

PHÒNG GD&ĐT HẢI LĂNG

KỶ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN
CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2008-2009
ĐỀ THI VÒNG II
(Thời gian làm bài 120 phút)

Bài 1: (2 điểm) Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$; a, b, c đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$ bằng bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2: (2 điểm) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5^x + 2 \cdot 5^y + 5^z = 4500$ với $x < y < z$.

Bài 3: (2 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$

Bài 4: (2 điểm) Tìm một số có hai chữ số; biết rằng số đó chia hết cho 3 và nếu thêm số 0 vào giữa các chữ số rồi cộng vào số mới tạo thành một số bằng hai lần chữ số hàng trăm của nó thì được một số lớn gấp 9 lần số phải tìm.

Bài 5: (2 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A, có góc $BAC = 20^\circ$. Trên AC lấy điểm E sao cho góc $EBC = 20^\circ$. Cho $AB = AC = b$, $BC = a$

a) Tính CE.

b) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Hướng dẫn và thang điểm chấm Toán vòng 2

Kỳ thi học sinh giỏi cấp huyện năm học 2008-2009

Bài 1: (2 điểm)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \\ & = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c} \cdot \frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-a} \cdot \frac{1}{a-b} \right) \quad (1đ) \\ & = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 - 2 \frac{c-a+b-c+a-b}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (0.5đ) \\ & = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 \quad (0.5đ) \end{aligned}$$

Bài 2: (2 điểm) $5^x + 2.5^y + 5^z = 4500$ (*)

$$5^x (1 + 2.5^{y-x} + 5^{z-x}) = 4500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \quad (0.5đ)$$

$$\Rightarrow 5^x = 5^3; 1 + 2.5^{y-x} + 5^{z-x} = 36 = 1 + 35 \quad (0.5đ)$$

$$\Rightarrow x = 3; 5^{y-x} (2 + 5^{z-y}) = 5 \cdot 7 \quad (0.25đ)$$

$$\Rightarrow x = 3; y - 3 = 1; 2 + 5^{z-y} = 7 = 2 + 5 \quad (0.25đ)$$

$$\Rightarrow x = 3; y = 4; z - y = 1 \quad (0.25đ)$$

$$\Rightarrow x = 3; y = 4; z = 5 \text{ thoả (*)} \quad (0.25đ)$$

Bài 3: (2 điểm)

$$A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2} = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = \quad (0.5đ)$$

$$= -3 + \left(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \quad (0.5đ)$$

$$= -3 + \left(2 - \frac{1}{x} \right)^2 \geq -3 \quad (0.5đ)$$

$$\text{Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi } \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad (0.5đ)$$

Bài 4: (2 điểm)

Gọi số cần tìm là \overline{ab} . Ta có: $\overline{ab} : 3$ và $\overline{a0b} + 2a = 9\overline{ab}$ (0.25đ)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b) : 3 \\ 100a+b+2a=9(10a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b) : 3 \\ 3a=2b \end{cases} \quad (0.5đ)$$

Từ $3a = 2b \Rightarrow 2b : 3$ mà $(2,3) = 1 \Rightarrow b : 3$ do $(a+b) : 3 \Rightarrow a : 3$ mà $3a : 2 \Rightarrow a : 2$ (0.5đ)

Ta có $a : 3, a : 2, (2,3) = 1 \Rightarrow a : 6, 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 9$ Vậy $\overline{ab} = 69$ (0.5đ)

Bài 5: (2 điểm)

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác BCE (hai tam giác cân có góc đỉnh bằng

$$20^\circ \text{ và góc đáy bằng } 80^\circ) \text{ nên } \frac{CE}{BC} = \frac{BC}{AB} \quad (0.5đ)$$

Và $BE = BC = a$, suy ra $CE = \frac{a^2}{b}$ (0.5đ)

b) Dựng $AD \perp BE$, suy ra $BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}b$

ta có: $AE^2 = ED^2 + AD^2$, $AB^2 = BD^2 + AD^2$ do đó

$$AB^2 = BD^2 + EA^2 - DE^2 \quad (0.5đ)$$

Thay vào ta được: $b^2 = \frac{b^2}{4} + \left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - a\right)^2$

$$= \frac{b^2}{4} + b^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2a^2 - \frac{b^2}{4} - a^2 + ab$$

$$\Leftrightarrow b^4 = b^4 + a^4 - 3a^2b^2 + ab^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2 \quad (0.5đ)$$

