# Chuyên đề TS10\_5. BẤT ĐẲNG THỨC

**1. BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG**





|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 1** |  |
| Chứng minh rằng: .  Trong đó tử số có 2010 dấu căn, mẫu số có 2009 dấu căn. | |

Đặt ( có 2010 dấu căn),



suy ra (có 2009 dấu căn), nên ,



do đó ta có



Do , nên , suy ra .



|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 2** |  |
| Cho a, b là hai số thực thỏa mãn . Chứng minh: . | |

Ta có: (1)



Ta có



(2)



Từ (1) và (2)



|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 3** |  |
| Chứng minh rằng: với mọi số thực . Suy ra với là các số dương ta luôn có:. | |

Khai triển vế phải: được vế trái



Ta có:



Đặt: vì dương.



Từ đó hay .



|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Cho a, b, c>0. Chứng minh rằng:. | |

Ta có:



Tương tự ta có: .



Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:



Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 5** |  |
| Chứng minh rằng: Với mọi số thực a ta có . | |

Ta có:



Đặt . Ta có:



**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1.** Cho , chứng minh:



**Giải**

Ta có



**Bài 2.** Chứng minh rằng: .



Giải

- Ta có:



- Với



- Với



Do đó: .



**Bài 3.** Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng: .



**Giải**



Mặt khác



Nhân từng vế ta có:



**Bài 4.** Chứng minh: (Bunhiacopski)



Áp dụng: Cho . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Giải**

Ta có:



Dấu xảy ra khi . Áp dụng hằng đẳng thức trên ta có:



Dấu "=" xảy ra khi



**Bài 5.** Chứng minh rằng ta có: với là ba cạnh và là nữa chu vi của một tam giác.



**Giải**

Ta có:



Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng do các bất đẳng thức của ba cạnh trong một tam giác.

**Bài 6.** Cho . Chứng minh rằng .



**Giải**

Với ta có



(1)



Hoàn toàn tương tự: (2); (3)



Cộng (1),(2), (3) ta được điều phải chứng minh.

**Bài 7.** Cho ba số thỏa . Chứng minh rằng



**Giải**

Ta có



Ta có



Ta có



Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được



**Bài 8.** Cho . Chứng minh rằng



**Giải**

Ta có

(\*)



Ta có:

(1)



(2)



Cộng (1) với (2) theo vế ta được (\*)



Vậy . Dấu "=" khi và



**Bài 9.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên ta có



**Giải**

Mỗi số hạng trong tổng có dạng



Ta có



Do đó ; ; …;



Suy ra



Bài 10.

**2. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHUY.**



**Ghi nhớ**

Để sử dụng bất đẳng thức Cosi, các em phải trình bày chứng minh đầu bài giải.



|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 1** |  |
| Với , chứng minh rằng . | |

Ta có



Ta sẽ chứng minh



Ta có



(đpcm)



Một số dạng tương tự: 1) 2)





|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 2** |  |
| Với chứng minh rằng | |

Ta có



(đpcm)



|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Với chứng minh rằng | |



|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 5** |  |
| Với thỏa mãn điều kiện Chứng minh rằng . | |



|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 6** |  |
| Với chứng minh rằng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Với chứng minh rằng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Với chứng minh rằng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Với chứng minh rằng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Với chứng minh rằng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Với chứng minh rằng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Với chứng minh rằng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Với chứng minh rằng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Với chứng minh rằng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4** |  |
| Với chứng minh rằng | |