HSG TOÁN 9 MÊ LINH 2023-2024

Câu 1: (5 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

b) Cho $S=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$ là một tích của 2019 thừa số. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản

Câu 2: (5 điểm)

a) Biết a,b là các số nguyên dương thỏa mãn a^2-ab+b^2 chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 9^n+11 là tích của $k\left(k\in N, k\geq 2\right)$ số tự nhiên liên tiếp .

Câu 3: (3 điểm)

a) Cho x,y,z là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Với các số thực dương a,b,c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca-abc$

Câu 4 (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xuc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi S là giao điểm của AI và DE

a) Chứng minh tam giác IAB đồng dạng với am giác EAS.

b) Gọi K là trung điểm của AB và O là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm K, O, S thẳng hang

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh rằng AM= AN

Câu 5: (1 điểm)

Xét bảng ô vuông cỡ 10 10 × gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kỳ đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

ĐKXĐ: $x\geq 1$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[3]{2-x}\\ b=\sqrt{x-1}\end{cases}$ với $a\leq 1,b\geq 0$

$\Rightarrow\begin{cases}a^3=2-x\\ b^2=x-1\end{cases}\Rightarrow a^3+b^2=1$

Từ (*) ta có: $a=1-b\Rightarrow b=1-a$

Thay $b=1-a$ vào hệ thức $a^3+b^2=1\Rightarrow a^3+(1-a)^2=1\Leftrightarrow a^3+a^2-2a+1=1$

$\Leftrightarrow a^3+a^2-2a=0\Leftrightarrow a(a^2+a-2)=0\Leftrightarrow a(a+2)(a-1)=0$

*. Nếu $a=0$ (thỏa mãn) $\Rightarrow b=1$. Ta được $\begin{cases}2-x=0\\ x-1=1\end{cases}\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn ĐKXĐ)

*. Nếu $a+2=0\Leftrightarrow a=-2\Rightarrow b=3$ Ta được $\begin{cases}2-x=-8\\ x-1=9\end{cases}\Leftrightarrow x=10$ (Thỏa mãn ĐKXĐ)

*. Nếu $a-1=0\Leftrightarrow a=1\Rightarrow b=0$. Ta được $\begin{cases}2-x=1\\ x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1;2;10\}$

b) $S=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$.

Với $n\in N$ ta có: $1-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$

Áp dụng kết quả trên đó ta có:

$$S=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}\ldots\frac{2019.2022}{2020.2021}=\frac{(1.2.3\ldots2019)(4.5.6\ldots2022)}{(2.3.4\ldots2020)(3.4.5\ldots2021)}=\frac{1.2022}{2020.3}=\frac{337}{1010}$$

Vậy $S=\frac{337}{1010}$

Câu 2:

a) Ta có: $\left(a^2+ab+b^2\right)\vdots 0 \Rightarrow 4\left(a^2+ab+b^2\right)\vdots 9$

$\Rightarrow \left[\left(2a-b\right)^2+3b^2\right]\vdots 9$

Mà $3b^2\vdots 3$ nên $\left(2a-b\right)^2\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $\left(2a-b\right)\vdots 3$

$\left(2a-b\right)\vdots 3\, nên \left(2a-b\right)^2\vdots 9$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3b^2\vdots 9 \Rightarrow b^2\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố $\Rightarrow b\vdots 3$.

$\left(2a-b\right)\vdots 3\, và\, b\vdots 3 \Rightarrow 2a\vdots 3$ mà $\left(2;3\right)=1\, nên\, a\vdots 3$

Vây cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Ta có tích của từ ba số tự nhiên liên tiếp trở lên thì chia hết cho 3

Theo đề bài 9^n+11 là tích k số tự nhiên liên tiếp mà 9^n+11 không chia hết cho 3 nên $k=2$

Đặt $9^n+11=a\left(a+1\right)$ với a là số nguyên dương

$9^n+11=a\left(a+1\right) \Leftrightarrow 4.9^n+45=4a^2+4a+1$

$\Leftrightarrow \left(2a+1\right)^2-\left(2.3^n\right)^2=45 \Leftrightarrow \left(2a+1-2.3^n\right)\left(2a+1+2.3^n\right)=45$

Vì a,n nguyên dương và $2a+1+2.3^n\geq 9$ nên xảy ra các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} 2a+1-2.3^n=9 \left(1\right) \\ 2a+1+2.3^n=5 \left(2\right) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $4a+2=14 \Leftrightarrow a=3 \Rightarrow 9^n+11=12 \Leftrightarrow 9^n=1 \Leftrightarrow n=0\left(Loại\right)$

TH2: $\begin{cases} 2a+1-2.3^n=15 \left(3\right) \\ 2a+1+2.3^n=3 \left(4\right) \end{cases}$

Từ (3) và (4) ta có $4a+2=18 \Leftrightarrow a=4 \Rightarrow 9^n+11=20 \Leftrightarrow 9^n=9 \Leftrightarrow n=1\left(thỏa\right)$

TH3: $\begin{cases} 2a+1-2.3^n=45 \left(5\right) \\ 2a+!+2.3^n=1 \left(6\right) \end{cases}$

Từ (5) và (6) ta có $4a+2=46 \Leftrightarrow a=11 \Rightarrow 9^n+11=132 \Leftrightarrow 9^n=121 \Leftrightarrow n\in \varnothing$

Vậy n = 1.

Câu 3:

a) Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}>0;\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}>0;\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}>0$

Theo bất đẳng tức Cauchy Schwarz ta có:

$$36=\left(\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{4-y}.\frac{1}{\sqrt{4-y}}+\sqrt{y}.\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{4-z}.\frac{1}{\sqrt{4-z}}+\sqrt{z}.\frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{4-x}.\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right)^2$$

$$\leq\left(x+4-y+y+4-z+z+4-x\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 36\leq 12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)\geq 3$ (*)

Giả sử 3 số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ đều nhỏ hơn 1

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)<1+1+1=3\left(\text{trái với}*\right)$

Do đó trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1

b)

Ta có $2P=2(ab+bc+ca)-2abc$

$2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2-1$vì $\left(-2abc=a^2+b^2+c^2-1\right)$

¿$(a+b+c)^2-1$

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

$\Leftrightarrow a^2b+2abc+c^2=1-a^2-b^2+a^2b^2$

$\Leftrightarrow (ab+c)^2=(1-a^2)(1-b^2)$

Từ $a^2+b^2+c^2+2abc=1\Rightarrow a^2<1,b^2<1\Rightarrow 1-a^2>0,1-b^2>0$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ với hai số $1-a^2,1-b^2$ ta có:

$(ab+c)^2=(1-a^2)(1-b^2)\leq\left(\frac{2-a^2-b^2}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow ab+c\leq\frac{2-a^2-b^2}{2}$

$\Leftrightarrow c\leq\frac{2-(a+b)^2}{2}(1)$

Mặt khác theo bất đẳng thức $AM-GM$ với hai số $(a+1)^2$ và 1 ta có:

$(a+b)^2+1\geq 2.\sqrt{(a+b)^2.1}=2(a+b)$

$\Rightarrow a+b\leq\frac{(a+b)^2+1}{2}(2)$

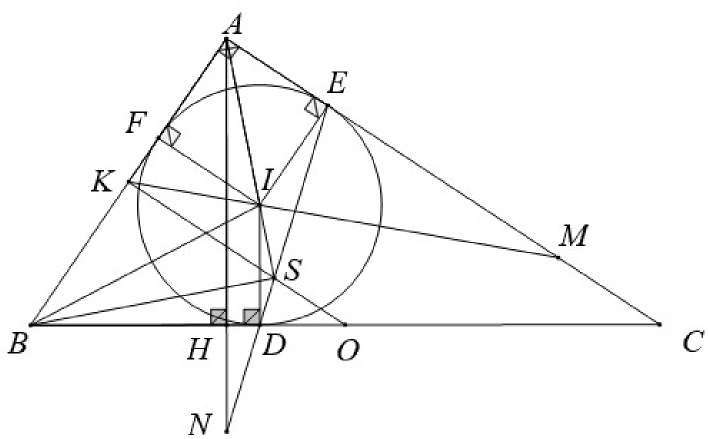
Từ (1) và (2) ta có: $a+b+c\leq\frac{(a+b)^2+1}{2}+\frac{2-(a+b)^2}{2}=\frac{3}{2}$

Do đó $2P \le \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow P \le \frac{5}{8}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 1-a^2 = 1-b^2 \\ (a+b)^2 = 1 \\ a^2+b^2+c^2+2abc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

Vậy $MaxP = \frac{5}{8} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

Câu 4:



a) Ta có AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{IAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$,

BI là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{IBA} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$

Theo tính chất tổng ba góc trong ΔAIB, ta có

Góc $\widehat{AIB} = 180^0 - (\widehat{IAB} + \widehat{IBA}) = 180^0 - \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$

= $180^0 - 180^0 - \widehat{C}/2$ (Do $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 180^0 - \widehat{C}$ theo tính chất tổng ba góc của tam giác)

$= 90^0 + \frac{\widehat{C}}{2}$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $CE = CD \Rightarrow$ ΔCED cân tại C

Suy ra $\widehat{DEC} = 180^0 - \frac{\widehat{C}}{2}$

Lại có góc $\widehat{AES} = 180^0 - \widehat{DEC}$(hai góc kề bù)

$=180^0-\dfrac{180^0-\widehat{C}}{2}=90^0+\dfrac{\widehat{C}}{2}$

Suy ra AIB = AES=90+c/2

Mặt khác $\widehat{EAS}=\widehat{IAB}$ (tính chất tia phân giác)

Do đó ΔIAB ΔEAS(g-g)

b)

Ta có ΔIAB ΔEAS(g-g) suy ra $\widehat{ASE}=\widehat{ABI}=\widehat{IBD}$

Tứ giác IBDS có $IBD+ISD=ASE+ISD=180^0$ ⇒ Tứ giác IBDS nội tiếp

Suy ra $\widehat{ISB}=\widehat{IDB}=90^0$(Góc nội tiếp cùng chắn cung BI nhỏ) mà $\widehat{IAB}=\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}=45^0$ (Tính chất tia phân giác) suy ra ΔASB vuông cân tại S

ΔASB vuông cân tại S có SA là đường trung tuyến nên SA là đường trung trực của AB. (*)

Mặt khác ΔABC vuông có AO là trung tuyến nên $OA=OB=\dfrac{1}{2}BC$

Suy ra O thuợc đường trung trực của AB (**)

Từ (*) và (**) suy ra aba điểm K, O, S thẳng hàng

c)

Vì AI là tia phân giác của ΔAMK nên $\dfrac{AK}{AM}=\dfrac{IK}{\Im}$ (1)

$IF/¿AM$ (cùng vuông góc với AB) ⇒ $\dfrac{IK}{\Im}=\dfrac{FK}{FA}$ (định lý ta lét) (2)

Từ (1) và (2) ⇒ $\dfrac{AK}{AM}=\dfrac{FK}{FA}$ suy ra $\dfrac{AK}{FK}=\dfrac{AM}{AF}$ (3)

Mặt khác $ID/¿AN$(cùng vuông góc với BC) ⇒ $\dfrac{AN}{ID}=\dfrac{SA}{SI}$(Hệ quả định lý ta let)

Mà $IF/¿KS$(cùng vuông góc với AB) ⇒ $\dfrac{SA}{SI}=\dfrac{AK}{FK}$ $nên$ $\dfrac{AN}{ID}=\dfrac{AK}{FK}$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $\dfrac{AM}{AF}=\dfrac{AN}{ID}$

Tứ giác AEIF có $\widehat{EAF}=\widehat{AFI}=\widehat{AEI}=90^0$ nên tứ giác AEIF là hình chữ nhật

Suy ra $AF=EI=ID$

Ta có $AF = ID$ và $\frac{AM}{AF} = \frac{AN}{ID}$ nên $AM = AN$

Câu 5:

Ta thấy hai ô vuông ở hai góc đối của hình vuông là xa nhau nhất

Gọi các số được điền vào mỗi ô vuông đó lần lượt là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{19}$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
									a_{11}
									a_{12}
									a_{13}
									a_{14}
									a_{15}
									a_{16}
									a_{17}
									a_{18}
									a_{19}

Ta có

$\Leftrightarrow -1 < a_1 - a_2 < 1$

Tương tự ta có:

$\Leftrightarrow -1 < a_2 - a_3 < 1$

……………………; $|a_1 - a_2| < 1$

$-1 < a_{18} - a_{19} < 1$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có:

$-18 < a_1 - a_{19} < 18 \Leftrightarrow |a_1 - a_{19}| < 18$

Vì $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{19}$ là các số nguyên nên chỉ có tối đa 19 số nguyên khác nhhau được điền vào trong bảng

Có 100 ô vuông trên bảng nên theo nguyên lý Dirichle thì sẽ có một số xuất hiện trên bảng ít nhất là $\left[\dfrac{100}{19}\right] + 1 = 6$ (lần)