm{e}^x.f(x)\right]'=x.\mathrm{e}^x\Rightarrow\mathrm{e}^x.f(x)=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Xét $I=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\Rightarrow\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\Rightarrow v=\mathrm{e}^x\end{cases}$.

$I=\int x.e^x dx = x.e^x-\int e^x dx = x.e^x-e^x+C$. Suy ra $e^x f(x)=x.e^x-e^x+C$.

Theo giả thiết $f(0)=1$ nên $C=2\Rightarrow f(x)=\dfrac{x.e^x-e^x+2}{e^x}\Rightarrow f(1)=\dfrac{2}{e}$.

Câu 13. **(THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

A. $f^2(2)=\sqrt{2\ln 2+2}$. **B.** $f^2(2)=2\ln 2+2$.

C. $f^2(2)=\ln 2+1$. **D.** $f^2(2)=\sqrt{\ln 2+1}$.

Lời giải

Ta có: $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right];\ x>0$

$\Leftrightarrow x^2.\left[f'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$

$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+\dfrac{1}{x^2}=1-f(x).f''(x)$

$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \left[f(x).f'(x)\right]'=1-\dfrac{1}{x^2}$

Do đó: $\int\left[f(x).f'(x)\right]'.dx=\int\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right).dx\Rightarrow f(x).f'(x)=x+\dfrac{1}{x}+c_1$.

Vì $f(1)=f'(1)=1\Rightarrow 1=2+c_1\Leftrightarrow c_1=-1$.

Nên $\int f(x).f'(x).dx=\int\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right).dx \Leftrightarrow \int f(x).d\left(f(x)\right)=\int\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right).dx$

$\Rightarrow \dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\ln x-x+c_2$. Vì $f(1)=1\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-1+c_2\Leftrightarrow c_2=1$.

Vậy $\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\ln x-x+1\Rightarrow f^2(2)=2\ln 2+2$.

Câu 14. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=x^3-2x,\quad \forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=1$. Tính giá trị của $T=f^2(2)$

A. $\dfrac{43}{30}$ **B.** $\dfrac{16}{15}$ **C.** $\dfrac{43}{15}$ **D.** $\dfrac{26}{15}$

Lời giải

Có $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=x^3-2x\Leftrightarrow (f(x).f'(x))'=x^3-2x$

$\Leftrightarrow f(x).f'(x)=\int(x^3-2x)dx=\dfrac{1}{4}x^4-x^2+C$

Từ $f(0)=f'(0)=1$. Suy ra $C=1$. Vậy $f(x).f'(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^2+1$

Tiếp, có $2f(x).f'(x)=\dfrac{1}{2}x^4-2x^2+2\Leftrightarrow (f^2(x))'=\dfrac{1}{2}x^4-2x^2+2$

$\Leftrightarrow f^2(x)=\int(\dfrac{1}{2}x^4-2x^2+2)dx=\dfrac{1}{10}x^5-\dfrac{2}{3}x^3+2x+C$

Từ $f(0)=1$. Suy ra $C=1$. Vậy $f^2(x)=\frac{1}{10}x^5-\frac{2}{3}x^3+2x+1$.

Do đó $T=\frac{43}{15}$

Câu 15. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A. $\frac{14}{9}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $\frac{7}{9}$ **D.** $-\frac{4}{9}$

Lời giải

Chọn D

$f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow \cos x.f(x)+\sin x.f'(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$.

$\Leftrightarrow \left[\sin x.f(x)\right]'=\frac{x}{\cos^2 x}$.

Do đó $\int\left[\sin x.f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \Rightarrow \sin x.f(x)=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

Tính $I=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}$. Khi đó

$I=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=x\tan x-\int\tan x\mathrm{d}x=x\tan x+\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x=x\tan x+\ln\left|\cos x\right|$.

Suy ra $f(x)=\frac{x.\tan x+\ln\left|\cos x\right|}{\sin x}=\frac{x}{\cos x}+\frac{\ln\left|\cos x\right|}{\sin x}$.

$a\pi\sqrt{3}+b\ln 3=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{5\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3$. Suy ra $\begin{cases}a=\frac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}$.

Vậy $P=a+b=-\frac{4}{9}$.

Câu 16. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$; $y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(3\right)=\frac{4}{9}$ và $\left[f'\left(x\right)\right]^2=\left(x+1\right).f\left(x\right)$. Tính $f\left(8\right)$.

A. $f\left(8\right)=49$. **B.** $f\left(8\right)=256$. **C.** $f\left(8\right)=\frac{1}{16}$. **D.** $f\left(8\right)=\frac{49}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có với $\forall x\in\left(0;+\infty\right)$ thì $y=f\left(x\right)>0$; $x+1>0$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ nên $f'\left(x\right)\geq 0,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

Do đó $\left[f'\left(x\right)\right]^2=\left(x+1\right)f\left(x\right)\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\sqrt{\left(x+1\right)f\left(x\right)}\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)}}=\sqrt{\left(x+1\right)}$.

Suy ra $\int\frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{\left(x+1\right)}\mathrm{d}x\Rightarrow\sqrt{f\left(x\right)}=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}+C$.

Vì $f\left(3\right)=\frac{4}{9}$ nên $C=\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-2$.

Suy ra $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}-2\right)^2$, suy ra $f\left(8\right)=49$.

Câu 17. Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(1\right)=2$ và $\left(x^2+1\right)^2f'\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2\left(x^2-1\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f\left(2\right)$ bằng

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $-\frac{2}{5}$ **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có: $f'\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2.\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}>0$ với mọi $x\in\left(1;2\right]$.

Do đó $f\left(x\right)\geq f\left(1\right)=1>0$ với mọi $x\in\left[1;2\right]$.

Xét với mọi $x\in\left[1;2\right]$ ta có:

$$\left(x^2+1\right)f'\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow\int\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow\int\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x\Rightarrow\int\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\Rightarrow-\frac{1}{f\left(x\right)}=-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+C.$$

Mà $f\left(1\right)=1\Rightarrow 1=1+C\Leftrightarrow C=0$. Vậy $f\left(x\right)=\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow f\left(2\right)=\frac{5}{2}$.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+1)f^2(x)=0$, $f(x)>0,\ \forall x>0$ và $f(2)=\dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P=f(1)+f(2)+...+f(2019)$.

A. $\dfrac{2021}{2020}$. **B.** $\dfrac{2020}{2019}$. **C.** $\dfrac{2019}{2020}$. **D.** $\dfrac{2018}{2019}$.

Lời giải

TH1: $f(x)=0\Rightarrow f'(x)=0$ trái giả thiết.

TH2: $f(x)\neq 0\ \Rightarrow f'(x)=-(2x+1).f^2(x)\ \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-(2x+1).\Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int(2x+1)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)}=-\left(x^2+x+C\right)$.

Ta có: $f(2)=\dfrac{1}{6}\ \Rightarrow C=0\ \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+.....-\dfrac{1}{2020}=\dfrac{2019}{2020}$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

A. $2\sqrt[3]{42}$. **B.** $2\sqrt[3]{15}$. **C.** $\sqrt[3]{42}$. **D.** $\sqrt[3]{15}$.

Lời giải

Ta có: $\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2$ (*)

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$\displaystyle\int\left(f(x)\right)^2.f'(x)dx=\int\left(3x^2+4x+2\right)dx\Leftrightarrow\int\left(f(x)\right)^2d\left(f(x)\right)=x^3+2x^2+2x+C$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(f(x)\right)^3}{3}=x^3+2x^2+2x+C\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^3=3\left(x^3+2x^2+2x+C\right)$ (1)

Theo đề bài $f(0)=3$ nên từ (1) ta có $\left(f(0)\right)^3=3\left(0^3+2.0^2+2.0+C\right)\Leftrightarrow 27=3C\Leftrightarrow C=9$

$\Rightarrow\left(f(x)\right)^3=3\left(x^3+2x^2+2x+9\right)\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{3\left(x^3+2x^2+2x+9\right)}$.

Tiếp theo chúng ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$.

CÁCH 1:

Vì $x^3+2x^2+2x+9=x^2(x+2)+2(x+2)+5>0,\forall x\in[-2;1]$ nên $f(x)$ có đạo hàm trên $[-2;1]$

và $f'(x)=\dfrac{3\left(3x^2+4x+2\right)}{3\sqrt[3]{\left[3\left(x^3+2x^2+2x+9\right)\right]^2}}=\dfrac{3x^2+4x+2}{\sqrt[3]{\left[3\left(x^3+2x^2+2x+9\right)\right]^2}}>0,\ \forall x\in[-2;1]$.

$\Rightarrow$Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[-2;1]\Rightarrow \max\limits_{[-2;1]}f(x)=f(1)=\sqrt[3]{42}$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]}f(x)=f(1)=\sqrt[3]{42}$.

CÁCH 2:

$f\left(x\right)=\sqrt[3]{3\left(x^3+2x^2+2x+9\right)}=\sqrt[3]{3\left(x+\frac{2}{3}\right)^3+2\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{223}{9}}.$

Vì các hàm số $y=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^3$, $y=2\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{223}{9}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số

$y=\sqrt[3]{3\left(x+\frac{2}{3}\right)^3+2\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{223}{9}}$ cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[-2;1\right]$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f\left(x\right)=f\left(1\right)=\sqrt[3]{42}$.

Câu 20. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 15.

Lời giải

$f(x)-xf'(x)=-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow \frac{1.f(x)-x.f'(x)}{x^2}=\frac{-2x^3-3x^2}{x^2} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=2x+3$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g\left(x\right)=2x+3$.

Ta có $\int\left(2x+3\right)dx=x^2+3x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Do đó, $\frac{f(x)}{x}=x^2+3x+C_1$, (1) với $C_1\in\mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1)=4$ theo giả thiết, nên thay $x=1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1=0$, từ đó $f(x)=x^3+3x^2$. Vậy $f(2)=20$.

Câu 21. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên R thỏa mãn các điều kiện: $f\left(0\right)=2\sqrt{2}$, $f\left(x\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(x\right).f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)\sqrt{1+f^2\left(x\right)},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f\left(1\right)$ bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{23}$.

Lời giải

Ta có $f\left(x\right).f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)\sqrt{1+f^2\left(x\right)} \Leftrightarrow \frac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}=\left(2x+1\right)$.

Suy ra $\int\frac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\int\left(2x+1\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}\left(1+f^2\left(x\right)\right)}{2\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}=\int\left(2x+1\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2\left(x\right)}=x^2+x+C$.

Theo giả thiết $f\left(0\right)=2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=C \Leftrightarrow C=3$.

Với $C=3$ thì $\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=x^2+x+3 \Rightarrow f\left(x\right)=\sqrt{\left(x^2+x+3\right)^2-1}$. Vậy $f\left(1\right)=\sqrt{24}$.

Câu 22. **(Cần Thơ 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\left[f'\left(x\right)\right]^2+f\left(x\right).f''\left(x\right)=2x^2-x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=3$. Giá trị của $\left[f\left(1\right)\right]^2$ bằng

A. 28. **B.** 22. **C.** $\frac{19}{2}$. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $\left[f(x)f'(x)\right]'=\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $\left[f(x)f'(x)\right]'=2x^2-x+1$.

Suy ra $f(x)f'(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+C$. Hơn nữa $f(0)=f'(0)=3$ suy ra $C=9$.

Tương tự vì $\left[f^2(x)\right]'=2f(x)f'(x)$ nên $\left[f^2(x)\right]'=2\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+9\right)$. Suy ra

$f^2(x)=\int 2\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+9\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^4-\frac{x^3}{3}+x^2+18x+C$, cũng vì $f(0)=3$ suy ra

$f^2(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{x^3}{3}+x^2+18x+9$. Do đó $\left[f(1)\right]^2=28$.

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=\frac{\mathrm{e}}{3}$. **B.** $f(2)=\frac{\mathrm{e}}{6}$. **C.** $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{3}$. **D.** $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{6}$.

Lời giải

Ta có

$(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x \Leftrightarrow (x+1)f(x)+f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x$

$\Leftrightarrow \left[(x+1)f(x)\right]+\left[(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\left[(x+1)f(x)\right]+\mathrm{e}^x\left[(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^x(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow \int\left[\mathrm{e}^x(x+1)f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x(x+1)f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$

Mà $f(0)=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow C=0$. Vậy $f(x)=\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$

Khi đó $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{6}$.

Câu 24. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

Suy ra $\frac{x}{x+1}.f(x)=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|+C$.

Mặt khác, ta có $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1$. Do đó $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|-1$.

Với $x=2$ thì $\frac{2}{3}.f(2)=1-\ln 3 \Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\frac{9}{2}$.

Câu 25. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2<f(5)<3$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $3<f(5)<4$.

Lời giải

Ta có

$$f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C \Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$$

Mà $f(1)=1$ nên $e^{\frac{4}{3}+C}=1 \Leftrightarrow C=-\frac{4}{3}$. Suy ra $f(5)=e^{\frac{4}{3}}\approx 3,794$.

Câu 26. **(THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{a}{b}$ với $(a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=(2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$

$$\Leftrightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+3)\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C.$$

Vì $f(0)=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{1}{2020}-\frac{1}{2}=-\frac{1009}{2020}$.

Vậy $a=-1009$; $b=2020$. Do đó $b-a=3029$.

Câu 27. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$, $f'(x)=\frac{3x^4+x^2-1}{x^2}f^2(x)$ và $f(1)=-\frac{1}{3}$. Tính $f(1)+f(2)+...+f(80)$.

A. $-\dfrac{3240}{6481}$. **B.** $\dfrac{6480}{6481}$. **C.** $-\dfrac{6480}{6481}$. **D.** $\dfrac{3240}{6481}$.

Lời giải

$f'(x)=\dfrac{3x^4+x^2-1}{x^2}f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{3x^4+x^2-1}{x^2}$.

$\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{3x^4+x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\dfrac{\mathrm{d}(f(x))}{f^2(x)}=\int\dfrac{3x^4+x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\Leftrightarrow\int\dfrac{\mathrm{d}(f(x))}{f^2(x)}=\int\left(3x^2+1-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{-1}{f(x)}=x^3+x+\dfrac{1}{x}+C\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-1}{x^3+x+\dfrac{1}{x}}+C$.

Do $f(1)=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{-x}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{x^2-x+1}\right)$.

$f(1)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{1}\right)$; $f(2)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{3}\right)$; $f(3)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{7}\right)$;.;$f(80)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6481}-\dfrac{1}{6321}\right)$.

$f(1)+f(2)+...+f(80)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{6481}=-\dfrac{3240}{6481}$.

Câu 28. **(Sở Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2-f(x).f''(x)+[f'(x)]^2=0$. Biết $f(0)=1,f(2)=\mathrm{e}^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. **B.** e^3. **C.** $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$. **D.** e^2.

Lời giải

Theo đề bài, ta có $[f(x)]^2-f(x).f''(x)+[f'(x)]^2=0\Rightarrow\dfrac{f(x).f''(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}=1$

$\Rightarrow\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]'=1\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=x+C\Rightarrow\ln f(x)=\dfrac{x^2}{2}+C.x+D$

Mà $\begin{cases}f(0)=1\\f(2)=\mathrm{e}^6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=2\\D=0\end{cases}$. Suy ra : $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+2x}\Rightarrow f(1)=\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=\mathrm{e}^2$. **B.** $f(1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. **D.** $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$f'(x)+2x.f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\Leftrightarrow\mathrm{e}^{x^2}f'(x)+2x.\mathrm{e}^{x^2}.f(x)=1\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{x^2}.f(x)\right)'=1$.

Suy ra $\displaystyle\int\left(\mathrm{e}^{x^2}.f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x\Leftrightarrow\mathrm{e}^{x^2}.f(x)=x+C\Rightarrow f(x)=\dfrac{x+C}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

Vì $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\dfrac{x}{e^{x^2}}$. Vậy $f(1)=\dfrac{1}{e}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\dfrac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\dfrac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\dfrac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\dfrac{323}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f'(x).f(x)\mathrm{d}x=\int(x^4+x^2)\mathrm{d}x+C\Rightarrow\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}+C$.

Do $f(0)=2$ nên suy ra $C=2$.

Vậy $f^2(2)=2\left(\dfrac{32}{5}+\dfrac{8}{3}+2\right)=\dfrac{332}{15}$.

Câu 31. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-2)e^x+e^x+C$. **B.** $(x+2)e^{2x}+e^x+C$.

C. $(x-1)e^x+C$. **D.** $(x+1)e^x+C$.

Lời giải

Chọn D

$f(x)+f'(x)=e^{-x}\Leftrightarrow f(x)e^x+f'(x)e^x=1\Leftrightarrow\left(f(x)e^x\right)'=1\Leftrightarrow f(x)e^x=x+C'$.

Vì $f(0)=2$ nên $C'=2$. Do đó $f(x)e^{2x}=(x+2)e^x$. Vậy:

$\int f(x)e^{2x}\mathrm{d}x=\int(x+2)e^x\mathrm{d}x=\int(x+2)\mathrm{d}(e^x)=(x+2)e^x-\int e^x\mathrm{d}(x+2)=(x+2)e^x-\int e^x\mathrm{d}x=$

$=(x+2)e^x-e^x+C=(x+1)e^x+C$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x\ \ \forall x\in(0;+\infty)$, $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:

A. $\dfrac{25}{6}$. **B.** $\dfrac{25}{3}$. **C.** $\dfrac{17}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $2xf'(x)+f(x)=2x$ (1) trên $(0;+\infty)$: $(1)\Leftrightarrow f'(x)+\dfrac{1}{2x}\cdot f(x)=1$ (2).

Đặt $g(x)=\dfrac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln x+C=\ln\sqrt{x}+C$. Ta chọn $G(x)=\ln\sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)}=\sqrt{x}$, ta được: $\sqrt{x}\cdot f'(x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)=\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'=\sqrt{x}$ (3).

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được: $\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x}.f(x)\right)' \mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x}.f(x)\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4 \Rightarrow 2f(4) - f(1) = \frac{14}{3} \Rightarrow f(4) = \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}+1\right) = \frac{17}{6}$ (vì $f(1)=1$).

Vậy $f(4) = \frac{17}{6}$.

Câu 33. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6\left[f'(x)\right]^3 + 27\left[f(x)-1\right]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 7. **D.** -7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^6\left[f'(x)\right]^3 + 27\left[f(x)-1\right]^4 = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3\left(f(x)-1\right)\sqrt[3]{f(x)-1}} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]' = \frac{1}{x^2}$.

Do đó $\int \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]' \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$. Suy ra $\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} = -\frac{1}{x} + C$.

Có $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0$. Do đó $f(x) = 1 - x^3$.

Khi đó $f(2) = -7$.

Câu 34. **(Bến Tre 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $\left(f'(x)\right)^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, $\forall x \in \mathbb{R} : \left(f'(x)\right)^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$

$\Leftrightarrow f'(x).f'(x) + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$

$\Leftrightarrow \left[f(x).f'(x)\right]' = 15x^4 + 12x$

$\Leftrightarrow f(x).f'(x) = \int \left(15x^4 + 12x\right)\mathrm{d}x = 3x^5 + 6x^2 + C \quad (1)$.

Thay $x = 0$ vào (1), ta được: $f(0).f'(0) = C \Leftrightarrow C = 1$.

Khi đó, (1) trở thành: $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x).f'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(3x^5 + 6x^2 + 1\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}x^6 + 2x^3 + x\right)\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right]=\frac{7}{2} \Leftrightarrow f^2(1)-1=7 \Leftrightarrow f^2(1)=8$.

Vậy $f^2(1)=8$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1;+\infty)$ và thỏa mãn $\left(xf'(x)-2f(x)\right).\ln x=x^3-f(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$; biết $f\left(\sqrt[3]{e}\right)=3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12;\frac{25}{2}\right)$. **B.** $\left(13;\frac{27}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{23}{2};12\right)$. **D.** $\left(14;\frac{29}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\left(xf'(x)-2f(x)\right).\ln x=x^3-f(x)$ (1) trên khoảng $(1;+\infty)$:

$(1)\Leftrightarrow x\ln x.f'(x)+(1-2\ln x).f(x)=x^3 \Leftrightarrow f'(x)+\frac{1-2\ln x}{x\ln x}\cdot f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$ (2).

Đặt $g(x)=\frac{1-2\ln x}{x\ln x}$. Ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1-2\ln x}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-2\ln x}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\int\left(\frac{1}{\ln x}-2\right)\mathrm{d}(\ln x)$

$=\ln(\ln x)-2\ln x+C=\ln\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)+C$.

Ta chọn $G(x)=\ln\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)}=\frac{\ln x}{x^2}$, ta được: $\frac{\ln x}{x^2}\cdot f'(x)+\frac{1-2\ln x}{x^3}\cdot f(x)=1$

$\Leftrightarrow\left(\frac{\ln x}{x^2}\cdot f(x)\right)'=1\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x^2}\cdot f(x)=x+C$ (3).

Theo giả thiết, $f\left(\sqrt[3]{e}\right)=3e$ nên thay $x=\sqrt[3]{e}$ vào (3), ta được:

$\frac{\ln\left(\sqrt[3]{e}\right)}{\sqrt[3]{e^2}}.f\left(\sqrt[3]{e}\right)=\sqrt[3]{e}+C\Leftrightarrow C=\frac{1}{3\sqrt[3]{e^2}}\cdot 3e-\sqrt[3]{e}=0$.

Từ đây, ta tìm được $f(x)=\frac{x^3}{\ln x}\Rightarrow f(2)=\frac{2^3}{\ln 2}$.Vậy $f(2)\in\left(\frac{23}{2};12\right)$.

Câu 36. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$, tính tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{7}}x.f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{45}{8}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0\Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}=2x.e^{x^2+1}$

$\Rightarrow \int 3f^2(x).f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)}\mathrm{d}x = \int 2x.\mathrm{e}^{x^2+1}\mathrm{d}x \Rightarrow \int \mathrm{e}^{f^3(x)}\mathrm{d}\left(f^3(x)\right) = \int \mathrm{e}^{x^2+1}\mathrm{d}\left(x^2+1\right) \Rightarrow \mathrm{e}^{f^3(x)} = \mathrm{e}^{x^2+1} + C$.

Mặt khác, vì $f(0)=1$ nên $C=0$.

Do đó $\mathrm{e}^{f^3(x)} = \mathrm{e}^{x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2+1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\sqrt{7}} x.\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}\left(x^2+1\right) = \frac{3}{8}\left[\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}\right]\Big|_0^{\sqrt{7}} = \frac{45}{8}$.

Câu 37. **(SP Đồng Nai - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0)=0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P=2M-m$ có dạng $a\sqrt{11}-b\sqrt{3}+c,(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $a+b+c$

A. $a+b+c=7$. **B.** $a+b+c=4$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 2x \Rightarrow \int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx = \int 2xdx$

$\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2+C$.

Mà $f(0)=0 \Leftrightarrow C=1 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2+1 \Leftrightarrow f^2(x) = \left(x^2+1\right)^2 - 1 = x^4+2x^2$

$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^4+2x^2}$ (do $f(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$).

Ta có: $f'(x) = \frac{2x^3+2x}{\sqrt{x^4+2x^2}} > 0, \forall x\in[1;3] \Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 3\sqrt{11}; \min\limits_{[1;3]} f(x) = f(1) = \sqrt{3}$.

Ta có: $P = 2M - m = 6\sqrt{11}-\sqrt{3} \Rightarrow a=6; b=1; c=0 \Rightarrow a+b+c=7$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x) = x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2) = a+b\ln 3$, với a,b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\frac{21}{16}$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=0$. **D.** $T=-\frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x) = x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \frac{x^2}{(x+1)}f'(x) + \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]' = \frac{x^2}{x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \int \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{x+1}f(x)+C'$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \int \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{x+1}f(x)+C'$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C''=\dfrac{x^2}{x+1}f(x)+C'$.

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C=\dfrac{x^2}{x+1}f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

Ta có: $f(1)=2\ln 2+1$ và $f(1)=-1+2\ln 2+2C\Rightarrow C=1$.

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+1=\dfrac{x^2}{x+1}f(x)$.

$\Rightarrow f(2)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}.\ln|3|$ và $f(2)=a+b\ln 3\Rightarrow a=\dfrac{3}{4},\ b=\dfrac{3}{4}\Rightarrow T=a^2-b=\dfrac{9}{16}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{-3}{16}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x)-x^2.f'(x)=2f^2(x)$, với $f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=\dfrac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tính $M+m$.

A. $\dfrac{9}{10}$. **B.** $\dfrac{21}{10}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3x.f(x)-x^2.f'(x)=2f^2(x)\Rightarrow 3x^2.f(x)-x^3.f'(x)=2x.f^2(x)$

$\Rightarrow \dfrac{3x^2.f(x)-x^3.f'(x)}{f^2(x)}=2x$ vì $f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$.

$\Rightarrow \left(\dfrac{x^3}{f(x)}\right)'=2x\Rightarrow \dfrac{x^3}{f(x)}=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

Mà $f(1)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow C=2\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$.

Ta có: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^4+6x^2}{(x^2+2)^2}>0,\forall x\in(0;+\infty)$.

Vậy, hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $[1;2]\subset(0;+\infty)$ nên hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Suy ra, $M=f(2)=\dfrac{4}{3};m=f(1)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow M+m=\dfrac{5}{3}$.

Câu 40. **(Chuyên KHTN - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x)+(x+1)f(x)=e^{-x}$ với mọi x. Tính $f'(0)$.

A. 1. **B.** -1. **C.** e. **D.** $\dfrac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $xf'(x)+(x+1)f(x)=e^{-x} \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)+xf(x)=e^{-x}$

$\Leftrightarrow xe^{x}f'(x)+(x+1)e^{x}f(x)=1$

$\Leftrightarrow xe^{x}f'(x)+\left(xe^{x}\right)'f(x)=1$

$\Leftrightarrow \left(xe^{x}f(x)\right)'=1$

$\Leftrightarrow xe^{x}f(x)=\int dx=x+C\ \ (*)$

Với $x=0$

+) Thay vào biểu thức ban đầu ta có: $0.f'(0)+(0+1)f(0)=e^{-0}=1 \Leftrightarrow f(0)=1$.

+) Thay vào $(*)$, ta có: $C=0$.

Khi đó: $xe^{x}f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 1 & \text{khi } x=0 \end{cases}$

Suy ra: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{-x}=-1$.

Câu 41. **(Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\backslash\{0\}$, thỏa mãn $f(1)=0$ và $f'(x)+x\left(e^{f(x)}+2\right)+\dfrac{x}{e^{f(x)}}=0$. Giá trị của $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ bằng

A. $\ln 7$. **B.** $\ln 5$. **C.** $\ln 6$. **D.** $\ln 3$.

Lời giải

Chọn A

$f'(x)+x+\dfrac{x}{e^{f(x)}}=0 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}+xe^{f(x)}\left(e^{f(x)}+2\right)+x=0$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}+x\left(e^{f(x)}+1\right)^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{-f'(x)e^{f(x)}}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}=x$

$\Leftrightarrow \int\dfrac{-f'(x)e^{f(x)}}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}dx=\int xdx \Leftrightarrow \int\dfrac{-d\left[e^{f(x)}\right]}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}=\int xdx \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^{f(x)}+1}=\dfrac{x^2}{2}+C,(1)$

Trong (1) cho x=1 $\Rightarrow \dfrac{1}{e^{f(1)}+1}=\dfrac{1}{2}+C \Rightarrow C=0$. Suy ra $\dfrac{1}{e^{f(x)}+1}=\dfrac{x^2}{2},(2)$

Trong (2) cho x=$\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{e^{f\left(\frac{1}{2}\right)}+1}=\dfrac{1}{8} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 7$.

Câu 42. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021)** Giả sử $f(x)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên $(0;\pi)$ và $f'(x)\sin x=x+f(x)cosx, \forall x\in(0;\pi)$. Biết $f(\frac{\pi}{2})=1$, $f(\frac{\pi}{6})=\dfrac{1}{12}(a+b\ln 2+c\pi\sqrt{3})$, với a,b,c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 11. **D.** -11.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x)\sin x = x + f(x)cosx \Leftrightarrow f'(x)\sin x - f(x)cosx = x$$

Ta có: $\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)\sin x - f(x)cosx}{\sin^2 x} = \dfrac{x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]' = \dfrac{x}{\sin^2 x}$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sin x} = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x\cot x + \int \cot x dx = -x\cot x + \ln|\sin x| + C.$$

Hay $\dfrac{f(x)}{\sin x} = -x\cot x + \ln|\sin x| + C$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2} + \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| + C \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sin x} = -x\cot x + \ln|\sin x| + 1.$$

Do đó $\Rightarrow \dfrac{f(\frac{\pi}{6})}{\sin\frac{\pi}{6}} = -\dfrac{\pi}{6}\cot\dfrac{\pi}{6} + \ln\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right| + 1 \Rightarrow f(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{12}\left(6 - 6\ln 2 - \pi\sqrt{3}\right)$.

$\Rightarrow a = 6, b = -6, c = -1$. $a + b + c = -1$.

Câu 43. **(THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn

$xf'(x) = f(x) + x^3\ln x, \forall x > 0$ và $f(1) = \dfrac{3}{4}$. Tính $f(2)$

A. $2\ln 2 + 1$. **B.** $4\ln 2 + 1$. **C.** $2\ln 2$ **D.** $4\ln 2$

Lời giải

Chọn D

$$xf'(x) = f(x) + x^3\ln x \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = x\ln x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = x\ln x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \int x\ln x dx$$

Mà $\int x\ln x dx = \int \ln x.d\left(\dfrac{1}{2}x^2\right) = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \int \dfrac{1}{2}x^2.\dfrac{1}{x}dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + C$

Suy ra $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3\ln x - \dfrac{1}{4}x^3 + Cx$, mà $f(1) = \dfrac{3}{4} = C - \dfrac{1}{4} \Rightarrow C = 1$.

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3\ln x - \dfrac{1}{4}x^3 + x$. Khi đó $f(2) = 4\ln 2$.

Câu 44. **(Liên Trường Nghệ An – 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và luôn nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0) = e^2$ và $2\sin 2x\left[f(x) + e^{\cos 2x}.\sqrt{f(x)}\right] + f'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $2\sin 2x.f(x) + f'(x) = -e^{\cos^2 x - \sin^2 x}\sin 2x.\sqrt{f(x)}$

$$\Leftrightarrow \sin 2x.e^{\sin^2 x}.\sqrt{f(x)} + e^{\sin^2 x}.\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = -e^{\cos^2 x}\sin 2x \Rightarrow \int\left(e^{\sin^2 x}.\sqrt{f(x)}\right)'dx = \int e^{\cos^2 x}d\left(\cos^2 x\right)$$

$\Rightarrow e^{\sin^2 x}.\sqrt{f(x)} = e^{\cos^2 x} + C$

Mà $f(0) = e^2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)} = e^{\cos^2 x - \sin^2 x} \Rightarrow f(x) = e^{2\cos 2x}$.

Vậy $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{e} \approx 0,37$.

Câu 45. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}\left(x^3 - 4x\right)$. Hàm số $F\left(x^2 + x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $F'(x) = f(x)$

$\Rightarrow F'\left(x^2 + x\right) = f\left(x^2 + x\right).\left(x^2 + x\right)' = (2x+1)\left(x^2 + x\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}\left(\left(x^2 + x\right)^2 - 4\right)$

$= (2x+1)x(x+1)e^{\left(x^2+x\right)^2}\left(x^2 + x - 2\right)\left(x^2 + x + 2\right)$

$= (2x+1)x(x+1)(x+2)(x-1)\left(x^2 + x + 2\right)e^{\left(x^2+x\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-2; -1; \frac{-1}{2}; 0; 1\right\}$

$F'\left(x^2 + x\right) = 0$ có 5 nghiệm đơn nên $F\left(x^2 + x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 46. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho $F(x) = \int \frac{\left(1 + \cos^2 x\right)\left(\sin x + \cot x\right)}{\sin^4 x}dx$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $(0; 4\pi)$. Tổng S thuộc khoảng

A. $(6\pi; 9\pi)$. **B.** $(2\pi; 4\pi)$. **C.** $(4\pi; 6\pi)$. **D.** $(0; 2\pi)$.

Lời giải

Chọn

Ta có: $F(x) = \int \frac{\left(1 + \cos^2 x\right)\left(\sin x + \cot x\right)}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\left(1 + \cos^2 x\right)\sin x}{\sin^4 x}dx + \int \frac{\left(1 + \cos^2 x\right)\cot x}{\sin^4 x}dx$

Gọi $A = \int \frac{\left(1 + \cos^2 x\right)\cot x}{\sin^4 x}dx$ và $B = \int \frac{\left(1 + \cos^2 x\right)\sin x}{\sin^4 x}dx$

Ta có:

$A = \int \frac{\left(1 + \cos^2 x\right)\cot x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\left(1 + 2\cot^2 x\right)\cot x}{\sin^2 x}dx = -\int \left(\cot x + 2\cot^3 x\right).d(\cot x)$

$= -\left(\frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^4 x}{2}\right) + C_1$.

$B = \int \frac{\left(1 + \cos^2 x\right)\sin x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\left(1 + \cos^2 x\right)\sin x}{\left(1 - \cos^2 x\right)^2}dx$

Đặt $t = \cos x$, suy ra $dt = -\sin x.dx$. Khi đó:

$$B=-\int\frac{1+t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-\int\frac{1+t^2}{(t-1)^2.(t+1)^2}dt=-\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)+C_2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)+C_2$$

Do đó:

$$F(x)=A+B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C$$

Suy ra:

$$F(x)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C=C$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}-\cot^2 x-\cot^4 x=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}=0$$

Với điều kiện $\sin x\neq 0$,

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2+\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x\left(1-\cos^2 x\right)+\cos^3 x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ -2\cos^2 x+\cos x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$$

Theo giả thiết $x\in(0;4\pi)$ nên $x=\frac{\pi}{2};x=\frac{3\pi}{2};x=\frac{\pi}{2}+2\pi;x=\frac{3\pi}{2}+2\pi$;

$x=\alpha;x=\alpha+2\pi$;

$x=\beta;x=\beta+2\pi$.

Khi đó tổng các nghiệm này sẽ lớn hơn 9π.

Câu 47. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$ **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x}-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

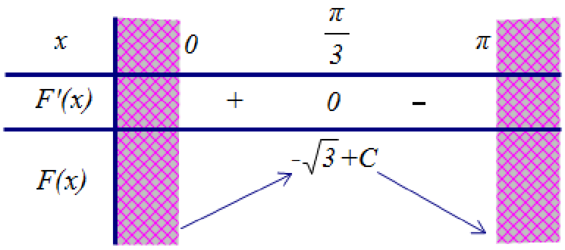
Xét hàm số $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:



$\max\limits_{(0;\pi)} F(x)=F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$.

Câu 48. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;4\pi)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x)=f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ trên $(0;4\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=0\Leftrightarrow x\cos x-\sin x=0$ trên $(0;4\pi)$.

Đặt $g(x)=x\cos x-\sin x$ trên $(0;4\pi)$.

Ta có $g'(x)=-x.\sin x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi\\x=2\pi\\x=3\pi\end{array}\right.$ trên $(0;4\pi)$.

Từ đó có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	0		π		x_1		2π		x_2		3π		x_3		4π
$g'(x)$		$-$	0	$+$			0			$-$	0	$+$			
$g(x)$	0	↘	$-\pi$	↗	0	↗	2π	↘	0	↘	-3π	↗	0	↗	4π

Vì $g(x)$ liên tục và đồng biến trên $[\pi;2\pi]$ và $g(\pi).g(2\pi)<0$ nên tồn tại duy nhất $x_1\in(\pi;2\pi)$ sao cho $g(x_1)=0$.

Tương tự ta có $g(x_2)=0$, $g(x_3)=0$ với $x_2\in(2\pi;3\pi)$, $x_3\in(3\pi;4\pi)$.

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta thấy $g(x)<0$ khi $x\in(0;x_1)$ và $x\in(x_2;x_3)$; $g(x)>0$ khi $x\in(x_1;x_2)$ và $x\in(x_3;4\pi)$. Dấu của $f(x)$ là dấu của $g(x)$ trên $(0;4\pi)$.

Do đó ta có bảng biến thiên của $F(x)$:

x	0		x_1		x_2		x_3		4π
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
F(x)		↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	

Vậy hàm số $y=F(x)$ có ba cực trị.

Câu 49. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** vô số điểm. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Vì $(F(x))'=f(x)$ nên ta xét sự đổi dấu của hàm số $f(x)$ để tìm cực trị hàm số đã cho.

Ta xét hàm số $g(x)=x-\cos x$, ta có $g'(x)=1+\sin x\geq 0\,\forall x$.

Vì vậy $g(x)$ là hàm số đồng biến trên toàn trục số.

Hơn nữa ta có $\begin{cases} g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}>0 \\ g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}<0 \end{cases}$, do đó $g(x)=0$ có duy nhất nghiệm $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

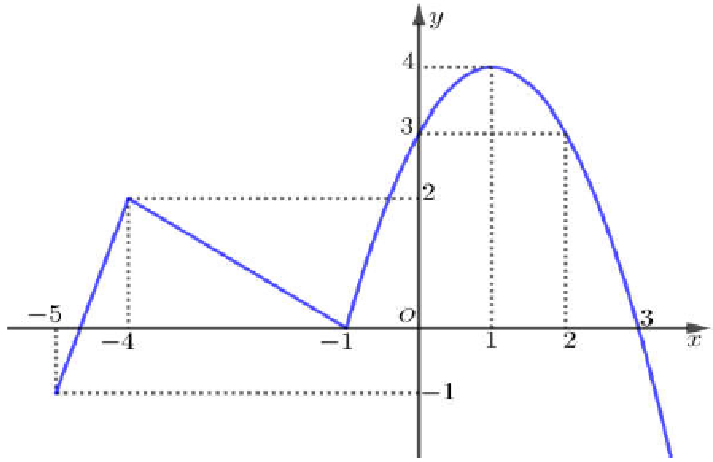
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$	

Kết luận hàm số đã cho có một cực trị.

Câu 50. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(0)=0$, giá trị của $2f(-5)+3f(2)$ bằng

A. 33. **B.** $\frac{109}{3}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

*)Parabol $y=ax^2+bx+c$ qua các điểm $(2;3),(1;4),(0;3),(-1;0),(3;0)$ nên xác định được

$y=-x^2+2x+3,\forall x\geq -1$ suy ra $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x+C_1$. Mà

$f(0)=0\Rightarrow C_1=0,\ f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x$.

Có $f(-1)=-\frac{5}{3}$; $f(2)=\frac{22}{3}$ (1)

*)Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4;-1]$ qua các điểm $(-4;2),(-1;0)$ nên

$f'(x)=\frac{-2}{3}(x+1)\Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+C_2$.

Mà $f(-1)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow C_2=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-2$, hay $f(-4)=\frac{-14}{3}$.

*) Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5;-4]$ qua các điểm $(-4;2),(-5;-1)$ nên

$f'(x)=3x+14 \Rightarrow f(x)=\frac{3x^2}{2}+14x+C_3$.

Mà $f(-4)=\frac{-14}{3} \Leftrightarrow \frac{3.(-4)^2}{2}+14.(-4)+C_3=\frac{-14}{3}$ suy ra $C_3=\frac{82}{3}$.

Ta có $f(x)=\frac{3x^2}{2}+14x+\frac{82}{3} \Rightarrow f(-5)=-\frac{31}{6}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $2f(-5)+3f(2)=-\frac{31}{3}+22=\frac{35}{3}$.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20$. **B.** $y=16x-20$. **C.** $y=16x+20$. **D.** $y=-16x+20$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=4x^3+3x^2$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $xf(x)=\int(4x^3+3x^2)\mathrm{d}x=x^4+x^3+C$.

Với $x=1$ ta có: $f(1)=2+C$.

Theo bài ra $f(1)=2 \Leftrightarrow 2+C=2 \Leftrightarrow C=0$.

Vậy $xf(x)=x^4+x^3 \Leftrightarrow f(x)=x^3+x^2$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+2x$; $f'(2)=16$; $f(2)=12$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là:

$y=16(x-2)+12 \Leftrightarrow y=16x-20$.

Câu 52. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=\frac{\sqrt{5}}{2}, M=\sqrt{3}$. **B.** $m=\frac{5}{2}, M=3$.

C. $m=\sqrt{3}, M=2\sqrt{2}$. **D.** $m=\frac{\sqrt{21}}{2}, M=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

$f\left(x\right).f'\left(x\right)=\cos x\sqrt{1+f^2\left(x\right)}\Leftrightarrow\dfrac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}=\cos x$

$\Rightarrow\int\dfrac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C_1\quad(1)$

Đặt $t=\sqrt{1+f^2\left(x\right)}\Rightarrow t^2=1+f^2\left(x\right)\Rightarrow t\mathrm{d}t=f\left(x\right).f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\dfrac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{t\mathrm{d}t}{t}=\int\mathrm{d}t=t+C_2=\sqrt{1+f^2\left(x\right)}+C_2\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=\sin x+C$. Thay $x=0$ vào ta có: $\sqrt{1+3}=C\Rightarrow C=2$

Hay $\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=\sin x+2$.

$\Leftrightarrow f^2\left(x\right)=\left(\sin x+2\right)^2-1=\sin^2x+4\sin x+3$

$\Rightarrow f\left(x\right)=\sqrt{\sin^2x+4\sin x+3}$

Đặt $t=\sin x$. Với $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

Ta đi xét hàm số $g\left(t\right)=\sqrt{t^2+4t+3},\ t\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

$g'\left(t\right)=\dfrac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+3}}>0,\forall t\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ do đó $g\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

$\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}g\left(t\right)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{21}}{2}=\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]}f\left(x\right)=m$

$\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}g\left(t\right)=g\left(1\right)=2\sqrt{2}=\max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]}f\left(x\right)=M$

Câu 53. **(Chuyên Quốc Học Huế - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R thỏa mãn: $f'(x)=f(x)+e^x.\cos 2021x$ và $f(0)=0$ Đồ thi hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-1;1]$?

A. 3 **B.** 1 **C.** 1287 **D.** 4043

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình trên tương đương với

$\Rightarrow f'(x)=f(x)+e^x.\cos 2021x\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=e^x.\cos 2021x$

$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)+\left(-e^{-x}\right)f(x)=\cos 2021x$

Đến đây ta nguyên hàm hai vế thu được:

$\Rightarrow\left(e^{-x}f(x)\right)'=\cos 2021x\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=\int\cos 2021x dx=\dfrac{\sin 2021x}{2021}+C$

Mà $f(0)=0$ nên $C=0$ suy ra $e^{-x}f(x)=\dfrac{\sin 2021x}{2021}\Rightarrow f(x)=\dfrac{e^x.\sin 2021x}{2021}$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là

$f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{e^x.\sin 2021x}{2021}=0\Leftrightarrow\sin 2021x=0\Leftrightarrow 2021x=k\pi,k\in Z\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2021},\left(k\in Z\right)$

Vì $x\in[-1;1]$ nên $-1\le\frac{k\pi}{2021}\le 1\Rightarrow\frac{-2021}{\pi}\le k\le\frac{2021}{\pi}$

Mà do $k\in Z$ nên suy ra $k\in\{-643;-642;...;643\}$ như vậy ta kết luận đồ thi hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 1287 điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-1;1]$

Câu 54. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2022)** Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)-f(0)$ bằng

A. $\frac{1}{90}$. **B.** $-\frac{1}{90}$. **C.** $-\frac{1}{72}$. **D.** $\frac{1}{72}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=4x^3$

$\Leftrightarrow\int\left(\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}\right)\mathrm{d}x=\int 4x^3\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^4+C$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^4+C\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^4+C}$

Với $f(2)=-\frac{1}{25}\Leftrightarrow f(2)=-\frac{1}{16+C}=-\frac{1}{25}\Rightarrow C=9$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^4+9}\Rightarrow f(1)-f(0)=-\frac{1}{10}+\frac{1}{9}=\frac{1}{90}$.

Câu 55. **(Cụm Trường Nghệ An - 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f'(x)-2f(x)=\left(x^2+1\right)e^{\frac{x^2+4x-1}{2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=e^2$. Biết $f(3)=a.e^b+c$ với a, b, $c\in\mathbb{N}$. Tính $2a+3b+4c$.

A. 36. **B.** 30. **C.** 24. **D.** 32.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)-2f(x)=\left(x^2+1\right)e^{\frac{x^2+4x-1}{2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Nhân 2 vế cho e^{-2x} ta được: $e^{-2x}.f'(x)-2.e^{-2x}.f(x)=\left(x^2+1\right)e^{\frac{x^2-1}{2}}$.

$\Rightarrow e^{-2x}.f'(x)+\left(e^{-2x}\right)'.f(x)=\left(x^2+1\right)e^{\frac{x^2-1}{2}}\Rightarrow\left(\left(e^{-2x}\right).f(x)\right)'=\left(x^2+1\right)e^{\frac{x^2-1}{2}}$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$\Rightarrow\left(e^{-2x}\right).f(x)=\int\left(x^2+1\right)e^{\frac{x^2-1}{2}}dx+C$

$\Rightarrow\left(e^{-2x}\right).f(x)=\int\left(x^2+1\right)e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x+C$

Đặt $H=\int\left(x^2+1\right)e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x$

$H=\int\left(x^2+1\right)e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x=\int x^2e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x+\int e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x\ \ (*)$

Ta tìm $\int e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x$ bằng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Đặt $\begin{cases}u=e^{\frac{x^2-1}{2}}\\ \mathrm{dv}=\mathrm{d}x\end{cases}$ ta có: $\begin{cases}\mathrm{d}u=x.e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x\\ \mathrm{v}=x\end{cases}$

Suy ra: $\int e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x=xe^{\frac{x^2-1}{2}}-\int x^2e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x$

Thế vào $(*)$ ta được: $H=\int\left(x^2+1\right)e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x=\int x^2e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x+xe^{\frac{x^2-1}{2}}-\int x^2e^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x=xe^{\frac{x^2-1}{2}}+C$

$\Rightarrow\left(e^{-2x}\right).f\left(x\right)=xe^{\frac{x^2-1}{2}}+C$

Mà $f\left(1\right)=e^2$

Ta cho $x=1\Rightarrow\left(e^{-2}\right).f\left(1\right)=1.e^0+C\Rightarrow\left(e^{-2}\right).e^2=1.e^0+C\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow\left(e^{-2x}\right).f\left(x\right)=xe^{\frac{x^2-1}{2}}$

Để tính $f\left(3\right)$ ta chọn $x=3\Rightarrow\left(e^{-6}\right).f\left(3\right)=3e^4\Rightarrow f\left(3\right)=3e^{10}=a.e^b+c$

Suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=10\Rightarrow 2a+3b+4c=36\\ c=0\end{cases}$.

Câu 56. **(THPT Hương Sơn - Hà Tĩnh - 2022)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=2$; $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\left[f\left(x\right)\right]^2}$ với mọi $x\in\left(0;+\infty\right)$. Giá trị $f\left(3\right)$ bằng

A. $\sqrt[3]{34}$. **B.** 34. **C.** 3. **D.** $\sqrt[3]{20}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\left[f\left(x\right)\right]^2}\Leftrightarrow f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)\right]^2=x^2$ với mọi $x\in\left(0;+\infty\right)$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$\int f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{f^3\left(x\right)}{3}=\dfrac{x^3}{3}+C$.

Theo đề bài $f\left(1\right)=2$ nên ta có: $\dfrac{8}{3}=\dfrac{1}{3}+C\Leftrightarrow C=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$.

Khi đó $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^3+7}\Rightarrow f\left(3\right)=\sqrt[3]{34}$.

Câu 57. **(Sở Thanh Hóa 2022)** Cho hàm số $f(x)\neq 0,\forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thoả mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$, $\forall x>0$ và $f(1)=-\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2022)$ bằng

A. $\dfrac{2022}{2023}$.

B. $\dfrac{2021}{2022}$.

C. $-\dfrac{2021}{2022}$.

D. $-\dfrac{2022}{2023}$.

Lời giải

Có $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+1)dx\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=x^2+x+C$.

Có $f(1)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow-\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}}=1+1+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}$.

Vì vậy $f(x)=-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{20122}f(k)=-\sum\limits_{k=1}^{2022}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=-\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2023}\right)=-\dfrac{2022}{2023}$.

Câu 58. **(Sở Lạng Sơn 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=e$ và $f'(x)+f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. $\dfrac{2}{e}$. **B.** $1-\dfrac{1}{e}$. **C.** $1+\dfrac{1}{e}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$f'(x)+f(x)=x\Leftrightarrow f'(x).e^x+f(x).e^x=xe^x\Leftrightarrow\left(e^x.f(x)\right)'=xe^x$.

Nên $\int\left(e^x.f(x)\right)'\,\mathrm{dx}=\int xe^x\mathrm{dx}\Leftrightarrow e^x.f(x)=xe^x-e^x+C\Rightarrow f(x)=\dfrac{xe^x-e^x+C}{e^x}$.

Do $f(1)=e\Rightarrow f(1)=\dfrac{e^1-e^1+C}{e^1}\Rightarrow C=e^2$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{xe^x-e^x+e^2}{e^x}$

$f(2)=\dfrac{2.e^2-e^2+e^2}{e^2}=2$.

Câu 59. **(Sở Lạng Sơn 2022)** Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=e$, $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3<f(5)<4$. **B.** $11<f(5)<12$. **C.** $10<f(5)<11$. **D.** $4<f(5)<5$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ nên $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}$

$\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}dx\Leftrightarrow\ln f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C\,(*)$

Ta có: $f(1)=e$ nên $(*)\Leftrightarrow1=\dfrac{4}{3}+C\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{3}(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{1}{3}}\Rightarrow f(5)=e^{\frac{7}{3}}\approx10{,}31$.

Câu 60. **(Sở Phú Thọ 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $R\setminus\{-2;0\}$ thỏa mãn $x(x+2).f'(x)+2f(x)=x^2+2x$ và $f(1)=-6\ln3$. Biết $f(3)=a+b\ln5\,(a,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị $a-b$ bằng?

A. 20. **B.** 10. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $x(x+2).f'(x)+2f(x)=x^2+2x$ chia hai vế cho $(x+2)^2$ ta được:

$$\frac{xf'(x)}{x+2}+\frac{2f(x)}{(x+2)^2}=\frac{x}{x+2}\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+2}f(x)\right]'=\frac{x}{x+2}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\frac{x}{x+2}f(x)=\int\frac{x}{x+2}dx\Leftrightarrow\frac{x}{x+2}f(x)=x-2\ln|x+2|+C.$$

Mà $f(1)=-6\ln 3$ nên ta có: $\frac{-6\ln 3}{3}=1-2\ln 3+C\Leftrightarrow C=-1$.

Khi đó $\frac{x}{x+2}f(x)=x-\ln|x+2|-1\Rightarrow\frac{3}{5}f(3)=2-2\ln 5\Rightarrow f(3)=\frac{10}{3}-\frac{10}{3}\ln 5$.

Vậy $a-b=\frac{10}{3}+\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$.

Câu 61. **(Sở Vĩnh Phúc 2022)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thoả mãn $f(x)>-1$ và $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1},\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0)=0$, khi đó $f(2)$ có giá trị bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

Nên $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\frac{\mathrm{d}(f(x))}{\sqrt{f(x)+1}}=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}(x^2+1)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)+1}=2\sqrt{x^2+1}+C$.

Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{x^2+1}$ nên $f(x)=x^2\Rightarrow f(2)=4$.

Câu 62. **(Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương – 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $(C), f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=\ln x\cdot f^2(x),\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(e)=2$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=1$.

A. $y=-\frac{2}{3}x+2$.

B. $y=-\frac{2}{3}$.

C. $y=\frac{2}{3}x+1$.

D. $y=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=\ln x\cdot f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\ln x\Leftrightarrow\left(\frac{-1}{f(x)}\right)^2=\ln x$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)}=\int \ln x dx = x\ln x - x + C$

Với $x=e$ ta có $\dfrac{-1}{f(e)}=e\ln e - e + C$ mà $f(e)=2\Rightarrow \dfrac{-1}{2}=C$

Suy ra $f(x)=\dfrac{-1}{x\ln x - x - \dfrac{1}{2}}$

Khi đó $\begin{cases} f(1)=\dfrac{2}{3} \\ f'(1)=\ln 1\cdot f^2(1)=0 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$y=f'(x)(x-1)+f(1)=\dfrac{2}{3}.$

Câu 63. **(THPT Trần Phú – Hà Tĩnh – 2022)** Cho hàm số $y=f(x)>0$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=e^3$. Biết $f'(x)=(2x-3)f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi phương trình $f(x)=e^{2x^4-3x+4}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4.
B. 3.
C. 2.
D. 0.

Lời giải

$f'(x)=(2x-3)f(x)\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x-3$

$\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int (2x-3)dx \Rightarrow \ln f(x)=x^2-3x+C,(f(x)>0); f(1)=e^3$

$\Rightarrow 3=C-2\Leftrightarrow C=5\Rightarrow \ln f(x)=x^2-3x+5$

$\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2-3x+5}\Rightarrow f(x)=e^{2x^4-3x+4}$

$\Leftrightarrow e^{x^2-3x+5}=e^{2x^4-3x+4}\Leftrightarrow 2x^4-3x+4=x^2-3x+5\Leftrightarrow x=\pm 1.$

Câu 64. **(THPT Kim Liên - Hà Nội - 2022)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x\right)>0,\forall x>\dfrac{1}{2}$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)+8xf^2\left(x\right)=0,\forall x>\dfrac{1}{2}$ và $f\left(1\right)=\dfrac{1}{3}$. Tính $f\left(1\right)+f\left(2\right)+...+f\left(1011\right)$.

A. $\dfrac{1}{2}.\dfrac{2022}{2023}$. **B.** $\dfrac{2021}{2043}$. **C.** $\dfrac{2022}{4045}$. **D.** $\dfrac{1}{2}.\dfrac{2021}{2022}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'\left(x\right)+8xf^2\left(x\right)=0\Leftrightarrow \dfrac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=-8x$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$\int \dfrac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}dx=\int -8xdx\Leftrightarrow \int \dfrac{1}{f^2\left(x\right)}d\left(f\left(x\right)\right)=\int -8xdx\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f\left(x\right)}=-4x^2+C$.

Mà $f\left(1\right)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow -3=-4+C\Leftrightarrow C=1$.

Khi đó $f\left(x\right)=\frac{1}{4x^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right]$.

$f\left(1\right)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}\right], f\left(2\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right], f\left(3\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right], \dots f\left(1011\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2001}-\frac{1}{2023}\right]$.

Vậy $f\left(1\right)+f\left(2\right)+\dots+f\left(1011\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2023}\right)=\frac{1}{2}.\frac{2022}{2023}$.

Câu 65. **(THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc - 2022)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $2x.f'\left(x\right)+f\left(x\right)=3x^2\sqrt{x}, \forall x\in\left(0;+\infty\right)$. Biết $f\left(1\right)=\frac{1}{2}$, tính $f\left(4\right)$.

A. 14. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

$2x.f'\left(x\right)+f\left(x\right)=3x^2\sqrt{x}, \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}.f'\left(x\right)+\frac{1}{2\sqrt{x}}f\left(x\right)=\frac{3x^2}{2}, \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}.f'\left(x\right)+\left(\sqrt{x}\right)'.f\left(x\right)=\frac{3x^2}{2}, \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x}.f\left(x\right)\right]'=\frac{3x^2}{2}, \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}.f\left(x\right)=\int\frac{3x^2}{2}dx=\frac{x^3}{2}+C \Leftrightarrow \sqrt{x}.f\left(x\right)=\frac{x^3}{2}+C\left(*\right)$

Thay $x=1$ vào $\left(*\right)$ ta được: $f\left(1\right)=\frac{1}{2}+C\Rightarrow C=f\left(1\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{x^3}{2\sqrt{x}}$

Vậy $f\left(4\right)=16$.

Câu 66. **(Chuyên Hà Tĩnh 2022)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $2x.f'\left(x\right)+f\left(x\right)=4x\sqrt{x}$. Biết $f\left(1\right)=2$. Giá trị của $f\left(4\right)$ bằng

A. $\frac{15}{4}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{15}{2}$. **D.** $\frac{17}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2xf'\left(x\right)+f\left(x\right)=4x\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{2x}f'\left(x\right)+\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{2x}}=2\sqrt{2}x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x}.f\left(x\right)\right)'=2\sqrt{2}x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\sqrt{2x}.f\left(x\right)=\sqrt{2}x^2+C$.

Với $f\left(1\right)=2\Rightarrow 2\sqrt{2}=\sqrt{2}+C\Rightarrow C=\sqrt{2}\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$.

Vậy $f\left(4\right)=\frac{17}{2}$.

Câu 67. **(Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2022)** Cho hàm số $f(x)>0$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(x+1)f'(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$ và $f(0)=\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f(3)$ bằng

A. $4(4\ln 2-\ln 5)^2$. **B.** $2(4\ln 2-\ln 5)^2$. **C.** $\dfrac{1}{2}(4\ln 2-\ln 5)^2$. **D.** $\dfrac{1}{4}(4\ln 2-\ln 5)^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$(x+1)f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{(x+2)(x+1)}.$$

$$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int\frac{1}{(x+2)(x+1)}dx$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{d(f(x))}{\sqrt{f(x)}}=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)}=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$$

Mà $f(0)=\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)^2\Rightarrow C=2\ln 2$

$$\Rightarrow 2\sqrt{f(3)}=\ln 4-\ln 5+2\ln 2\Leftrightarrow 2\sqrt{f(3)}=4\ln 2-\ln 5\Leftrightarrow f(3)=\frac{1}{4}(4\ln 2-\ln 5)^2.$$

Câu 68. **(Sở Hà Nam 2022)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x)>0,\ \forall x\in(1;3)$. Biết rằng $e^{2x}.f^3(x)+1=3e^x.f'(x).\sqrt{f(x)}$, $\forall x\in(1;3)$ và $f(2)=e^{-\frac{4}{3}}$, khi đó giá trị của $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{3};1\right)$.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $e^{2x}.f^3(x)+1=3e^x.f'(x).\sqrt{f(x)}\Leftrightarrow e^{2x}.f^3(x)+1=2e^x.\left(\sqrt{f^3(x)}\right)'$

$$\Leftrightarrow e^{2x}.f^3(x)+1=2\left[\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}\right)'-e^x.\sqrt{f^3(x)}\right]\Leftrightarrow\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}+1\right)^2=2\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}\right)'$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}+1\right)'}{\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}+1\right)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\int\frac{\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}+1\right)'}{\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}+1\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int dx\Leftrightarrow\frac{-1}{e^x.\sqrt{f^3(x)}+1}=\frac{1}{2}x+C\ (*).$$

+ Vì $f(2)=e^{\frac{-4}{3}}$ nên $(*)\Leftrightarrow\dfrac{-1}{2}=1+C\Leftrightarrow C=\dfrac{-3}{2}$

+ Do đó: $\dfrac{-1}{e^x.\sqrt{f^3(x)+1}}=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-x}{(x-3).e^x}\right)^2}$. Suy ra: $f\left(\dfrac{3}{2}\right)\approx 0,18\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$

Câu 69. **(Sở Hà Nam 2022)** Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ và $f'(x)=\cos x\left(6\sin^2 x-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0)=\dfrac{2}{3}$, khi đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\cos x\left(6\sin^2 x-1\right)\mathrm{d}x=\int\left(6\sin^2 x\cos x-\cos x\right)\mathrm{d}x$

$=6\int\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x-\sin x+C$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$

Suy ra $f(x)=6\int t^2\mathrm{d}t-\sin x+C=2t^3-\sin x+C=2\sin^3 x-\sin x+C$

Mà $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow 2\sin^3\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+C=1\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=2\sin^3 x-\sin x$

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2\sin^3 x-\sin x\right)\mathrm{d}x=2\int\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\mathrm{d}x+\cos x+C'$

Đặt $u=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$

Suy ra $F(x)=-2\int\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u+\cos x+C'=-2\left(u-\dfrac{u^3}{3}\right)+\cos x+C'$

$=-2\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C'=\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C'$

Mà $F(0)=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\cos^3 0-\cos 0+C'=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow C'=1\Rightarrow F(x)=\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+1$

Vậy $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\cos^3\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+1=1$.

Câu 70. **(Sở KonTum 2022)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$ là

A. xe^x+x+C. **B.** $(x+1)e^x+C$. **C.** $xe^{-x}+x+C$. **D.** $(x-1)e^x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)+f'(x)=e^{-x}\Leftrightarrow e^x f(x)+e^x f'(x)=1\Leftrightarrow\left(e^x f(x)\right)'=1\Leftrightarrow\int\left(e^x f(x)\right)'dx=\int dx$

$\Leftrightarrow e^x f(x)=x+C_1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x+C_1}{e^x}$.

Theo giả thiết $f(0)=2$, ta có $f(0)=\dfrac{0+C_1}{e^0}=2\Leftrightarrow C_1=2$.

Vậy $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x}$.

Khi đó $\int f(x)e^{2x}dx = \int \frac{x+2}{e^x}e^{2x}dx = \int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x + C$.

Câu 71. **(Sở Hậu Giang 2022)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) - \frac{f(x)}{x^2+x} = \frac{x}{x+1}, \forall x \in (0;+\infty)$. Giá trị $f(7)$ bằng

A. $\frac{7}{8}$. **B.** $\frac{49}{8}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{48}{49}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) - \frac{f(x)}{x^2+x} = \frac{x}{x+1}, \forall x \in (0;+\infty) \Rightarrow (x^2+x)f'(x) - f(x) = x^2$.

$\Rightarrow f'(x) + \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 1 \Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x + \int \left[\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}\right]\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x$

$\Rightarrow f(x) + \frac{f(x)}{x} = x + C$.

Với $x = 1$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

$\Rightarrow f(x) + \frac{f(x)}{x} = x \Rightarrow f(x)\left[1 + \frac{1}{x}\right] = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Với $x = 7 \Rightarrow f(7) = \frac{49}{8}$.

Câu 72. **(Cụm trường Bắc Ninh 2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0) = -1$. Biết $F(x) = \frac{1}{4}(2x-1).e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x) - f(x)$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{-2x}$ là

A. $\int f(x).e^{-2x}\mathrm{d}x = x.e^x + \frac{1}{2}e^x + C$. **B.** $\int f(x).e^{-2x}\mathrm{d}x = x^2 - x + C$.

C. $\int f(x).e^{-2x}\mathrm{d}x = x.e^x - \frac{1}{2}e^x + C$. **D.** $\int f(x).e^{-2x}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + C$.

Lời giải

Chọn D

$F(x) = \frac{1}{4}(2x-1).e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x) - f(x)$

$\Rightarrow f'(x) - f(x) = F'(x) = \frac{1}{4}\left[2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x}\right] = x.e^{2x}$.

$\Rightarrow \frac{e^x.f'(x) - (e^x)'.f(x)}{e^{2x}} = x.e^x$

$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = x.e^x$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} = \int x.e^x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(e^x) = x.e^x - \int e^x\mathrm{d}x = (x-1).e^x + C.$

Với $x=0$ thì $\dfrac{f(0)}{e^0}=(0-1).e^0+C\Rightarrow -1=-1+C\Rightarrow C=0$.

Từ đó $\dfrac{f(x)}{e^x}=(x-1).e^x\Rightarrow f(x)=(x-1).e^{2x}$.

Vậy $\int f(x).e^{-2x}\mathrm{d}x=\int(x-1)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-x+C$.

Câu 73. **(Sở Nam Định 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $(1+x^2)f'(x)-1=3x^4+4x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $21.f(x^2)$ và $F(0)=10$, hãy tính $F(2)$.

A. $F(2)=566$. **B.** $F(2)=\dfrac{566}{21}$. **C.** $F(2)=366$. **D.** $F(2)=52$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(1+x^2)f'(x)-1=3x^4+4x^2\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{3x^4+4x^2+1}{1+x^2}$.

Suy ra

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3x^4+4x^2+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{3x^2(x^2+1)+(x^2+1)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int(3x^2+1)\mathrm{d}x=x^3+x+C.$$

Do $f(1)=0\Leftrightarrow 2+C=0\Leftrightarrow C=-2$.

Vậy $f(x)=x^3+x-2$. Suy ra $f(x^2)=(x^2)^3+x^2-2=x^6+x^2-2$.

Do $F(x)=\int 21.f(x^2)\mathrm{d}x=21\int f(x^2)\mathrm{d}x=21\int(x^6+x^2-2)\mathrm{d}x=21\left(\dfrac{x^7}{7}+\dfrac{x^3}{3}-2x\right)+D$.

Mặt khác $F(0)=10\Leftrightarrow D=10$. Suy ra $F(x)=3x^7+7x^3-42x+10$.

Vậy ta có $F(2)=3.2^7+7.2^3-42.2+10=366$.

Câu 74. **(Mã 101-2023)** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right),\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(3)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(12;14)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(6;8)$.

Lời giải

Ta có: $f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right)\Leftrightarrow f(x)\ln f(x)=xf(x)-xf'(x)$

$\Leftrightarrow f(x)\ln f(x)+xf'(x)=xf(x)\Leftrightarrow \ln f(x)+x\dfrac{f'(x)}{f(x)}=x$

$\Leftrightarrow\left[x\ln f(x)\right]'=x\Rightarrow x\ln f(x)=\dfrac{x^2}{2}+C\ \ (1)$.

Thế $x=1$ vào (1) ta được $\ln f(1)=\dfrac{1}{2}+C\Leftrightarrow 3\ln f(1)=\dfrac{3}{2}+3C$.

Thế $x=3$ vào (1) ta được $3\ln f(3)=\dfrac{9}{2}+C$

Do $f(1)=f(3)$ nên $3\ln f(1)=3\ln f(3)$. Suy ra

$$\frac{3}{2}+3C=\frac{9}{2}+C \Leftrightarrow 2C=3 \Leftrightarrow C=\frac{3}{2} \Rightarrow x\ln f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2} \ (2).$$

Thế $x=2$ vào biểu thức trên ta được

$$2\ln f(2)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2} \Leftrightarrow \ln f(2)=\frac{7}{4} \Leftrightarrow f(2)=e^{\frac{7}{4}} \approx 5,755 \in (4;6)$$

Câu 75. **(Mã 102-2023)** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right), \forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(4)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(8;10)$. **C.** $(6;8)$. **D.** $(13;15)$.

Lời giải

Ta có:

$$f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right), \forall x\in(0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(x)\ln f(x)+xf'(x)=xf(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}=x$$

$$\Leftrightarrow \left[x\ln f(x)\right]'=x$$

$$\Rightarrow x\ln f(x)=\int x dx \Leftrightarrow x\ln f(x)=\frac{x^2}{2}+C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\ln f(4)=8+C \\ \ln f(1)=\dfrac{1}{2}+C \end{cases}$$

$$\bullet f(1)=f(4) \Leftrightarrow \frac{C+8}{4}=C+\frac{1}{2} \Leftrightarrow C=2$$

Ta có: $x\ln f(x)=\frac{x^2}{2}+2 \Rightarrow 2\ln f(2)=4 \Leftrightarrow \ln f(2)=2 \Leftrightarrow f(2)=e^2 \approx 7,4 \in (6;8)$.

Câu 76. **(Mã 103 - 2023)** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(2f(x)-f'(x)\right), \forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(3)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(40;42)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(32;34)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Ta có $f(x)\ln f(x)=x\left(2f(x)-f'(x)\right) \Rightarrow \ln f(x)=2x-x\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\Rightarrow \ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}=2x \Rightarrow \left(x\ln f(x)\right)'=2x$$

$$\Rightarrow x\ln f(x)=\int 2x dx=x^2+C \Rightarrow \ln f(x)=x+\frac{C}{x}.$$

Vì $f(1)=f(3) \Leftrightarrow 1+C=3+\frac{C}{3} \Leftrightarrow C=3$

Vậy $\ln f(x)=x+\frac{3}{x} \Rightarrow f(2)=e^{2+\frac{3}{2}}=e^{\frac{7}{2}} \approx 33,12$.

Câu 77. **(Mã 104-2023)** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ có đạo hàm trên khoảng đó và thoả mãn $f(x)\ln f(x)=x(2f(x)-f'(x))$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(4)$, giá trị của $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(54;56)$. **B.** $(74;76)$. **C.** $(10;12)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

$f(x)\ln f(x)=x(2f(x)-f'(x))$

$\Leftrightarrow \ln(f(x))=2x-x.\dfrac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow x.\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\ln(f(x))=2x \Leftrightarrow (x.\ln(f(x)))'=2x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $x\ln(f(x))=x^2+C$.

Thay $x=1$ và $x=4$ ta được $\begin{cases}\ln(f(1))=1+C\\ \ln(f(4))=\dfrac{16+C}{4}\end{cases}$. Mà $f(1)=f(4)\Rightarrow 1+C=\dfrac{16+C}{4}\Rightarrow C=4$.

Suy ra $f(x)=e^{\frac{x^2+4}{x}}$. Khi đó $f(2)=e^4$.

Câu 78. **(Sở Thái Nguyên 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đao hàm liên tuc trên $\mathbb{R}$ và $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, đồng thời thỏa mãn $f(x)\cdot f'(x)-[f(x)]^2=2e^{6x},\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $f(1)=a\cdot e^b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá tri $a+b$ bằng

A. 4.
B. 3.
C. 2.
D. -2.

Lời giải

Chọn A

$+f(x)\cdot f'(x)-[f(x)]^2=2e^{6x}\Leftrightarrow 2e^{-2x}\left[f(x)\cdot f'(x)-f^2(x)\right]=4e^{4x}$

$\Leftrightarrow\left[e^{-2x}\cdot f^2(x)\right]'=4e^{4x}\Rightarrow e^{-2x}\cdot f^2(x)=e^{4x}+C.$

$+f(0)=1\Rightarrow e^0\cdot f^2(0)=e^0+C\Rightarrow C=0.$

$+f(1)=a\cdot e^b\Rightarrow e^{-2}\cdot f^2(1)=e^4\Rightarrow f^2(1)=e^6\Rightarrow f(1)=e^3.$

Vậy $a=1,b=3\Rightarrow a+b=4$.

Câu 79. **(Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f'(x)+xf(x)=\dfrac{2x}{e^{x^2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(-2)$.

A. $f(-2)=-\dfrac{2}{e^4}$.
B. $f(-2)=\dfrac{2}{e^4}$.
C. $f(-2)=4$.
D. $f(-2)=e^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)+xf(x)=\dfrac{2x}{e^{x^2}}\Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}}f'(x)+x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=\dfrac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\Leftrightarrow\left(e^{\frac{x^2}{2}}\cdot f(x)\right)'=2xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=\int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-2e^{-\frac{x^2}{2}}+C$.

Với $f(0)=-2\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=-2e^{-x^2}$.

Vậy $f(-2)=\frac{-2}{e^4}$.

Câu 80. **(THPT Nam Trực – Nam Định 2023)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x\left[\sin x+f'(x)\right]+\cos x,\forall x\in(0;+\infty)$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. Giá trị của $f(\pi)$ bằng

A. $1+\frac{\pi}{2}$.

B. $-1+\frac{\pi}{2}$.

C. $1+\pi$.

D. $-1+\pi$

Lời giải

Ta có $f(x)=x\left[\sin x+f'(x)\right]+\cos x\Rightarrow f'(x)+\sin x+\frac{1}{x}\cos x=\frac{1}{x}f(x)$

$\Rightarrow\frac{1}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1}{x}\left(-\sin x-\frac{1}{x}\cos x\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{x}f(x)\right)'=\frac{1}{x}\left(-\sin x-\frac{1}{x}\cos x\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{x}f(x)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{x}\left(-\sin x-\frac{1}{x}\cos x\right)dx=A$

$\Rightarrow\frac{1}{\pi}f(\pi)-\frac{2}{\pi}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\Leftrightarrow f(\pi)=\pi\left(A+\frac{2}{\pi}f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi-1.$

Chọn đáp án **D.**

Câu 81. **(Liên trường Nghệ An -Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Thái Hòa 2023)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f'(0)=0,f(0)=\ln 2$ và $(1-x)\left[f''(x)+1\right]=f'(x)\left[xf'(x)+2x-1\right],\forall x\in[0;1]$. Giá trị $f(1)$ gần với số nào sau nhất?

A. $-2,5$.

B. $-2,25$.

C. 0,25.

D. 0,5.

Lời giải

$(1-x)\left[f''(x)+1\right]=x\left[f'(x)\right]^2+(2x-1)f'(x)=x\left[f'(x)+1\right]^2-x-f'(x)$

$\Leftrightarrow 1+f'(x)+(1-x)f''(x)=x\left[f'(x)+1\right]^2$

$\Rightarrow\frac{1+f'(x)+(1-x)f''(x)}{\left[f'(x)+1\right]^2}=x\Leftrightarrow\left(\frac{x-1}{f'(x)+1}\right)'=x\Rightarrow\frac{x-1}{f'(x)+1}=\frac{1}{2}x^2+C$

Do $f'(0)=0\Rightarrow C=-1\Rightarrow f'(x)+1=\frac{x-1}{\frac{1}{2}x^2-1}$

$\Rightarrow f(1)=f(0)+\int\limits_0^1 f'(x)dx=\ln 2+\int\limits_0^1\left(\frac{x-1}{\frac{1}{2}x^2-1}-1\right)dx\approx 0,246$

Chọn đáp án **C.**

Câu 82. **(Đại học Quốc Gia Hà Nội 2023)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(0)=0, f'(0)=1, f''(x)=f(x)+(3x+4)e^{2x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. e^2.
B. $2e^4$.
C. $2e^2$.
D. e^4.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$f''(x)=f(x)+(3x+4)e^{2x} \Leftrightarrow f''(x)-f(x)=(3x+4)e^{2x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f''(x)-f(x)}{e^x}=(3x+4)e^x \Leftrightarrow \dfrac{f''(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=(3x+4)e^x$

$\Leftrightarrow \dfrac{f''(x)e^x-f'(x)e^x}{e^{2x}}+\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=(3x+4)e^x$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f'(x)}{e^x}\right)'+\left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)'=(3x+4)e^x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$\dfrac{f'(x)}{e^x}+\dfrac{f(x)}{e^x}=\int(3x+4)e^x\,dx=(3x+1)e^x+C$

Khi: $x=0\Rightarrow C=0$

Suy ra: $\dfrac{f'(x)}{e^x}+\dfrac{f(x)}{e^x}=(3x+1)e^x \Leftrightarrow f'(x)+f(x)=(3x+1)e^{2x}$

$\Leftrightarrow f'(x)e^x+f(x)e^x=(3x+1)e^{3x} \Leftrightarrow \left[f(x)e^x\right]'=(3x+1)e^{3x}$

$\Rightarrow f(x)e^x=\int(3x+1)e^{3x}\,dx=xe^{3x}+C_1$

Lại có: $x=0\Rightarrow C_1=0$

Vậy: $f(x)=xe^{2x}\Rightarrow f(1)=e^2$.

Câu 83. **(Sở Vĩnh Phúc 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $(x+2)f(x)=xf'(x)-x^3, \forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=e$. Giá trị của $f(2)$ là

A. $4e^2+4e-2$.
B. $4e^2+4e-4$.
C. $4e^2+2e-2$.
D. $4e^2+2e-4$.

Lời giải

Chọn B

$(x+2)f(x)=xf'(x)-x^3, \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2f'(x)-2xf(x)-x^2f(x)=x^4, \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}-\dfrac{f(x)}{x^2}=1, \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)'-\dfrac{f(x)}{x^2}=1, \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)'e^{-x}-\dfrac{f(x)}{x^2}e^{-x}=e^{-x}, \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x^2}e^{-x}\right)'=e^{-x}, \forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x^2}e^{-x}=-e^{-x}+C, \forall x\in(0;+\infty).$

Do $f(1)=e$, suy ra $C=1+e^{-1}$.

Vậy $f(x)=x^2\left(-1+e^x+e^{x-1}\right), \forall x\in(0;+\infty)$. Suy ra: $f(2)=4e^2+4e-4$.

Câu 84. **(Sở Quảng Trị 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$ và $\cos x\cdot f'(x)+\sin x\cdot f(x)=2\sin x\cdot\cos^3 x$ với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Lúc đó, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ thuộc khoảng

A. $(5;6)$.

B. $(1;3)$.

C. $(3;5)$.

D. $(6;10)$.

Lời giải

Chọn B

$\cos x\cdot f'(x)+\sin x\cdot f(x)=2\sin x\cdot\cos^3 x\Leftrightarrow \dfrac{\cos x\cdot f'(x)+\sin x\cdot f(x)}{\cos^2 x}=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{\cos x}\right]'=\sin 2x\Rightarrow \dfrac{f(x)}{\cos x}=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C.$

$+f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\Rightarrow \dfrac{9\sqrt{2}\cdot 2}{4\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}.0+C\Rightarrow C=\dfrac{9}{2}$

$+f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{9}{2}\right)=2,375\in(1;3).$

Câu 85. **(Chuyên KHTN 2023)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $x\cdot f'(x)=f(x)-xf^2(x)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=1$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$.

B. $\dfrac{2}{3}$.

C. $\dfrac{4}{3}$.

D. $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $x\in(0;+\infty)$.

Ta có: $x.f'(x) = f(x) - xf^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x) - xf'(x)}{f^2(x)} = x \Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{f(x)}\right]' = x \Rightarrow \dfrac{x}{f(x)} = \dfrac{x^2}{2} + C$

Do $f(1) = 1 \Rightarrow C = \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f(2) = \dfrac{4}{5}$.