CHỦ ĐỀ 5. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Lũy thừa bậc *n* của một số hữu tỉ x, kí hiệu x"là tích của *n* thừa số x (n là số tự nhiên lớn hơn 1)

$x^n = \underbrace{x.\ x...x}_{n}$ ($x \in Q$, $n \in N$, $n > 1$)

- Quy ước: $x^1 = x$ với $\forall x \in Q$; $x^\circ = 1$ với $\forall x \neq 0$.

- Khi số hữu tỉ $x = \frac{a}{b}(a,b \in Z, b \neq 0)$ ta có : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

- Chú ý: $x^{2n} \geq 0$ với $\forall x \in Q$; $\forall n \in N$.

x^{2n-1} cùng dấu với dấu của x;

$(-x)^{2n} = x^{2n}$ và $(-x)^{2n-1} = x^{2n+1}$

2. Các phép toán về lũy thừa

- Tích hai lũy thừa cùng cơ số:

$x^m . x^n = x^{m+n}$ ($x \in Q$, $m,n \in N$).

- Thương hai lũy thừa cùng cơ số:

$x^m : x^n = x^{m-n}$ ($x \in Q^*$, $m, n \in N$, $m > n$).

- Lũy thừa của lũy thừa:

$(x^m)^n = x^{m}$-n ($x \in Q$, $m,n \in N$).

- Lũy thừa của một tích:

$(x.y)^n = x^n . y^n$ ($x, y \in Q$, $n \in N$).

- Lũy thừa của một thương : $\left(\frac{x}{n}\right)^n = \frac{x^n}{n^n}(x,y \in Q, n \in N)$

- Lũy thừa số mũ nguyên âm:

Với $x \in Q$, $x \neq 0$; $n \in N^*$ ta có: $x^n = \frac{1}{x^n}$

- Hai lũy thừa bằng nhau:

* Nếu $x^m = x^n$ thì $m = n$ với ($x \neq 0$; $x \neq \pm 1$).

* Nếu $x^n = y^n$ thì $x = y$ nêu n lẻ, $x = \pm y$ nếu n chẵn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng định nghĩa của lũy thừa với số mũ tự nhiên

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa lũy thừa của một số hữu tỉ:

$x^n = \underbrace{x.x...x}_{n}$ ($x \in Q$, $n \in N$, $n > 1$) và các quy ước

$x^1 = x$ với $\forall x \in Q$; $x^0 = 1$ với $\forall x \neq 0$

1A. a) Tính: $\left(\frac{-2}{3}\right)^4; \left(-\frac{1}{3}\right)^3; \left(-1\frac{5}{7}\right)^2; (-0,4)^4; (-1,34)^0.$

b) Viết các tích sau dưới dạng lũy thừa

i) 3.27.9. ii) 25.5.125; iii) $\frac{2}{3}.\frac{4}{9}.\frac{8}{27}$.

1B. a) Tính ; $\left(\frac{-1}{3}\right)^3; \left(-\frac{2}{3}\right)^3; \left(-1\frac{3}{4}\right)^2; (-0,6)^4; (-1,56)^0$

b)Viết các tích sau dưới dạng lũy thừa

i) 2.16.8 ii) 49.7.343; iii) $\frac{3}{4}.\frac{9}{16}.\frac{27}{64}$

Dạng 2. Tính tích và thương của hai lũy thừa cùng cơ số

Phương pháp giải: Ta sử dụng các công thức về tích hai lũy thừa cùng cơ số:

$x^m . x^n = x^{m+n}$ ($x \in Q$, $m, n \in N$)

$x^m : x^n = x^{m-n}$ ($x \in Q^*$, $m, n \in N$, $m \geq n$)

2A. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 . \left(\frac{1}{4}\right)^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{2}{5}\right)^2$;

c) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 : \left(-\frac{35}{24}\right)^2$; d) $25.5^{-1}.5^0$.

2B. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 . \left(\frac{4}{5}\right)^3$; b) $\left(\frac{1}{9}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^3$;

c) $\left(\frac{9}{5}\right)^5 : \left(\frac{27}{-20}\right)^5$; d) $3^3.9^{-1}$.

Dạng 3. Tìm số mũ, cơ số của một lũy thừa

Phương pháp giải:Ta sử dụng các tính chất sau:

- Nếu $x^m = x^n$ thì m = n với ($x \neq 0$; $x \neq \pm 1$).

- Nếu $x^n = y^n$ thì x = y nếu n lẻ, x = ± y nếu n chẵn.

- Nếu $x^m < x^n$ ($x > 1$) $\Leftrightarrow$ m < n.

3A. Điền số thích hợp vào ô vuông :

a) $16 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\square}$; b) $-\frac{64}{125} = \left(\frac{\square}{5}\right)^3$; c) $0,01 = (0,1)^{\square}$.

3B. Điền số thích hợp vào ô vuông :

a) $64 = \square^3$; b) $-\frac{27}{8} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{\square}$; c) $0,25 = \left(\frac{1}{\square}\right)^2$.

4A. Tìm các số nguyên x, y biết:

a) $(x - 1,2)^2 = 4$; b) $(x + 1)^3 = -125$;

c) $3^{4-x} = 27$; d) $(x + 1,5)^8 + (2,7 - y)^{10} = 0$;

e) $3^{-1}.4^x = \frac{5}{3}.2^7$; f) $9^{-x}.27^x = 243$.

4B. Tìm các số nguyên x, y biết:

a) $(x - 1,5)^2 = 9$; b) $(x - 2)^3 = 64$;

c) $2^{4-x} = 32$; d) $(x + 1,5)^2 + (y - 2,5)^{10} = 0$.

e) $2^{-2}.2^x + 2.2^x = 9.2^6$; f) $3^{-2}.3^4.3^x = 3^7$.

Dạng 4. So sánh lũy thừa

Phương pháp giải: Để so sánh lũy thừa ta thực hiện như sau:

- Biến đổi các lũy thừa cần so sánh về dạng có cùng số mũ hoặc cùng cơ số.

- Có thể sử dụng lũy thừa trung gian để so sánh.

5A. So sánh:

a) 2^{24} và 3^{16}; b) 2^{300} và 3^{200}; c) 71^5 và 7^{20};

5B. So sánh:

a) -2^{30} và -3^{20}; b) $(-5)^9$ và $(-2)^{18}$; c) 35^5 và 6^{10}.

6A. Tìm số nguyên dương n, biết:

a) $25 < 5^n < 625$; b) $3.27 > 3^n \geq 9$; c) $16 \leq 8^n \leq 64$.

6B. Tìm $n \in Z$, biết:

a) $49 < 7^n < 343$; b) $9 < 9^n \leq 243$; c) $121 \geq 11^n \geq 1$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Tính giá trị biểu thức:

a) $\frac{(-3)^{10}.15^5}{25^3.(-9)^7}$; b) $2^3+3\left(\frac{1}{9}\right)^0-2^{-2}.4+\left[(-2)^2:\frac{1}{2}\right].8$.

8. Tìm x, y, biết

a) $(5x+1)^2=\frac{36}{49}$; b) $\left(x-\frac{2}{9}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^6$;

c) $(8x-1)^{2x+1}=5^{2x+1}$; d) $(x-3,5)^2+\left(y-\frac{1}{10}\right)^4\le 0$.

9. Viết số hữu tỉ $\frac{81}{625}$ dưới dạng một lũy thừa. Nêu tất cả các cách viết.

10. So sánh các số sau:

a) 3^{35} và 5^{20}; b) 37^8 và 2^{32}.

11*. a) Cho biết $1^2+2^2+3^2+...+10^2=385$.

Tính $A=3^2+6^2+9^2+...+30^2$.

b) Cho biết $1^3+2^3+3^3+...+10^3=3025$

Tính $B=2^3+4^3+6^3+...+20^3$.

12.*. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì:

a) $A=3^{n+3}+3^{n+1}+2^{n+2}+2^{n+1}$ chia hết cho 6;

b) $B=3^{n+3}-2^{n+3}+3^{n+2}-2^{n+1}$ chia hết cho 10;

HƯỚNG DẪN

1A. a) $\left(\frac{-2}{3}\right)^4=\frac{(-2)^4}{3^4}=\frac{16}{81};\left(-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{(-1)^3}{3^3}=-\frac{1}{27}$;

$\left(-1\frac{5}{7}\right)^2=\left(\frac{-12}{7}\right)^2=\frac{144}{49};(-0,4)^4=\left(\frac{-2}{5}\right)^5=\frac{16}{625};(-1,34)^0=1$

b) i) $3.27.9=3^6$ ii) $25.5.125=5^6$

iii) $\frac{2}{3}.\frac{4}{9}.\frac{8}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^6$

1B. Tương tự **1A.**

a) $\left(\frac{-1}{3}\right)^{-3} = -\frac{1}{27}$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = -\frac{8}{27}$; $\left(-1\frac{3}{4}\right)^{-4} = \frac{49}{16}$

$(-0,6)^4 = \frac{81}{625}$ $(1,56)^0 = 1$

b) i) $2.16.8 = 2^8$ ii) $49.7.343 = 7^6$ iii) $\frac{3}{4}.\frac{9}{16}.\frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^6$

2A. a) $\frac{1}{512}$ b) $\frac{1}{25}$ c) $\frac{36}{49}$ d) 5

2B. Tương tự **2A**

a) 8 b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1024}{243}$ d) 3

3A. a) $16 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ b) $-\frac{64}{125} = \left(\frac{-4}{5}\right)^3$ c) $0,01 = (0,1)^2$ **3B.** Tương tự **3A**

4A. a) Từ đề bài suy ra $x - 1,2 = 2$ hoặc $x - 1,2 = -2$. Tìm được $x \in \{-0,8;3,2\}$

b) Từ đề bài ta có $x = 1 = -5$, tìm được $x = -6$

c) Từ đè bai ta có $3^{4-x} = 3^3$

d) ta chứng minh được $(x + 1,5)^8 + (2,7 - y)^{10} \geq 0$ $\forall x, y$ vì vậy để $(x + 1,5)^8 + (2,7 - y)^{10} = 0$ thì $x + 1,5 = 0$ và $2,7 - y =)$. Từ đó tìm được $x = -1,5; y = 2,7$.

4B. Tương tự **4A**

a) $x \in \{-1,5; 4,5\}$ b) $x = 6$

c) $x = -1$ d) $x = -1,5$; $y = 2,5$

5A. a) Ta có $2^{24} = 2^{3.8}$ và $3^{16} = 3^{2.8} = 9^8$ nên $2^{24} < 3^{16}$;

b) $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ và $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$ nên $2^{300} < 3^{200}$;

c) Ta có $71^5 < 81^5$ mà $81^5 = (3^4)^5 = 3^{20} < 7^{20}$ nên $71^5 < 7^{20}$;

5B. Tương tự **5A**

a) $-2^{30} > -3^{20}$ b) $(-5)^9 < 0 < (-2)^{18}$ c) $35^5 < 6^{10}$

6A. a) Từ đề bài suy ra $5^2 < 5^n < 5^4$, tìm được $n = 3$

b) Từ đề bài suy ra $3^4 > 3^n \geq 3^2$, tìm được $n \in \{2; 3\}$

c) Từ đề bài suy ra $2^4 \leq 2^{3n} \leq 2^6$, tìm được $n = 2$

6B. Tương tự **6A**

a) $n \in \varnothing$ b) n = 2 c) $n \in \{0; 1; 2\}$

7. a) $-\frac{3}{5}$ b) 74

8. a) $x \in \left\{\frac{-13}{35}; \frac{-1}{35}\right\}$ b) $x = \frac{2}{3}$

c) $x \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\}$ d) $x = \frac{7}{2}$; $y = \frac{1}{10}$

9. $\frac{81}{625} = \left(\frac{9}{25}\right)^2 = \left(-\frac{9}{25}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(-\frac{3}{5}\right)^4$

10. Tương tự **5A**

11*. a) Ta có $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...10^2 = 385$

Suy ra $(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2).3^2 = 385.3^2$

Do đó ta tính được $A = 3^2 + 6^2 + 9^2 + ... + 30^2 = 3465$.

b) Tương tự ý a) tính được B = 24200

12*. a) Từ đề bài ta có $A = 3^{n+1}(3^2 + 1) + 2^{n+1}(2 + 1) = 3^n.3.2.5 + 2^n.2.3$

=> ĐPCM;

b) Từ đề bài ta có $B = 3^{n+1}(3^2 + 1) - 2^{n+1}(2^2 + 1) = 3^{n+1}.10 - 2^n.2.5$

=> ĐPCM;