

ĐỀ SỐ 26

HSG TOÁN 9 VINH PHÚC NĂM HỌC 2023-2024

Câu 1. (2,5 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2 y^2}{(1+x)(1-y)}$

a, Rút gọn biểu thức P

b, Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $P = 2$.

Câu 2. (2,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng

$(d_1): y = 2x - m^2 + 1, (d_2): y = x - m^2 - m$ và $(d_3): y = 3x - m^2 - m + 2$. Biết (d_1) cắt (d_2) và (d_3) lần lượt tại $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

Tìm m để $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 320$.

Câu 3. (2,0 điểm) Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết P(x) chia hết cho

$(x - 2)$ và P(x) chia hết cho $(x^2 - 1)$ thì dư là $2x$. Tính P(3).

Câu 4. (2,0 điểm) Giải phương trình $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$.

Câu 5. (2,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 7y = (x+y)^2 + x^2 y + 7x + 4 \\ 3x^2 + y^2 + 8y + 4 = 8x \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 6. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao là AH. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Tính chu vi tam giác IHK biết $BH = 18\text{cm}, CH = 32\text{cm}$.

Câu 7. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại điểm G. Gọi K là một điểm trên cạnh BC, đường thẳng (d_1) đi qua K và song song với CN cắt AB tại D, đường thẳng (d_2) đi qua K và song song với BM cắt AC tại E. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng KG và DE. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng DE.

Câu 8. (2,0 điểm) Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ là AB và $BC = BD$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng CD. Đường thẳng (d) đi qua điểm H cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt tại E, F sao cho D nằm giữa A và F. Chứng minh rằng $\widehat{DBF} = \widehat{EBC}$

Câu 9. (2,0 điểm) Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng với giá bán mỗi quả là 50 000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả mỗi ngày. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả bưởi là 30 000 đồng.

Câu 10. (1,5 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh $\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3+c^3}{a^2}>\sqrt{2}$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2, 5 điểm)

a, ĐK:
$$\begin{cases} x \neq -y \\ x \neq -1 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$P = \frac{x^2(1+x) - y^2(1-y) - x^2y^2(x+y)}{(x+y)(1+x)(1-y)}$$

$$\dot{=} \frac{(x^3+y^3) + (x^2-y^2) - x^2y^2(x+y)}{(x+y)(1+x)(1-y)}$$

$$\dot{=} \frac{(x+y)(x-y+x^2-xy+y^2-x^2y^2)}{(x+y)(1+x)(1-y)}$$

$$\dot{=} \frac{(x+y)(1+x)(1-y)(x+xy-y)}{(x+y)(1+x)(1-y)}$$

$$\dot{=} x+xy-y$$

b, $P = 2 \Rightarrow x(y+1) = y+2$

$$\begin{cases} y \neq -1 \\ x = 1 + \frac{1}{y+1} \end{cases}$$

Vì x, y thuộc Z nên (y + 1) là ước của 1, suy ra y + 1 = 1 hoặc y + 1 = -1

$$\text{Vậy } \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

Ta có:

$$(d_1): y = 2x - m^2 + 1 \text{ cắt } (d_2): y = x - m^2 - m, \text{ tại điểm } A(-1-m; -m^2 - 2m - 1).$$

$$(d_1): y = 2x - m^2 + 1 \text{ cắt } (d_3): y = 3x - m^2 - m + 2 \text{ tại điểm } B(-1+m; -m^2 + 2m - 1).$$

$$\text{Ta có } (x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y)^2 = 320 \Rightarrow (-2m)^2 + (-4m^2)^2 = 320$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 16m^4 = 320 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4. \text{ Vậy } m = \pm 4.$$

Câu 3. (2,0 điểm)

Vì $P(x)$ chia hết cho $(x - 2)$ nên $P(2) = 8 + 4a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = -8 - 4a - 2b$

Do $P(x)$ chia hết cho $(x^2 - 1)$ thì dư $2x$ nên $P(x) - 2x$ chia hết cho $(x^2 - 1)$, suy ra

$$\begin{cases} P(1) - 2 = 0 \\ P(-1) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \end{cases}$$

Thay $c = -8 - 4a - 2b$ ta có hệ

$$\begin{cases} 3a + b = -9 \\ 3a + 3b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-10}{3} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow P(x) = x^3 - \frac{10}{3}x^2 + x + \frac{10}{3} \Rightarrow P(3) = \frac{10}{3}. \text{ Vậy } P(3) = \frac{10}{3}$$

Câu 4. (2,0 điểm)

$$\text{Điều kiện: } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

Áp dụng Bunhiacopski, ta có:

$$VT = 1 \cdot \sqrt{2x-3} + 1 \cdot \sqrt{5-2x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(2x-3+5-2x)} = 2 \quad (1)$$

$$VP = 3x^2 - 12x + 14 = 3(x-2)^2 + 2 \geq 2, \forall x \quad (2)$$

Phương trình $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-3} = \sqrt{5-2x} \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Câu 5. (2,0 điểm)

$$\text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 7y = (x+y)^2 + x^2y + 7x + 4 \quad (1) \\ 3x^2 + y^2 + 8y + 4 = 8x \quad (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được $x^3 + 7y = (x+y)^2 + x^2y + 7x - 3x^2 - y^2 - 8y + 8x$

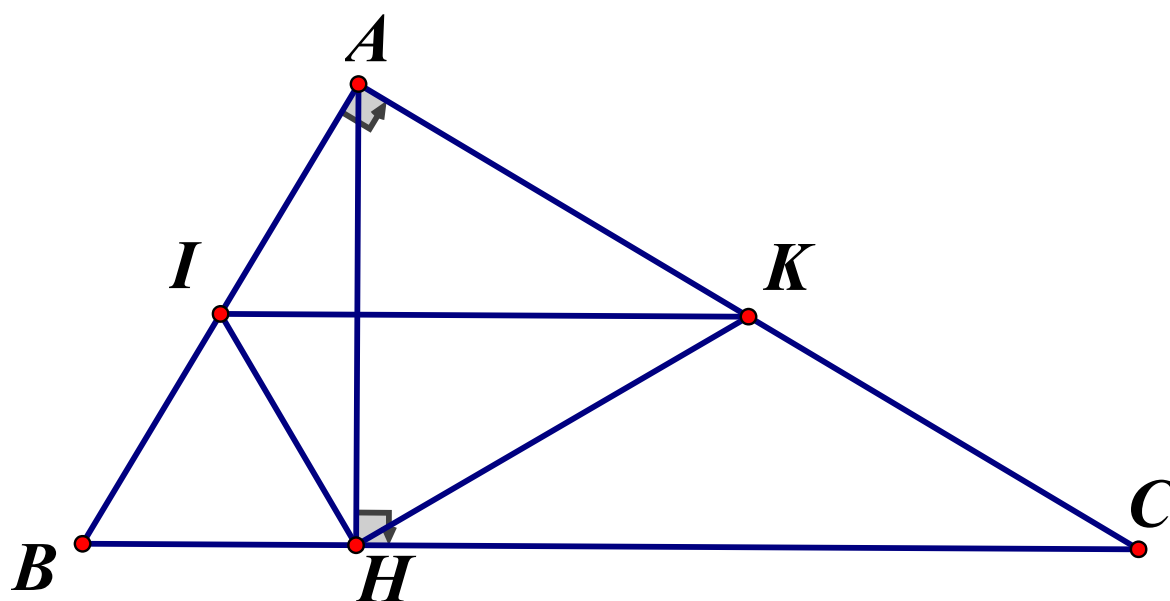
$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + 2x - 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=3 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$\text{Với } x=3 \text{ thay vào (2) ta được } y^2 + 8y + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=-7 \end{cases}$$

Với $y = x$ thay vào (2) ta được $x^2 = -1$ (VN)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) \in \{(3;-1); (3;-7)\}$.

Câu 6. (2,0 điểm)



Ta có: $BC = BH + CH = 50 \text{ cm}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AB^2 = BH \cdot BC = 900 \Rightarrow AB = 30 \text{ cm}$$

$$AC^2 = CH \cdot BC = 1600 \Rightarrow AC = 40 \text{ cm}$$

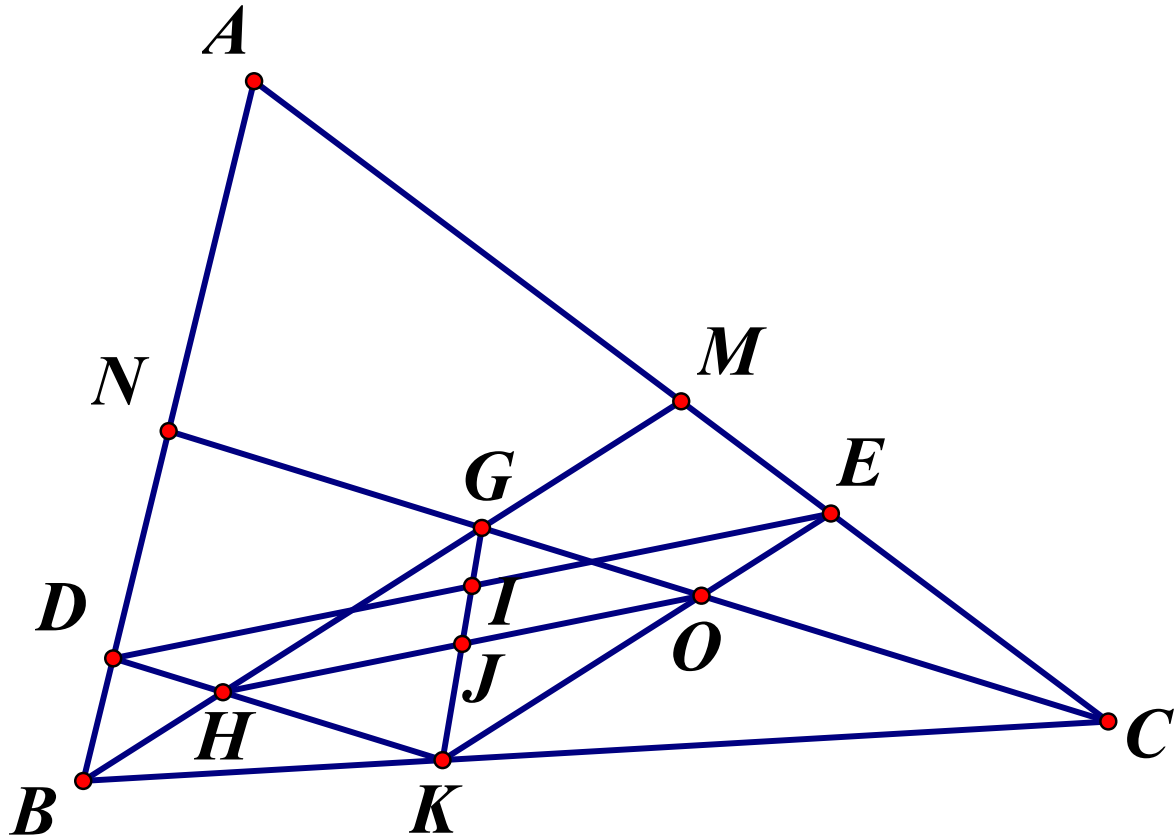
Tam giác AHB vuông tại H có đường trung tuyến $HI \Rightarrow HI = \frac{1}{2} AB = 15 \text{ cm}$

Tam giác AHC vuông tại H có đường trung tuyến $HK \Rightarrow HK = \frac{1}{2} AC = 20 \text{ cm}$

Tam giác ABC có đường trung bình $IK \Rightarrow IK = \frac{1}{2} BC = 25 \text{ cm}$

Vậy chu vi tam giác IHK bằng 60 cm.

Câu 7. (2,0 điểm)



Gọi DK cắt BM tại H, KE cắt CN tại O và GK cắt HO tại J.

Tứ giác HGOK có: $\begin{cases} HK \parallel GO \\ HG \parallel KO \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác HGOK là hình bình hành

$\Rightarrow J$ là trung điểm của HO $\Rightarrow HO = HJ = OJ$.

Tam giác BNG có DH song song NG $\Rightarrow \frac{DH}{NG} = \frac{BH}{BG}$ (1)

Tam giác BGC có HK song song GC $\Rightarrow \frac{HK}{GC} = \frac{BH}{BG}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{DH}{NG} = \frac{BH}{BG} \Rightarrow \frac{DH}{HK} = \frac{NG}{GC} = \frac{1}{2}$ (*) (Do G là trọng tâm tam giác ABC)

Cmtt ta có: Tam giác CMG có OE song song GM, suy ra $\frac{OE}{GM} = \frac{OC}{CG}$ (3)

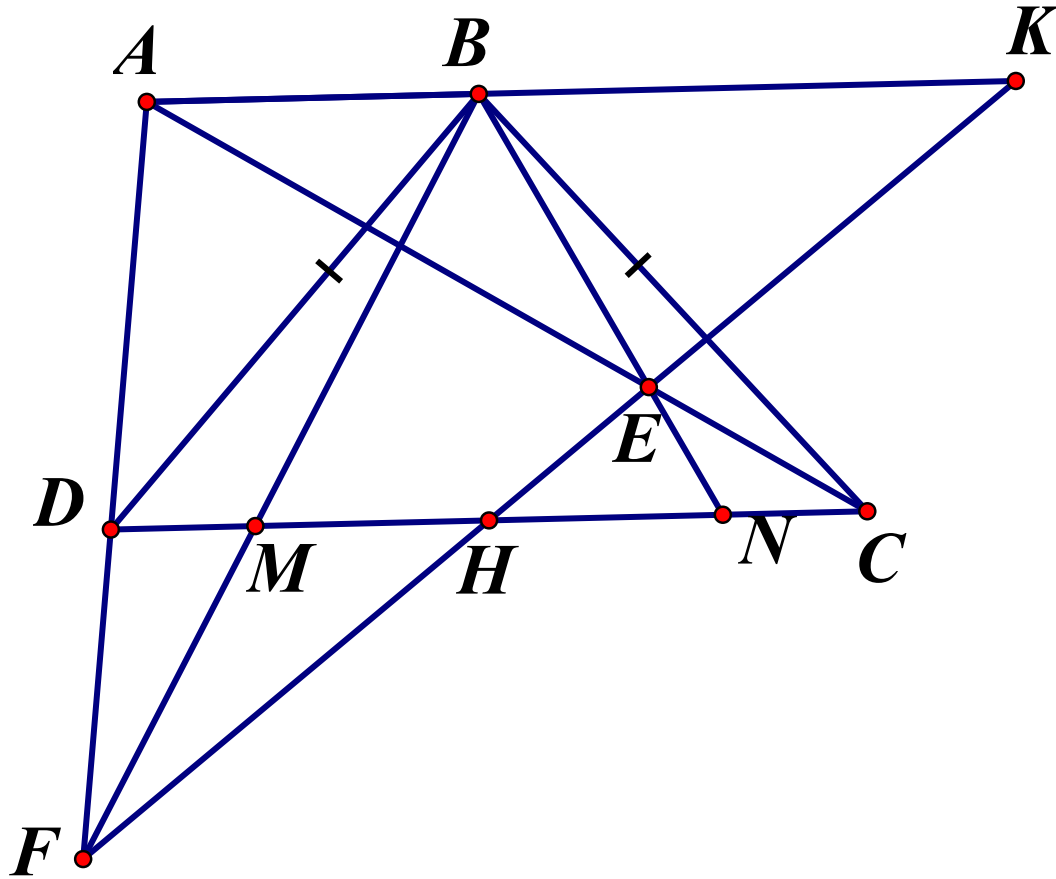
Tam giác CBG có OK song song BG, suy ra $\frac{OK}{GB} = \frac{OC}{CG}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{OE}{GM} = \frac{OC}{CG} \Rightarrow \frac{OE}{OK} = \frac{GM}{GB} = \frac{1}{2}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\frac{DH}{HK} = \frac{OE}{OK} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta DKE$ có OH song song DE.

Lại có J là trung điểm HO suy ra I là trung điểm DE.

Câu 8. (2,0 điểm)



Gọi M là giao điểm của BF và CD, N là giao của BE và CD, K là giao điểm của EF và AB.

$$\text{Xét tam giác FAB có DM song song AB} \Rightarrow \frac{DM}{AB} = \frac{FD}{FA} \quad (1)$$

$$\text{Xét tam giác FAK có DH song song AK} \Rightarrow \frac{DH}{AK} = \frac{FD}{FA} \quad (2)$$

$$\text{Xét tam giác ENC có AB song song NC} \Rightarrow \frac{NC}{AB} = \frac{EC}{EA} \quad (3)$$

$$\text{Xét tam giác EHC có AK song song HC} \Rightarrow \frac{HC}{AK} = \frac{EC}{EA} \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{DM}{AB} = \frac{DH}{AK} \Rightarrow DM = \frac{DH \cdot AB}{AK} \quad (5)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{NC}{AB} = \frac{HC}{AK} \Rightarrow NC = \frac{HC \cdot AB}{AK} = \frac{HD \cdot AB}{AK}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $DM = NC$.

Vì $BD = BC$ nên tam giác BCD cân tại B , suy ra $\widehat{BDM} = \widehat{BCN}$.

Suy ra $\Delta BDM = \Delta BCN \Rightarrow \widehat{DBF} = \widehat{EBC}$.

Câu 9. (2,0 điểm)

Gọi x là giá bán thực tế để có lợi nhuận (x : đồng, $30\,000 \leq x \leq 50\,000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được trong 1 ngày là:

$$40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = \frac{-1}{100}x + 540$$

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(\frac{-1}{100}x + 540 \right) \cdot (x - 30000) = \frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$$

$$\text{Ta có: } f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4200 \right)^2 + 1440000 \leq 1440000, \forall x \in [30000; 50000]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [30000; 50000]} f(x) = F(4200) = 1440000$$

Vậy với giá bán 42 000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 10. (1,5 điểm)

Chúng minh bổ đề: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}, \forall x, y \in R; a, b > 0$.

$$\text{Thật vậy: } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)(x^2b + y^2a) \geq ab(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (xb - ya)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}. \text{ Dấu "}" xảy ra khi } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

Áp dụng bổ đề ta có:

$$\text{VTVT} = \frac{a^4}{a(b^2 - bc + c^2)} + \frac{b^4}{a^2b} + \frac{c^4}{a^2c} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a(b^2 - bc + c^2) + a^2b + a^2c} = \frac{1}{a[b^2 - bc + c^2 + a(b+c)]}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$a(b+c) \leq \frac{a^2 + (b+c)^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{a[b^2 - bc + c^2 + a(b+c)]}$$

$$\geq \frac{1}{a \left[b^2 - bc + c^2 + \frac{a^2 + (b+c)^2}{2} \right]} = \frac{2}{a(a^2 + 3b^2 + 3c^2)} = \frac{2}{a(3 - 2a^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số $2a^3, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta có $2a^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 3a$

$$\Rightarrow a(3 - 2a^2) \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{a(3 - 2a^2)} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3 + c^3}{a^2} \geq \sqrt{2} \text{ (ĐPCM)}.$$