|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **LẦN THỨ XII, NĂM 2019**  **ĐỀ THI MÔN: TOÁN HỌC 11** | |
| **Họ và tên:** …………………..……………………………………………… | | **SBD:**………… |

**Câu 1.** Cho dãy số  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện ,  Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn.

**Câu 2 :** Cho có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với  ở . Đường thẳng qua  song song  cắt lần lượt tại . Đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt đường tròn tại điểm  khác , .

a) Chứng minh  thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại  cắt  tại . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Câu 3** Tìm tất cả các đa thức sao cho với mọi số nguyên dương, phương trình có nghiệm nguyên.

**Câu 4.** Cho  là số nguyên tố có dạng . Một tập con  của tập 

được gọi là **“tốt”** nếu như tích của tất cả các phần tử của  không nhỏ hơn tích của tất cả các phần tử của  Ký hiệu  hiệu của hai tích trên. Tìm giá trị nhỏ nhất của số dư khi chia  cho  xét trên mọi tập con tốt của  có chứa đúng  phần tử.

**Câu 5.**  Cho đa giác lồi  đỉnh Mỗi cạnh và đường chéo của đa giác được tô bởi một trong  màu sao cho không có hai đoạn thẳng nào cùng xuất phát từ một đỉnh cùng màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1.** Cho dãy số  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện ,  Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn.

**Lời giải**

Cho dãy số  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện, 

Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn.

Ta có ,  

Đặt , 

Từ  ta có ,  

Vì dãy số  bị chặn trên nên tồn tại số sao cho , 

suy ra ,  

Từ  và ta thấy dãy không giảm và bị chặn trên. Do đó, dãy là dãy hội tụ.

Đặt  và . Ta sẽ chứng minh .

Thật vậy, vì  nên  nhỏ tùy ý,  sao cho ,

Mặt khác ,

nên ta có ,  .

Suy ra ;

;

................

.

.

Vậy, ta có  với  đủ lớn, tức là  với  đủ lớn và  nhỏ tùy ý. Hay ta chứng minh được .

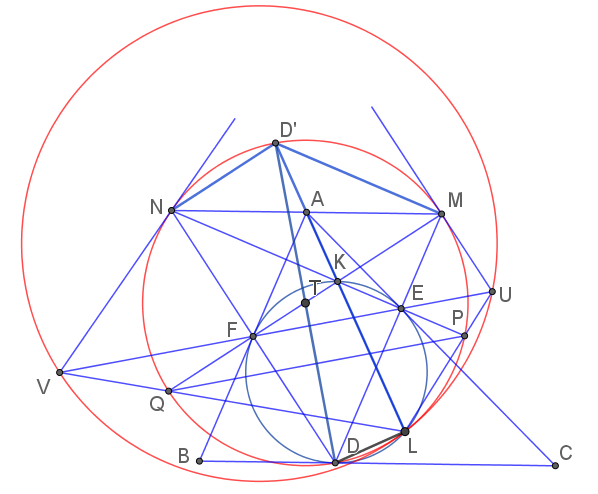
Vậy, dãy  có giới hạn hữu hạn (*đpcm*).

**Câu 2 :** Cho có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với  ở . Đường thẳng qua  song song  cắt lần lượt tại . Đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt đường tròn tại điểm  khác , .

a) Chứng minh  thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại  cắt  tại . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Lời giải**



*a.* *Chứng minh  thẳng hàng.*

***Trước hết ta chứng minh*  *là trực tâm* **

Do  nên .

Do  là tiếp điểm của  trên  nên 

 cân tại .

Chứng minh tương tự ta có  mà  nên 

 vuông tại ;  vuông tại 

 mà  suy ra  là trực tâm 

***Bây giờ ta chứng minh  thẳng hàng:***

+ Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Gọi  là điểm đối xứng của  qua .

Ta có  (vì cùng vuông góc với ),  (vì cùng vuông góc với ).

Do đó  là hình bình hành.

Do A là trung điểm MN nên A cũng là trung điểm KD’.

*Do đó D’, A, K thẳng hàng.(1)*

+ Hơn nữa,  (do  là trực tâm)

Suy ra tứ giác DFKL nội tiếp đường tròn đường kính DK

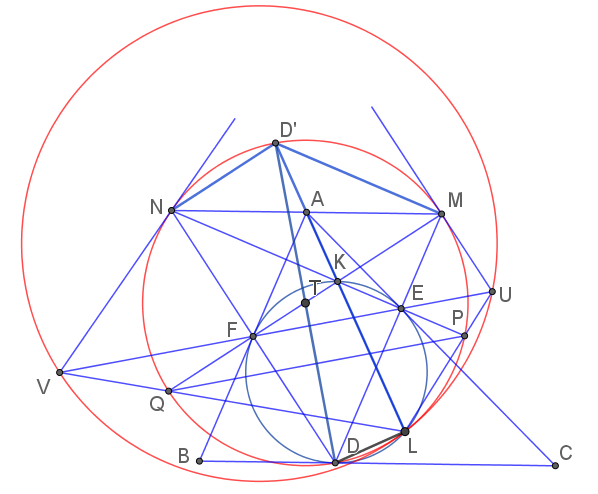
Suy ra DL vuông góc với LK.

Mặt khác DD’ là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN nên DL vuông góc với LD’.

*Do đó L, K, D’ thẳng hàng. (2)*

Từ (1) và (2) suy ra thẳng hàng (đpcm).

b. *Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại  cắt  tại . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác .*



Gọi  là giao của  và ;  là giao  và .

Do  tiếp xúc  tại  nên  (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Do  nên  nội tiếp đường tròn đường kính 

 (cùng bù  )

Nên  cân tại .

Ta có   đồng dạng 

(c.g.c)

 (3)

Lại có  (do  nội tiếp) và  (do  nội tiếp) nên  (3).

Từ (3) và (4) suy ra  thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có  thẳng hàng.

Do  nội tiếp nên .

Do  nội tiếp nên .

Do đó 

Do đó  tiếp xúc với  tại  suy ra  tiếp xúc với  tại  (đpcm).

**Câu 3** Tìm tất cả các đa thức sao cho với mọi số nguyên dương, phương trình có nghiệm nguyên.

**Lời giải**

Rõ ràng  Đặt  và là hệ số bậc cao nhất của không mất tổng quát, coi

Gọi là nghiệm nguyên lớn nhất của phương trình

Dễ thấy  nên , do đó 

Hơn nữa, do  là ước của  nên , với  là số tự nhiên nào đó. Suy ra



Và  .

Do đó, dãy  phải hội tụ đến  (nguyên) nào đó. Kéo theo

. Do đó phải bằng 

Đặt . Từ  ta suy ra . Từ đó, ta tìm được tất cả các đa thức  thỏa mãn là  với  và  là một số nguyên tùy ý

**Câu 4.** Cho  là số nguyên tố có dạng . Một tập con  của tập 

được gọi là **“tốt”** nếu như tích của tất cả các phần tử của  không nhỏ hơn tích của tất cả các phần tử của  Ký hiệu  hiệu của hai tích trên. Tìm giá trị nhỏ nhất của số dư khi chia  cho  xét trên mọi tập con tốt của  có chứa đúng  phần tử.

**Lời giải**

Trước hết, xét tập con  thì rõ ràng  là tập con tốt và

,

trong đó  và thỏa mãn  theo định lý Wilson.

Ta xét các trường hợp:

- Nếu  thì .

- Nếu  thì trong tập con  thay  bởi  thì dễ thấy dấu của  sẽ được thay đổi thành  Khi đó, trong cả hai trường hợp, ta đều chỉ ra được tập con tốt có .

Ta sẽ chứng minh rằng không tồn tại  tốt sao cho  hoặc . Xét một tập con tốt  bất kỳ và gọi  lần lượt là tích các phần tử của  và . Theo định lý Wilson thì .

Khi đó, nếu  thì , vô lý vì ta đã biết  không có ước nguyên tố dạng  Còn nếu  thì , cũng vô lý vì  do theo giả thiết thì.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là 

**Câu 5.**  Cho đa giác lồi  đỉnh Mỗi cạnh và đường chéo của đa giác được tô bởi một trong  màu sao cho không có hai đoạn thẳng nào cùng xuất phát từ một đỉnh cùng màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của .

**Lời giải**

Dễ thấy , bởi vì  thì hiển nhiên có hai đoạn thẳng xuất phát từ một đỉnh được tô cùng một màu.

TH1. Nếu  là số chẵn thì gọi các màu cần tô là . Ta tô màu như sau:

 tô màu  và  tô màu .

Cách tô màu này thỏa mãn đề bài. Thật vậy

+ Nếu  tô cùng màu thì  Vô lí !

+ Nếu  tô cùng màu thì  Vô lí !

+ Nếu  cùng màu thì  Vô lí !

Vậy cách như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Như vậy  . (1)

TH2: Nếu  là số lẻ thì giả sử tô với  màu là . Khi đó, tất cả các đoạn thẳng có màu xóa hết chỉ còn lại các đoạn thẳng đều có màu 0. Suy ra  do đó  (Vì tổng số bậc bằng 2 lần số cạnh). Điều này vô lí. Do đó 

Với  ta chỉ tô màu như sau: Gọi  màu cần tô là  thì  tô màu . Cách tô này thỏa mãn yêu cầu bài toán . Thật vậy  tô cùng màu thì  vô lí.

Như vậy  (2)

Từ (1) và (2) suy ra 

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

https://www.vnteach.com