BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

VŨ THANH TÚ

ĐỊNH LÝ MASON VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 60 46 05

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH HÀ HUY KHOÁI

QUY NHƠN - NĂM 2010

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

VŨ THANH TÚ

ĐỊNH LÝ MASON VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

QUY NHƠN - 2010

Mục lục

Mục lục

Một số kí hiệu dùng trong luận văn

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lần lượt là tập số tự nhiên, tập số nguyên, tập số thực và tập số phức.

$rad(a)$ là căn của số nguyên a.

$a \,|\, b$ kí hiệu cho a là ước của b.

(a, b) là ước chung lớn nhất của hai số nguyên a và b.

$gcd(a, b, c)$ là ước chung lớn nhất của ba số nguyên a, b, c.

$f^{(n)}$ là đạo hàm cấp n của hàm số f.

$n_0(f)$ là số các nghiệm phân biệt của đa thức f.

$deg(f)$ là bậc của đa thức f.

$W(f_1, ..., f_n)$ là định thức Wronskian của $f_1, ..., f_n$.

$detA$ là định thức của ma trận A.

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ là tổng $a_1 + a_2 + ... + a_n$.

$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ là tích $a_1.a_2...a_n$.

$\max\limits_{1 \le i \le n} a_i$ là số lớn nhất trong các số $a_1, a_2, ..., a_n$.

$\min\limits_{1 \le i \le n} a_i$ là số nhỏ nhất trong các số $a_1, a_2, ..., a_n$.

μ_f^a là bậc của f tại a.

Mở đầu

Chúng ta đều biết định lý cuối cùng của Fermat phát biểu vào năm 1637 " Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên khác 0 với mọi số nguyên $n \geq 3$ " và chỉ được chứng minh bởi Andrew Wiles vào năm 1995 nhưng lại dùng một lý thuyết hoàn toàn không sơ cấp. Trong những năm gần đây sự phát triển của số học chịu ảnh hưởng lớn của các tính chất của đa thức. Giữa số học và đa thức có sự tương tự rất lớn nên để nghiên cứu các tính chất nào đó của số nguyên người ta thử phát biểu tính chất này trên vành đa thức và ngược lại. Định lý Fermat cho đa thức được chứng minh rất đơn giản dựa vào định lý Mason và không biết sẽ mất bao nhiêu thời gian nếu chúng ta chứng minh định lý trên mà không áp dụng định lý Mason.Từ định lý Mason cho đa thức ta có giả thuyết abc cho các số nguyên, định lý cuối cùng của Fermat chỉ là hệ quả của giả thuyết này.

Mục đích chính của luận văn là tìm sự tương tự giữa số nguyên và đa thức trên trường số phức. Cụ thể ứng dụng định lý Mason trong nghiên cứu đa thức, tìm tòi những tương tự số học của định lý Mason và các hệ quả của nó. Đồng thời tìm hiểu một số kết quả gần đây theo hướng mở rộng định lý Mason.

Nội dung luận văn gồm 4 chương.

Chương 1 chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở cần thiết nhất để phục vụ cho việc chứng minh các kết quả của các chương sau như số nguyên tố, bậc của đa thức, bậc của hàm hữu tỷ tại một điểm, ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất và radical của số nguyên cũng như của đa thức, định thức Wronskian, đặc số của một trường.

Chúng tôi đề cập trong chương 2 về định lý Mason và ứng dụng trong nghiên cứu đa thức. Trong chương này chúng tôi trình bày các hệ quả của định lý Mason và các bài tập về đa thức được giải bằng cách áp dụng định lý này.

Chương 3 bao gồm các kết quả tương tự của số học cho các tính chất và bài tập ở chương 2. Chúng tôi trình bày một số kết quả về định lý cuối cùng của Fermat, các giả thuyết số học và giải quyết một số bài toán về số học.

Chương 4 chúng tôi trình bày một số kết quả gần đây theo hướng mở rộng của định lý Mason. Cụ thể là định lý Mason cho trường hợp nhiều đa thức, cho hàm nhiều biến.

Luận văn được hoàn thành nhờ sự giúp đỡ tận tình của thầy giáo hướng dẫn GS. TSKH Hà Huy Khoái, của các thầy cô giáo trong tổ bộ môn và các bạn trên diễn đàn Toán học Mathscope. Mặc dù luận văn được thực hiện với một nỗ lực cố gắng hết sức của bản thân nhưng do kinh nghiệm nghiên cứu khoa học còn có hạn chế nên chắc chắn luận văn khó tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những góp ý thẳng thắn, chân tình của các thầy cô giáo và bạn bè đồng nghiệp để cho luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này tác giả xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc đến thầy giáo hướng dẫn GS. TSKH Hà Huy Khoái đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Quy Nhơn, tháng 03 năm 2010

Vũ Thanh Tú

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản để phục vụ cho việc chứng minh các kết quả của các chương sau.

1.1 Một số kiến thức cơ bản về số học

Định nghĩa 1.1.1. Số nguyên tố là số nguyên dương lớn hơn 1 chỉ chia hết cho 1 và chính nó. .

Định nghĩa 1.1.2. Ước chung lớn nhất của hai số a và b không đồng thời bằng 0 là số nguyên lớn nhất chia hết cả a và b.

Bội chung nhỏ nhất của hai số a và b không đồng thời bằng 0 là số nguyên nhỏ nhất chia hết cho cả a và b.

Định nghĩa 1.1.3 Các số nguyên a và b được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu $(a, b) = 1$. Ta nói rằng các số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ là nguyên tố cùng nhau đồng thời nếu $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.

Ta nói rằng các số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ là nguyên tố cùng nhau từng cặp nếu $(a_i, a_j) = 1$ với $i = 1, 2, ..., n$ và $j = 1, 2, ..., n$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho số nguyên a, khi đó tích tất cả các ước nguyên tố của a được gọi là radical của số nguyên a. Như vậy $rad(a) = \prod\limits_{p|\,a} p$, chẳng hạn $18 = 2.3^2, rad(18) = 2.3 = 6$.

Nếu a, b là hai số nguyên khác 0 thì trong trường hợp tổng quát ta có $rad(ab) \leq rad(a).rad(b)$. Đẳng thức xảy ra khi a và b không có ước chung khác 1 (nguyên tố cùng nhau).

Định lý 1.1.1.Mọi số nguyên dương đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng tích các số nguyên tố, trong đó các thừa số nguyên tố được viết theo thứ tự không giảm.

Định lý 1.1.2. Với mọi số nguyên a và b, tồn tại các số nguyên x và y sao cho

$$ax + by = d,$$

trong đó d là ước chung lớn nhất của a và b.

Hệ quả: Các số nguyên a và b nguyên tố cùng nhau nếu và chỉ nếu tồn tại các số nguyên x và y sao cho $ax + by = 1$.

1.2 Một số kiến thức cơ bản về đa thức

Định nghĩa 1.2.1. Giả sử f là một đa thức trên trường số phức và có sự phân tích theo các nghiệm như sau:

$$f(x) = a.(x - \alpha_1)^{m_1}...(x - \alpha_n)^{m_n}, m_i \in N^*, \alpha_i \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}.$$

Ta định nghĩa căn của f, kí hiệu là $rad(f)$ được xác định như sau $rad(f) = a.(x - \alpha_1)...(x - \alpha_n)$.

Định nghĩa 1.2.2. Giả sử f là một đa thức trên trường số phức và $f(x) = a.(x - \alpha_1)^{m_1}...(x - \alpha_n)^{m_n}, m_i \in N^*, \alpha_i \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}$. Khi đó, số các nghiệm phân biệt của f, kí hiệu là $n_0(f)$.

Như vậy, $deg(f) = m_1 + m_2 + ... + m_n$ và $n_0(f) = deg(rad(f)) = n$. Rõ ràng $n_0(f) \leq deg(f)$. Nếu f, g là hai đa thức khác 0 thì trong trường hợp tổng quát ta có $n_0(fg) \leq n_0(f) + n_0(g)$. Đẳng thức xảy ra khi f và g không có nghiệm chung (nguyên tố cùng nhau).

Định lý 1.2.1. Giả sử f là một đa thức trên trường số phức. Khi đó, ta có

$$\frac{f}{rad(f)} \,|f' \,.$$

Thật vậy, giả sử

$$f(x) = a.(x - \alpha_1)^{m_1}...(x - \alpha_n)^{m_n}, m_i \in N^*, \alpha_i \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}.$$

Khi đó,

$$\frac{f}{rad(f)} = (x-\alpha_1)^{m_1-1}...(x-\alpha_n)^{m_n-1}$$

và $f' = am_1(x-\alpha_1)^{m_1-1}.(x-\alpha_2)^{m_2}...(x-\alpha_n)^{m_n}+...+am_n(x-\alpha_1)^{m_1}.(x-\alpha_2)^{m_2}...(x-\alpha_n)^{m_n-1}$.

Như vậy các số hạng của f' đều chia hết cho $\frac{f}{rad(f)}$. Do đó, $\frac{f}{rad(f)}$ là ước của f'.

Định lý 1.2.2. Giả sử f, g là các đa thức trên trường số phức và f là ước của g. Nếu $deg(f) > deg(g)$ thì $g = 0$.

Thật vậy, bằng phản chứng giả sử rằng $g \neq 0$.

Từ f là ước của g ta có tồn tại đa thức h sao cho $g = f.h$. Ta suy ra $deg(g) = deg(f) + deg(h)$.

Do đó, nếu $deg(f) > deg(g)$ thì $deg(h) < 0$ (điều này trái với bậc của đa thức là một số tự nhiên). Do đó $g = 0$.

1.3 Một số kết quả của Đại số tuyến tính

Định nghĩa 1.3.1. Một hệ các véctơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ trong không gian véctơ V được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại các số $a_1, a_2, ..., a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0.$$

Trong không gian R^3 cho $v_1 = (1;1;1), v_2 = (1;1;0), v_3 = (1;1;3)$. Hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$là phụ thuộc tuyến tính do $-3v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

Hệ véctơ không phụ thuộc tuyến tính gọi là độc lập tuyến tính. Hay nói cách khác hệ các véctơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ trong không gian véctơ V là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$$

chỉ có nghiệm duy nhất $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Chúng ta xét ví dụ đơn giản sau: Trong không gian R^3 cho các véctơ $v_1 = (1;1;1), v_2 = (1;1;0), v_3 = (1;-2;0)$. Hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là độc lập tuyến tính do phương trình $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Một hệ véctơ độc lập tuyến tính thì mọi hệ con của nó cũng độc lập tuyến tính.

Một hệ véctơ phụ thuộc tuyến tính nếu có một véctơ của hệ là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại.

Định nghĩa 1.3.2. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó định thức Wronskian của f và g được xác định như sau:

$$W(f,g) = \det \begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix} = fg' - f'g.$$

Định lý 1.3.1. Nếu hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a, b) và phụ thuộc tuyến tính thì $W(f, g) = 0$.

Chẳng hạn hệ $\{sinx, cosx\}$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy,

$$W(sinx, cosx) = \det \begin{pmatrix} sinx & cosx \\ cosx & -sinx \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Định nghĩa 1.3.1.

Cho n đa thức $f_1, ..., f_n$ nhiều biến trên vành $F[x_1, x_2, ..., x_l]$ của trường F khả vi đến cấp $n-1$. Khi đó định thức Wronskian của $f_1, ..., f_n$ được xác định như sau:

$$W(f_1, ..., f_n) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \dots & f_n \\ f_1' & f_2' \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Định lý 1.3.1.

Cho n đa thức $f_1, ..., f_n$ nhiều biến trên vành $F[x_1, x_2, ..., x_l]$ của trường F khả vi đến cấp $n - 1$. Nếu hệ $f_1, ..., f_n$ phụ thuộc tuyến tính thì $W(f_1, ..., f_n) = 0$.

Chứng minh (xem [8]).

1.3.4. Định thức và các tính chất của định thức.

1.3.4.1. Phép thế bậc n: Cho $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Một phép thế bậc n là một song ánh $\sigma : I_n \quad \rightarrow \quad I_n$ với $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Ta nói σ là phép thế trên I_n.

Với $1 \leq m < p \leq n$, cặp (m, p) gọi là một nghịch thế nếu

$$\sigma(m) > \sigma(p).$$

Kí hiệu $N(\sigma)$ là số các nghịch thế của phép thế σ. Khi đó dấu của σ là $s(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$.

Chẳng hạn $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ có $\sigma(1) > \sigma(2), \sigma(1) > \sigma(3)$ nên $N(\sigma) = 2$ và $s(\sigma) = 1$.

1.3.4.2 Định nghĩa định thức: Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n. Tập các phép thế bậc n là $S_n = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n!})$. Định thức của ma trận A là

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}.$$

Chẳng hạn xét n =2, ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Các phép thế $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ có $N(\sigma_1) = 0$ nên $s(\sigma_1) = 1$ và

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ có $N(\sigma_2) = -1$ nên $s(\sigma_2) = -1$.

Khi đó

$$\det A = s(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + s(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Hệ quả 2 Nếu có một hàng (hoặc cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (hoặc cột) khác thì định thức bằng 0.

1.4. Bậc của hàm hữu tỷ.

1.4.1. Định nghĩa.

Giả sử f là hàm hữu tỷ, ta viết f dưới dạng $f = \frac{f_1}{f_2}$, trong đó f_1 và f_2 nguyên tố cùng nhau trên vành $F(x)$ của trường F. Bậc của f, kí hiệu bởi $degf$ và được xác định bằng $degf_1 - degf_2$.

Cho $a \in F$ và viết f dưới dạng $f = (x-a)^m.\frac{g_1}{g_2}$ với $g_1(a).g_2(a) \neq 0$. Khi đó số nguyên m được gọi là bậc của f tại a và được kí hiệu là μ_f^a

1.4.2. Các tính chất về bậc của hàm hữu tỷ tại một điểm.

1.4.2.1. Tính chất 1. Cho f, g là hai hàm số trên vành $F[x]$ của trường F và $a \in F$, ta có

a)$\mu_{f+g}^a \geq \min\left\{\mu_f^a, \mu_g^a\right\}$,

b)$\mu_{fg}^a = \mu_f^a + \mu_g^a$,

c)$\mu_{\frac{f}{g}}^a = \mu_f^a - \mu_g^a$.

1.4.2.2. Tính chất 2. Cho f là hàm số khả vi cấp k thoả $f^{(k)} \neq 0$ và $a \in F$, ta có

$$\mu_{f^{(k)}}^a \geq -k + \mu_f^a.$$

Thật vậy, giả sử $f(x) = (x-a)^m \frac{g(x)}{h(x)}$, trong đó g và h nguyên tố cùng nhau và không nhận a làm nghiệm. Ta có

$$f'(x) = (x-a)^{m-1}\frac{mg(x)h(x) + (x-a)[g'(x)h(x) - g(x)h'(x)]}{h^2(x)}.$$

Theo định nghĩa 1.4.1 ta có $\mu_h^a = 0$, $\mu_{f'}^a \geq m-1$. Như vậy

$$\mu_{f'}^a \geq -1 + \mu_f^a.$$

Lập luận tương tự ta được

$$\mu_{f''}^a \geq -1 + \mu_{f'}^a \geq -2 + \mu_f^a.$$

Ta suy ra $\mu_{f^{(k)}}^a \geq -k + \mu_f^a$.

Chương 2

Định lý Mason và ứng dụng trong nghiên cứu đa thức

Vào năm 1983, R.C. Mason đã cho kết quả đánh giá về mối quan hệ giữa bậc của các đa thức với số các nghiệm phân biệt của tích các đa thức đó.

Định lý 2.1 (Định lý Mason)

2.1.1 Định lý Cho $A(t), B(t), C(t)$ là các đa thức phức nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là đa thức hằng và thoả mãn hệ thức $A(t) + B(t) = C(t)$ thì

$$Max\{\deg A, \deg B, \deg C\} \leq n_0(A.B.C) - 1.$$

2.1.2 Chứng minh định lý : Từ giả thiết $A + B = C$ ta suy ra

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = 1.$$

Để tiện lợi trong tính toán ta đặt $f = \frac{A}{C}$ và $g = \frac{B}{C}$. Khi đó, $f + g = 1$ nên $f' + g' = 0$ và thay $f' = -g'$ ta được

$$\frac{\frac{f'}{f}}{\frac{g'}{g}} = -\frac{g}{f} = -\frac{B}{A}.$$

Giả sử ta có sự phân tích các hàm hữu tỷ theo các nghiệm của đa thức

$$A(t) = a\prod(t - \alpha_i)^{m_i}; B(t) = b\prod(t - \beta_j)^{n_j}; C(t) = c\prod(t - \gamma_k)^{l_k}.$$

Theo công thức đạo hàm của tích ta được

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = a\sum\frac{m_i}{t - \alpha_i}$$

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = b\sum \frac{n_j}{t-\beta_j}$$

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = c\sum \frac{l_k}{t-\gamma_k}\ .$$

Ta lại có

$$\frac{f'}{f} = \frac{A'.C - C'.A}{A.C} = \frac{A'}{A} - \frac{C'}{C}.$$

Tương tự cho

$$\frac{g'}{g} = \frac{B'}{B} - \frac{C'}{C}.$$

Do đó

$$\frac{B}{A} = -\frac{a\sum \frac{m_i}{t-\alpha_i} \ - c\sum \frac{l_k}{t-\gamma_k}}{b\sum \frac{n_j}{t-\beta_j} \ - c\sum \frac{l_k}{t-\gamma_k}}.$$

Ta ký hiệu

$$D(t) = \prod_i (t-\alpha_i)\prod_j (t-\beta_j)\prod_k (t-\gamma_k).$$

Hiển nhiên $D(t) = n_0(ABC)$ và

$$\frac{D(t)}{t-\alpha_i} = n_0(ABC) - 1 = \frac{D(t)}{t-\beta_j} = \frac{D(t)}{t-\gamma_k}. \qquad (2.1)$$

Nhân cả tử số và mẫu số cho D(t) ta được

$$\frac{B}{A} = \frac{c\sum \frac{l_k}{t-\gamma_k} \ - a\sum \frac{m_i}{t-\alpha_i}}{c\sum \frac{l_k}{t-\gamma_k} \ - b\sum \frac{n_j}{t-\beta_j}}.\frac{D(t)}{D(t)}. \qquad (2.2)$$

Theo (2.1) thì cả tử và mẫu ở (2.2) đều có dạng tổng của các đa thức có bậc bằng $n_0(ABC) - 1$. Như vậy $\frac{B}{A}$ là tỉ số của hai đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $n_0(ABC) - 1$.

Vì A và B nguyên tố cùng nhau và từ (2.2) ta có

$$B.(D.\frac{g'}{g}) = -A.(D.\frac{f'}{f}).$$

Do đó $A\Big|D.\frac{g'}{g}$ và $B\Big|D.\frac{f'}{f}$ nên ta suy ra được cả A(t) và B(t) đều có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $n_0(ABC) - 1$.

Ta lại có $C = A+B$ nên C cũng có bậc không vượt qua $n_0(ABC)-1$.

2.1.3 Cách chứng minh khác cho định lý Mason

2.1.3.1 Dựa vào định thức

Vào năm 1999, Andrew Granivin và Thomas J.Tucker đã dùng Đại số tuyến tính để chứng minh định lý Mason như sau.

Vì $A(t), B(t), C(t)$ là các đa thức phức nguyên tố cùng nhau từng cặp và thoả mãn hệ thức $A(t) + B(t) = C(t)$ nên $A'(t) + B'(t) = C'(t)$ và $\Delta_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ A'(t) & B'(t) \end{pmatrix} \neq 0$, nếu ngược lại $A.B' - A'B = 0$ thì $(\frac{B}{A})' = 0$, suy ra $B = k.A$ (vô lý).

Giả sử rằng α là một nghiệm của $A(t)$ và $(t-\alpha)^m$ là số mũ lớn nhất của $(t-\alpha)$ chia hết $A(t)$. Khi đó, $(t-\alpha)^{m-1}$ là số mũ lớn nhất của $(t-\alpha)$ chia hết $A'(t)$. Do đó, $(t-\alpha)^{m-1}$ là số mũ lớn nhất của $(t-\alpha)$ chia hết $\Delta_1(t)$. Tức là, $(t-\alpha)^m$ là ước của $\Delta_1(t).(t-\alpha)$.

Vì vậy, $A(t)$ là ước của

$$\Delta_1(t). \prod_{A(\alpha)=0} (t-\alpha). \tag{2.3}$$

Tương tự cho các định thức

$$\Delta_2(t) = \begin{pmatrix} B(t) & C(t) \\ B'(t) & C'(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

và

$$\Delta_3(t) = \begin{pmatrix} C(t) & A(t) \\ C'(t) & A'(t) \end{pmatrix} \neq 0 \ .$$

Ta được $B(t)$ là ước của

$$\Delta_2(t). \prod_{B(\alpha)=0} (t-\alpha) \tag{2.4}$$

và $C(t)$ là ước của

$$\Delta_3(t). \prod_{C(\alpha)=0} (t-\alpha). \tag{2.5}$$

Từ $(2.3), (2.4)$ và (2.5) ta suy ra $A(t)B(t)C(t)$ là ước của

$$\Delta_1(t)\Delta_2(t)\Delta_3(t). \prod_{ABC(\alpha)=0} (t-\alpha). \tag{2.6}$$

Mặt khác $AC' - A'C = A(A' + B') - A'(A + B) = A.B' - A'B$ và $B'C - BC' = B'(A + B) - B(A' + B') = A.B' - A'B$.

Như vậy, $\Delta_1(t) = \Delta_2(t) = \Delta_3(t) = \Delta(t)$.

Do đó, từ (2.6) suy ra $A(t)B(t)C(t)$ là ước của

$$\Delta(t). \prod_{ABC(\alpha)=0} (t-\alpha).$$

Ta suy ra

$$deg(A) + deg(B) + deg(C) \leq deg\Delta(t) + deg \prod_{ABC(\alpha)=0} (t-\alpha). \tag{2.7}$$

Hiển nhiên, bậc của $\prod_{ABC(\alpha)=0} (t-\alpha)$ bằng số các nghiệm phân biệt của ABC hay $n_0(ABC) = deg \prod_{ABC(\alpha)=0} (t-\alpha)$. Ta lại có $\Delta(t) = A.B' - A'B$ nên suy ra

$$deg\Delta(t) \leq deg(A) + deg(B) - 1.$$

Vì vậy, thay vào công thức (2.7) ta được

$$deg(A) + deg(B) + deg(C) \leq deg\Delta(t) + deg \prod_{ABC(\alpha)=0} (t-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow deg(A) + deg(B) + deg(C) \leq deg(A) + deg(B) - 1 + n_0(ABC)$$

$$\Leftrightarrow deg(A) \leq n_0(ABC) - 1.$$

Lập luận tương tự khi ta áp dụng cho

$deg\Delta(t) \leq deg(C) + deg(B) - 1$ và $deg\Delta(t) \leq deg(A) + deg(C) - 1$.

Ta suy ra được

$$deg(B) \leq n_0(ABC) - 1,$$

$$deg(C) \leq n_0(ABC) - 1.$$

Do đó,

$$Max\{\deg A, \deg B, \deg C\} \leq n_0(A.B.C) - 1.$$

Vào năm 2000 một học sinh cuối cấp Noir Schneider đã chứng minh định lý Mason chỉ là hệ quả của định lý sau:

2.1.3.2 Định lý N.Schneider

Định lý N.Schneider:

Cho K là một trường và A, B, C là các đa thức không đồng thời là hằng số trong $K(t)$ sao cho $A + B = C$ và $gcd(A, B, C) = 1$. Khi đó, nếu $degA \geq degrad(ABC)$ thì $A' = B' = C' = 0$.

Hệ quả:

Cho K là một trường có đặc số bằng 0 và A, B, C là các đa thức không đồng thời là hằng số trong $K(t)$ thỏa điều kiện $A + B = C$ và $gcd(A, B, C) = 1$ thì

$$Max\{\deg A, \deg B, \deg C\} \leq degrad(A.B.C) - 1.$$

Thật vậy, bằng phản chứng giả sử rằng bất đẳng thức trên không đúng.

Không mất tính tổng quát, giả sử $degA \geq degradABC)$ theo định lý 2.1.3.2 thì $A' = B' = C' = 0$. Điều này trái với giả thiết về các đa thức A,B,C.

Chứng minh định lý 2.1.3.2

Giả sử $gcd(A, B) = 1$, (vì nếu ngược lại ước chung của A và B cũng là ước của C , từ đó suy ra $gcd(A, B, C) \neq 1$, điều này trái với giả thiết $gcd(A, B, C) = 1$), từ đẳng thức $A + B = C$ nên ta được $gcd(A, B, C) = gcd(A, B, A + B) = 1$.

Theo định lý [xem [1.2.1], trang 9] ta có $\frac{C}{rad(C)}$ là ước của C và C'. Do đó $\frac{C}{rad(C)} \,|(\mathrm{C}'.\mathrm{B} - \mathrm{C}.\mathrm{B}')$.

Tương tự $\frac{B}{rad(B)} \,|(\mathrm{C}'.\mathrm{B} - \mathrm{C}.\mathrm{B}')$, $\frac{A}{rad(A)} \,|(\mathrm{A}'.\mathrm{B} - \mathrm{A}.\mathrm{B}')$.

Mặt khác,

$$C'.B - C.B' = (A' + B').B - (A + B).B' = A'.B - A.B'. \qquad (2.8)$$

nên

$$\frac{A}{rad(A)} \,|(\mathrm{C}'.\mathrm{B} - \mathrm{C}.\mathrm{B}') .$$

Như vậy $\frac{A}{rad(A)}.\frac{B}{rad(B)}.\frac{C}{rad(C)}\,|(\mathrm{C}'.\mathrm{B}-\mathrm{C}.\mathrm{B}')$.

Do $gcd(A,B)=1$ nên $rad(A)rad(B)rad(C)=rad(ABC)$.

Ta suy ra

$$\frac{ABC}{rad(ABC)}\,|(\mathrm{C}'.\mathrm{B}-\mathrm{C}.\mathrm{B}')\ . \tag{2.9}$$

Theo giả thiết $degA \geq degrad(ABC)$ nên ta có đánh giá sau $deg\frac{ABC}{rad(ABC)} = deg(ABC) - degrad(ABC)$

$$\geq deg(ABC) - degA = deg(BC) > deg(C'.B - C.B').$$

Như vậy, $deg\frac{ABC}{rad(ABC)} > deg(C'.B - C.B')$, kết hợp với (2.9) ta được

$$0 = C'.B - C.B'.$$

Theo công thức (2.8) ta cũng có $A'.B - A.B' = 0$. Từ đây suy ra được $A\,|(\mathrm{A}'\mathrm{B})$.

Mặt khác, $gcd(A,B)=1$ suy ra $A\,|\mathrm{A}'$, vì vậy $A'=0$. Tương tự $BC = CB'$ suy ra $B\,|\mathrm{B}'$, do đó $B'=0$ và $C' = A' + B' = 0$.

2.1.4 Chú ý

2.1.4.1 Định lý 2.1 đã được phát biểu một cách độc lập bởi hai nhà toán học R.C.Mason (1983) và Stothers (1981) nhưng Stothers lại công bố sau nên định lý còn có tên gọi là định lý Mason-Stothers.

2.1.4.2 Định lý Mason không còn đúng đối với trường có đặc số là số nguyên tố p .

Chẳng hạn phương trình $(1-x)^p + x^p = 1$ cho các đa thức nguyên tố cùng nhau $A = 1-x, B = x, C = 1$.

Ta dễ dàng tìm được các kết quả sau: $max\{\deg A, \deg B, \deg C\} = p$ và $rad(ABC) = x(1-x)$,$deg(rad(ABC)) = 2$. Vì vậy bất đẳng thức của định lý không thoả mãn.

Việc áp dụng định lý Mason giúp chúng ta có thể giải quyết nhiều bài toán tổng quát liên quan đến nghiệm của phương trình cho các đa thức, các bài toán về sự tồn tại đa thức thoả mãn điều kiện cho trước. Sau đây là các định lý và các bài toán được chứng minh dễ dàng dựa vào định lý Mason.

2.2 Áp dụng định lý Mason vào nghiên cứu đa thức

2.2.1 Các định lý cho đa thức.

Định lý tương tự cho đa thức của định lý Fermat được biết đến từ thế kỷ 19 và đã được chứng minh dựa vào phương pháp của hình học đại số. Sử dụng định lý Mason, ta có cách chứng minh đơn giản hơn nhiều.

2.2.1.1 Định lý cuối cùng của Fermat cho đa thức:

Phương trình

$$A^n(t) + B^n(t) = C^n(t). \tag{2.10}$$

vô nghiệm với mọi số nguyên $n \geq 3$. Trong đó các đa thức với hệ số phức $A(t), B(t), C(t)$ không đồng thời là hằng số, nguyên tố cùng nhau từng cặp .

Thật vậy, giả sử phương trình (2.10) có nghiệm. Theo định lý Mason ta có

$$max\{\deg A^n, \deg B^n, \deg C^n\} \leq n_0(A^n B^n C^n) - 1.$$

Hiển nhiên, ta có các đẳng thức $degA^n = n.degA$, $n_0(A^n) = n_0(A)$ và $n_0(ABC) = n_0(A) + n_0(B) + n_0(C)$ (do $gcd(A, B, C) = 1$). Do đó

$$n.degA \leq n_0(A) + n_0(B) + n_0(C) - 1, \tag{2.11}$$

$$n.degA \leq n_0(A) + n_0(B) + n_0(C) - 1, \tag{2.12}$$

$$n.degA \leq n_0(A) + n_0(B) + n_0(C) - 1. \tag{2.13}$$

Cộng vế theo vế của $(2.11), (2.12), (2.13)$ ta được

$$n.degA + n.degB + n.degC \leq 3(n_0(A) + n_0(B) + n_0(C) - 1). \tag{2.14}$$

Mặt khác theo [định nghĩa (1.2.3), trang 6] thì $n_0(A) \leq degA$. Do đó (2.14) tương đương với

$$(n-3)(degA + degB + degC) \leq -3. \tag{2.15}$$

Vì vậy, nếu $n \geq 3$ thì bất đẳng thức (2.15) không xảy ra.

Như vậy định lý 2.2.1.1 khẳng định rằng phương trình (2.10) có nghiệm với số nguyên $n > 1$ thì $n = 2$. Chẳng hạn

$$(1 - x^2)^2 + (2x^2)^2 = (1 + x^2)^2.$$

Vào năm 1965 Davenport đã đưa ra kết quả sau:

2.2.1.2 Định lý Davenport: Giả sử $f(t), g(t)$ là các đa thức phức, khác hằng số, nguyên tố cùng nhau sao cho $f^3 \neq g^2$. Khi đó, ta có

$$deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{2}.deg(f) + 1,$$

và

$$deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{3}.deg(g) + 1. \tag{2.16}$$

Ta chứng minh định lý trên cho trường hợp $(f, g) = 1$.

Ta phân tích được $f^3 = (f^3 - g^2) + g^2$, khi đó theo định lý Mason thì:

$$max\{\deg(f^3), \deg(g^2), \deg(f^3 - g^2)\} \leq n_0[f^3.g^2.(f^3 - g^2)] - 1.$$

Vì vậy, ta suy ra

$$\begin{aligned} deg(f^3) &\leq n_0[f.g.(f^3 - g^2)] - 1 \\ \Leftrightarrow 3deg(f) &\leq deg(f) + deg(g) + deg(f^3 - g^2) - 1 \\ \Leftrightarrow deg(f) &\leq \frac{1}{2}[deg(g) + deg(f^3 - g^2) - 1]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned} deg(g^2) &\leq n_0[f.g.(f^3 - g^2)] - 1 \\ \Leftrightarrow 2deg(g) &\leq deg(f) + deg(g) + deg(f^3 - g^2) - 1 \\ \Leftrightarrow deg(g) &\leq deg(f) + deg(f^3 - g^2) - 1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Thay (2.18) vào (2.17) ta được

$$deg(f) \leq \frac{1}{2}[deg(f) + deg(f^3 - g^2) - 1 + deg(f^3 - g^2) - 1]$$

$$\Leftrightarrow deg(f^3 - g^2) \geq \tfrac{1}{2}.deg(f) + 1.$$

Tương tự, thay (2.17) vào (2.18) ta được

$$deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{3}.deg(g) + 1.$$

Như vậy, ta đã chứng minh định lý cho trường hợp $(f, g) = 1$, trường hợp $(f, g) \neq 1$ được đưa về $(f, g) = 1$ bằng cách loại bớt nhân tử chung như sau:

Giả sử $(f, g) = h$, khi đó tồn tại các đa thức khác hằng u, v sao cho $f = h.u, g = h.v$ và $(h.u, v) = 1$.

Do đó, áp dụng định lý Mason cho phương trình

$$h.u^3 = (hu^3 - v^2) + v^2$$

thì ta được

$$max\{\deg(h.u^3), \deg(v^2), \deg(h.u^3 - v^2)\} \leq n_0[h.u^3.v^2.(h.u^3 - v^2)] - 1.$$

Vì vậy, ta suy ra

$$deg(h.u^3) \leq n_0[h.u.v.(h.u^3 - v^2)] - 1$$

$$\Leftrightarrow deg(h) + 3deg(u) \leq deg(h) + deg(u) + deg(v) + deg(h.u^3 - v^2) - 1$$

$\Leftrightarrow deg(u) \leq \frac{1}{2}[deg(v) + deg(h.u^3 - v^2) - 1]$. Kết hợp với

$$deg(v) \leq deg(h) + deg(u) + deg(h.u^3 - v^2) - 1,$$

ta được

$$deg(hu^3 - v^2) \geq \frac{1}{2}[deg(u) - deg(h)] + 1. \tag{2.19}$$

Từ đẳng thức $f^3 - g^2 = h^2(h.u^3 - v^2)$ và $f = h.u$, ta suy ra được $deg(h.u^3 - v^2) = deg(f^3 - g^2) - 2.deg(h)$ và $deg(u) = deg(f) - deg(h)$. Do đó, ta biến đổi (2.19) $\Leftrightarrow deg(f^3 - g^2) - 2.deg(h) \geq \frac{1}{2}[deg(f) - 2deg(h)] + 1$

$$\Leftrightarrow deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{2}[deg(f) + 2deg(h)] + 1$$

$$\Leftrightarrow deg(f^3 - g^2) > \frac{1}{2}deg(f) + 1.$$

Tương tự ta cũng có

$$deg(h.u^3 - v^2) \geq \frac{1}{3}[deg(v) - 2deg(h)] + 1, \tag{2.20}$$

và $g = h.v$. Do đó (2.20)

$$\Leftrightarrow deg(f^3 - g^2) - 2.deg(h) \geq \frac{1}{3}[deg(g) - 3deg(h)] + 1,$$

$$\Leftrightarrow deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{3}[deg(f) + 3deg(h)] + 1,$$

$$\Leftrightarrow deg(f^3 - g^2) > \frac{1}{3}.deg(g) + 1.$$

Nhận xét: Trong đánh giá của định lý Davenport, từ công thức (2.16) cho chúng ta số mũ $\frac{1}{2}$ là tốt nhất.

Chẳng hạn khi $f(t) = t^2 + 4, g(t) = t^3 + 6t$ thì $f^3 - g^2 = 12t^2 + 64$.

Do đó $deg(f^3 - g^2) = 2 = \frac{1}{2}deg(f) + 1$. Chính nhờ sự đánh giá này, chúng ta giải quyết được nhiều bài toán về tồn tại đa thức.

Bằng cách chứng minh tương tự như trên, ta có thể mở rộng định lý Davenport cho số mũ luỹ thừa nguyên m và n bất kỳ.

2.2.1.3 Định lý Davenport tổng quát: Cho m, n là các số nguyên dương lớn hơn 1. Giả sử $f(t), g(t)$ là các đa thức phức, khác hằng số, nguyên tố cùng nhau sao cho $f^m \neq g^n$. Khi đó, ta có

$$deg(f^m - g^n) \geq \frac{mn - n - m}{n}.deg(f) + 1,$$

và

$$deg(f^m - g^n) \geq \frac{mn - m - n}{m}.deg(g) + 1. \tag{2.21}$$

Từ công thức (2.21), ta suy ra được bất đẳng thức sau:

$$deg(f^3 - g^4) \geq \frac{5}{3}.deg(f) + 1.$$

Khi đó, chúng ta đã giải quyết được bài toán (xem [1]) như sau: Cho f, g là các đa thức với hệ số nguyên, sao cho $f^3 - g^4$ không đồng nhất bằng 0. Chứng minh rằng

$$deg(f^3 - g^4) \geq \frac{5}{3}.deg(f) + 1.$$

Tương tự, việc áp dụng công thức (2.21), cho ta các bất đẳng thức khác cho bậc của đa thức. Tức là chúng ta đã chứng minh được nhiều bài toán tương tự như bài toán ở trên.

Việc áp dụng trực tiếp định lý Mason hoặc các hệ quả của nó, cũng như sử dụng các kết quả ở các công thức $(2.10), (2.16), (2.21)$ giúp chúng ta giải quyết được các bài toán về sự tồn tại đa thức, các bài toán về nghiệm trong $\mathbb{C}[t]$. Đa số các bài toán này đều giải được dựa vào phương pháp phản chứng.

2.2.2 Các bài tập áp dụng:

2.2.2.1 Các bài toán về nghiệm trong $\mathbb{C}[t]$:

Bài toán 2.1: Chứng minh rằng phương trình $X^4 + Y^4 = Z^2$ chỉ có nghiệm tầm thường trong $\mathbb{C}[t]$.

Hiển nhiên $X = Y = Z = 0$ là nghiệm của phương trình. Giả sử phương trình trên có nghiệm không tầm thường. Theo định lý Mason, ta có

$$max\{\deg(X^4), \deg(Y^4), \deg(Z^2)\} \leq n_0(X^4Y^4Z^2) - 1.$$

Ta suy ra được

$$deg(X^4) \leq n_0(X.Y.Z) - 1$$

$$\Leftrightarrow 4deg(X) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1. \tag{2.22}$$

Tương tự ta có

$$4deg(Y) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1. \tag{2.23}$$

$$2deg(Z) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1. \tag{2.24}$$

Từ (2.24) suy ra

$$deg(Z) \leq deg(X) + deg(Y) - 1. \tag{2.25}$$

Cộng (2.22) và (2.23) vế theo vế ta được

$$2[deg(X) + deg(Y)] \leq 2deg(Z) - 2. \tag{2.26}$$

Thay (2.25) vào (2.26) ta được

$$2[deg(X) + deg(Y)] \leq 2[deg(X) + deg(Y) - 1] - 2.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -4.$$

Điều này vô lý, vậy phương trình đã cho chỉ có nghiệm tầm thường.

Chúng ta xét đến phương trình có dạng $X^p + Y^q = Z^r$. Trường hợp $p = q = r \geq 3$ thì đây là phương trình Fermat cho đa thức và kết quả là bài toán vô nghiệm. Trường hợp p, q, r là các số nguyên dương bất kỳ lớn hơn 2 thì kết quả vẫn còn đúng.

Bài toán 2.2 : Cho p, q, r là các số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 3. Khi đó, phương trình Fermat tổng quát

$$X^p + Y^q = Z^r$$

không có nghiệm không tầm thường trong $\mathbb{C}[t]$.

Thật vậy, giả sử tồn tại các đa thức X, Y, Z khác 0 thoả mãn phương trình. Khi đó, áp dụng định lý Mason ta được

$$max\{\deg(X^p), \deg(Y^q), \deg(Z^r)\} \leq n_0(X^p Y^q Z^r) - 1.$$

Ta suy ra được

$$pdeg(X) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1,$$

$$qdeg(Y) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1,$$

$$rdeg(Z) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$(p-3)deg(X) + (q-3)deg(Y) + (r-3)deg(Z) \leq -3.$$

Điều này mâu thuẫn với $p, q, r \geq 3$

Bài toán 2.2 có thể phát biểu theo dạng nghiệm hữu tỷ như sau: Cho $n \geq 3$, chứng minh phương trình $x^n + y^n = 1$ không có nghiệm hữu tỷ khác hằng số x, y trong $\mathbb{C}[t]$.

Bài toán 2.1 và bài toán 2.2 chỉ là những trường hợp riêng của bài toán tổng quát sau. Do đó việc giải bài toán sau cho ta cách giải khác đối với hai toán trên.

Bài toán 2.3 : Cho p, q, r là các số nguyên dương. Nếu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$ thì phương trình $X^p + Y^q = Z^r$ chỉ có nghiệm tầm thường trong $\mathbb{C}[t]$.

Thật vậy, giả sử tồn tại các đa thức khác không và là nghiệm của phương trình trên. Khi đó, theo định lý Mason ta được

$$max\{\deg(X^p), \deg(Y^q), \deg(Z^r)\} \leq n_0(X^pY^qZ^r) - 1.$$

Từ đó, ta suy ra

$$pdeg(X) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1,$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} \geq \frac{deg(X)}{deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{q} \geq \frac{deg(Y)}{deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1}.$$
$$\frac{1}{r} \geq \frac{deg(Z)}{deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1}.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{deg(X) + deg(Y) + deg(Z)}{deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1} > 1. \tag{2.27}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Bây giờ ta xét đến một trường hợp riêng của bài toán trên. Đây chính là phương trình Catalan cho đa thức.

Bài toán 2.4: Cho p, q là các số dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình $X^p - Y^q = 1$ không có nghiệm là các đa thức khác hằng, nguyên tố cùng nhau trong $\mathbb{C}[t]$.

Thật vậy, giả sử tồn tại hai đa thức một biến với hệ số phức nguyên tố cùng nhau $X(t), Y(t)$ thoả mãn hệ thức $X^p - Y^q = 1$.

Theo định lý Mason ta có:

$$max\{\deg(X^p), \deg(Y^q)\} \leq n_0(X^pY^q) - 1.$$

Từ đó, ta suy ra

$$pdeg(X) \leq deg(X) + deg(Y) - 1, \tag{2.28}$$

và

$$qdeg(Y) \leq deg(X) + deg(Y) - 1. \tag{2.29}$$

Cộng vế theo vế (2.28) và (2.29) ta được

$$(p-2)deg(X)+(q-2)deg(Y)\leq -2. \tag{2.30}$$

Vì $p,q\geq 2$ nên $(p-2)deg(X)+(q-2)deg(Y)\geq 0$. Do đó (2.30) không xảy ra (đpcm).

Bài toán trên có thể giải quyết dựa vào định lý Davenport tổng quát và kết quả của bài toán 2.7 (xem trang 29) .

Trường hợp $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$ thì phương trình $X^p+Y^q=Z^r$ sẽ có nghiệm với p,q,r là các số nguyên dương bất kỳ. Hiển nhiên khi có ít nhất p,q,r bằng 1 thì bài toán đúng.

Bây giờ ta quan tâm đến nghiệm của bài toán cho p,q,r là các số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 2.

Bài toán 2.5 : Cho p,q,r là các số nguyên dương thoả $2\leq p\leq q\leq r$ và giả sử $X(t),Y(t),Z(t)$ là các đa thức thuộc $\mathbb{C}[t]$, nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là hằng số và thoả mãn phương trình $X^p+Y^q=Z^r$. Khi đó,

$a)(p,q,r)=(2,2,r)$với $r\geq 2$ hoặc

$b)(p,q,r)=(2,3,r)$với $3\leq r\leq 5$.

Thật vậy, giả sử $X(t),Y(t),Z(t)$ là các đa thức thuộc $\mathbb{C}[t]$ có bậc lần lượt là a,b,c.

Theo định lý Mason ,ta có

$$max\{\deg(X^p),\deg(Y^q),\deg(Z^r)\}\leq n_0(X^pY^qZ^r)-1.$$

Từ đó, ta suy ra

$$pdeg(X)\leq deg(X)+deg(Y)+deg(Z)-1,$$

$$\Leftrightarrow p.a\leq a+b+c-1.$$

Tương tự

$$q.b\leq a+b+c-1,$$

$$r.c\leq a+b+c-1.$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$p.a + q.b + r.c \leq 3(a + b + c - 1). \tag{2.31}$$

Vì $p \leq q \leq r$ nên

$$p(a + b + c) \leq p.a + q.b + r.c. \tag{2.32}$$

Từ (2.31) và (2.32) ta được

$$p(a + b + c) \leq 3(a + b + c) - 3.$$

Từ đây, ta suy ra được $p < 3$ mà $p \geq 2$ nên $p = 2$. Do đó

$$p.a \leq a + b + c - 1,$$

suy ra được

$$2.a \leq a + b + c - 1,$$

tức là

$$a \leq b + c - 1. \tag{2.33}$$

Kết hợp với

$$q.b \leq a + b + c - 1,$$

ta được

$$q.b \leq 2b + 2c - 2. \tag{2.34}$$

a) Nếu $q = 2$ thì

$$(p, q, r) = (2, 2, r); r \geq 2.$$

b) Xét $q \geq 3$.

Từ $q \leq r$, kết hợp với (2.33) ta suy ra

$$q(b + c) \leq qb + rc \leq 2(a + b + c - 1) \leq 4(b + c - 1) \leq 4(b + c) - 4.$$

Như vậy

$$(q - 4)(b + c) \leq -4,$$

suy ra $q \leq 3$.

Khi $q = 3$, từ (2.34) ta có

$$b \leq 2c - 2. \tag{2.35}$$

Do đó, kết hợp (2.33) và (2.35) ta được

$$r.c \leq a + b + c - 1 \leq 2(b + c - 1) \leq 6(c - 6),$$

suy ra $r < 6$.

Mà $3 = q \leq r$ nên ta có $(p, q, r) = (2, 3, r)$ với $3 \leq r \leq 5$.

2.2.2.2 Các bài toán về tồn tại đa thức:

Bài toán 2.6: Cho a là một số phức khác 0. Khi đó, nếu tồn tại các đa thức một biến với hệ số phức $f(t), g(t)$ thoả mãn phương trình $f^2(t) = g^3(t) + a$ thì f và g là các đa thức hằng.

Giả sử các đa thức f và g không là các đa thức hằng. Theo giả thiết $f^2(t) = g^3(t) + a$ nên $f^2(t) - g^3(t) = a \neq 0$. Khi đó, áp dụng định lý Mason hoặc định lý Davenport tổng quát ta kết luận được bài toán. Thật vậy, theo công thức (2.21), ứng với $m = 2, n = 3$ ta được

$$deg(f^2 - g^3) \geq \frac{1}{3}.deg(f) + 1$$

$$\Leftrightarrow deg(a) \geq \frac{1}{3}.deg(f) + 1.$$

Do $deg(a) = 0$ và $deg(f) > 0$ nên bất đẳng thức trên không xảy ra. Vậy f và g là các đa thức hằng.

Lập luận tương tự thì bài toán trên vẫn còn đúng khi m và n là các số nguyên bất kì.

Bài toán 2.7: Cho a là một số phức khác 0. Khi đó, nếu tồn tại các đa thức một biến với hệ số phức $f(t), g(t)$ thỏa mãn phương trình $f^m(t) = g^n(t) + a$, với $m, n \geq 2$ là các số nguyên dương tùy ý, thì f và g là các đa thức hằng.

Thật vậy, giả sử các đa thức f và g không là các đa thức hằng. Theo định lý Davenport tổng quát ta có

$$deg(f^m - g^n) \geq \frac{mn - m - n}{m}.deg(g) + 1. \tag{2.36}$$

Vì $m, n \geq 2$ nên $(m - 2)(n - 2) \geq 0$.

Khai triển ta được $mn - (m + n) + 4 - (m + n) \geq 0$.

Do đó $mn - (m + n) \geq 0$ (do $4 - (m + n) \leq 0$).

Như vậy, $\frac{mn-m-n}{m}.deg(g) + 1 \geq 1$ mà $deg(f^m - g^n) = deg(a) = 0$ nên bất đẳng thức (2.36) không xảy ra.

Vì vậy, các đa thức f và g đều là các đa thức hằng.

Bài toán 2.8: Không tồn tại các đa thức $f(t)$ và $g(t)$ nguyên tố cùng nhau trong $C[t]$ thoả mãn phương trình

$$(f + g)^3 + g^4 = f^5.$$

Thật vậy, theo giả thiết $(f, g) = 1$, ta suy ra $gcd(f, g, f + g) = 1$. Do đó áp dụng định lý Mason hoặc bài toán 2.2 cho $p = 3, q = 4, r = 5$ thì phương trình trên vô nghiệm.

Bài toán 2.9: Tìm các đa thức một biến$f(t)$ và $g(t)$ trong $\mathbb{C}[t]$ thoả mãn phương trình

$$(f + g)^3 = g^3 + f^3.$$

Ta có thể giải bài toán theo hằng đẳng thức như sau:

$$(f + g)^3 = g^3 + f^3$$

$$\Leftrightarrow 3f^2.g + 3f.g^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3f.g(f + g) = 0.$$

Tuy nhiên, việc giải bài toán cho số mũ tổng quát sẽ rất khó khăn nếu dùng hằng đẳng thức.

Bài toán 2.10: Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Tìm các đa thức một biến với hệ số phức $f(t)$ và $g(t)$ trong $\mathbb{C}[t]$ thoả mãn phương trình

$$(f + g)^n = g^n + f^n. \tag{2.37}$$

Xét trường hợp n là số lẻ.

Giả sử $(f, g) = 1$ thì $gcd(f, g, f + g) = 1$. Khi đó, áp dụng định lý Mason hoặc định lý Fermat cho đa thức, ta suy ra được không tồn tại hai đa thức $f(t)$ và $g(t)$ trong $\mathbb{C}[t]$ thoả mãn phương trình $(f+g)^n = g^n + f^n$.

Ta thấy rằng, $f(t) = -g(t)$ hoặc ít nhất f và g là đa thức 0 thoả mãn phương trình (2.37).

Trường hợp $(f, g) = h$, $h \neq 0, h \neq f$. Khi đó, tồn tại các đa thức u, v sao cho $f = h.u$, $g = h.v$. Phương trình$(f+g)^n = g^n + f^n$

$$\Leftrightarrow (u+v)^n = u^n + v^n. \tag{2.38}$$

Hiển nhiên $(u, v) = 1$ nên theo định lý Fermat cho đa thức ta suy ra phương trình (2.38) vô nghiệm.

Như vậy, khi n là số lẻ thì phương trình đã cho chỉ có nghiệm $f(t) = -g(t)$ hoặc ít nhất f và g là đa thức 0.

Xét trường hợp n là số chẵn.

Giả sử $(f, g) = 1$ thì $gcd(f, g, f+g) = 1$. Khi đó, áp dụng định lý Mason hoặc định lý Fermat cho đa thức, ta suy ra được không tồn tại hai đa thức $f(t)$ và $g(t)$ trong $\mathbb{C}[t]$ thoả mãn phương trình $(f+g)^n = g^n + f^n$.

Ta thấy rằng, ít nhất f và g là đa thức 0 thoả mãn phương trình (2.37).

Trường hợp $(f, g) = h$, $h \neq 0$. Khi đó, tồn tại các đa thức u, v sao cho $f = h.u$, $g = h.v$. Phương trình$(f+g)^n = g^n + f^n$

$$\Leftrightarrow (u+v)^n = u^n + v^n.$$

Hiển nhiên $(u, v) = 1$ nên theo định lý Fermat cho đa thức ta suy ra phương trình vô nghiệm.

Như vậy, khi n là số chẵn thì phương trình đã cho chỉ có nghiệm khi ít nhất f và g là đa thức 0.

Bài toán 2.11: Tìm các số nghiệm nguyên x của phương trình

$$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$$

Theo bài toán 2.9 ta kết luận được $2^x - 4 = 0$ hoặc $4^x - 2 = 0$ hoặc

$4^x + 2^x - 6 = 0$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên là $x = 2$ và $x = 1$.

Bài toán 2.12: Tồn tại hay không đa thức với hệ số thực P sao cho mọi nghiệm thực của P và $P + 1$ đều là nghiệm bội.

Ta dễ dàng chỉ ra được bài toán có nghiệm, chẳng hạn đa thức $P(t) = (1 - t^2)^3 - 1$.

Rõ ràng, nghiệm thực của $P(t)$ là $t = 0$ bội 3 và nghiệm thực của $P(t) + 1 = (1 - t^2)^3$ là $t = 1$, $t = -1$ đều bội 3 .

Khi chúng ta phát biểu bài toán 2.12 trên trường số phức và nghiệm phức thì kết quả sẽ như thế nào? Rõ ràng, đây là một bài toán khó nếu chúng ta không áp dụng định lý Mason.

Bài toán 2.13: Tồn tại hay không đa thức với hệ số phức P sao cho mọi nghiệm phức của P và $P + 1$ đều là nghiệm bội.

Giả sử tồn tại đa thức P với hệ số phức sao cho mọi nghiệm phức của P và $P + 1$ đều là nghiệm bội.

Do nghiệm bội nhỏ nhất của một số phức là bội 2 và mọi nghiệm của P đều là nghiệm bội nên $n_0(P) \leq \frac{1}{2}deg(P)$.

Tương tự mọi nghiệm của $P + 1$ đều là nghiệm bội nên ta cũng có $n_0(P + 1) \leq \frac{1}{2}deg(P + 1)$.

Từ đó, ta suy ra $n_0(P) + n_0(P + 1) \leq \frac{1}{2}deg(P) + deg(P + 1)$. Hay ta có

$$deg(P) + deg(P + 1) \geq 2[n_0(P) + n_0(P + 1)]. \tag{2.39}$$

Ta có sự phân tích $(P + 1) - P = 1$, ta có $(P, P + 1) = 1$, vì nếu ngược lại thì tồn tại đa thức h là ước chung lớn nhất của P và $P + 1$, gọi a là một nghiệm phức của đa thức h , khi đó a cũng là nghiệm của P và $P + 1$. Khi đó $P(a) = 0, P(a) + 1 = 0$, điều này suy ra được $1 = 0$ (vô lý).

Như vậy, $(P, P + 1) = 1$, áp dụng định lý Mason cho các đa thức

P , 1 và $P+1$ ta có

$$max\{\deg(P), \deg(P+1)\} \leq n_0(P.(P+1)) - 1.$$

Từ đó, ta suy ra

$$deg(P) \leq n_0(P) + n_0(P+1) - 1,$$

$$deg(P+1) \leq n_0(P) + n_0(P+1) - 1.$$

Cộng vế theo vế ta được

$$deg(P) + deg(P+1) \leq 2[n_0(P) + n_0(P+1)] - 2. \tag{2.40}$$

Kết hợp (2.39) và (2.40), ta được

$$2[n_0(P)+n_0(P+1)] \leq deg(P)+deg(P+1) \leq 2[n_0(P)+n_0(P+1)]-2.$$

$\Leftrightarrow 0 \leq -2$ (vô lý).

Vậy không thể tìm được đa thức P thoả yêu cầu bài toán.

Vào năm 1956 William Lowell đã đưa ra bài toán về đa thức sau và bài toán được trình bày theo định lý Mason.

Bài toán 2.14: Cho hai đa thức một biến với hệ số phức P và Q có chung tập hợp nghiệm nhưng có thể khác về số bội của nghiệm, và hai đa thức $P+1$ và $Q+1$ cũng có chung tập hợp nghiệm nhưng có thể khác về số bội của nghiệm. Chứng minh rằng, hai đa thức P và Q trùng nhau.

Thật vậy, giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là n nghiệm phân biệt của P và hiển nhiên đây cũng là các nghiệm của Q.

$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ là m nghiệm phân biệt của $P+1$ và hiển nhiên đây cũng là các nghiệm của $Q+1$.

Do vai trò về bậc của các đa thức P và Q như nhau nên ta có thể giả sử rằng $deg(P) \geq deg(Q)$.

Ta có sự phân tích $(P+1) - P = 1$ và $(P, P+1) = 1$.

Theo định lý Mason cho các đa thức P, 1 và $P+1$ ta có

$$max\{\deg(P), \deg(P+1)\} \leq n_0(P.(P+1)) - 1.$$

Từ đó, ta suy ra

$$deg(P) \leq n_0(P) + n_0(P+1) - 1,$$

$$\Leftrightarrow m + n \geq deg(P) + 1 \geq deg(P - Q) + 1. \qquad (2.41)$$

Mặt khác, $(P+1) - (Q+1) = P - Q$ nên mỗi nghiệm của P hoặc $P+1$ đều là nghiệm của $P - Q$. Do đó $m + n \leq deg(P)$.

Ta biết rằng, một đa thức nếu có số các nghiệm phân biệt lớn hơn bậc của đa thức thì đa thức đó là đa thức 0 .

Vì vậy, theo (2.41) ta suy ra $P - Q$ chỉ có thể là đa thức 0. Tức là, hai đa thức P và Q trùng nhau.

Chương 3

Sự tương tự số học của định lý Mason và ứng dụng giả thuyết abc trong nghiên cứu số học

Từ thưở xưa, các nhà toán học đã biết chuyển các kết quả số học sang giải quyết trên các đa thức và từ những bài toán và giả thuyết cho đa thức, người ta phát biểu tương tự cho số học. Trong những năm gần đây, sự phát triển của số học chịu ảnh hưởng nhiều từ sự tương tự giữa số nguyên và đa thức. Tức là, khi chứng minh một kết quả nào đó cho số học, người ta thử phát biểu và chứng minh xem các kết quả này có đúng cho đa thức hay không. Việc giải quyết bài toán trên đa thức đơn giản hơn do đa thức có phép tính đạo hàm. Điều này hoàn toàn hợp lý, bởi tập hợp số nguyên và tập hợp các đa thức có sự tương tự rất lớn. Cả hai tập hợp đều có các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia như nhau. Đối với số nguyên ta có số nguyên tố còn ở đa thức ta có đa thức bất khả quy. Hai số nguyên bất kỳ hoặc hai đa thức bất kỳ ta có thể định nghĩa ước chung lớn nhất và tìm được bằng thuật toán Euclide. Mỗi số nguyên đều phân tích thành tích các thừa số nguyên tố, mỗi đa thức có phân tích thành các đa thức bất khả quy. Các số hữu tỷ tương ứng với các hàm hữu tỷ. Ta biết $deg(P.Q) = degP + degQ$ và $log(ab) = loga + logb$, do đó bậc của đa thức tích tương tự như logarit của tích hai số nguyên dương.

Bây giờ, chúng ta quan tâm đến sự tương tự trong phân tích ra thừa số nguyên tố cho số nguyên và phân tích bất khả quy cho đa thức. Tức là từ khái niệm số các nghiệm phân biệt của đa thức P kí hiệu là $n_0(P)$ và $n_0(P.Q) \leq n_0(P) + n_0(Q)$, ta được khái niệm tương tự cho số nguyên a là $rad(a)$ và $rad(ab) \leq rad(a).rad(b)$. Vì vậy, định lý Mason cho đa thức được phát biểu tương tự cho số nguyên là giả thuyết abc. Giả thuyết này đã được phát biểu vào năm 1985 bởi J. Oesterle' trong một kết quả của đường cong Elliptic của bộ môn hình học đại số, ngay sau đó D.R. Masser phát biểu dựa vào sự tương tự của số nguyên và đa thức.

3.1 Giả thuyết abc cho các số nguyên:

Cho a, b, c là các số nguyên, nguyên tố cùng nhau và thoả mãn hệ thức $a + b = c$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số C_ε sao cho

$$max\{\mid a|, \mid b|, \mid c|\} \leq C_\varepsilon.[rad(abc)]^{1+\varepsilon}.$$

Cho đến hiện nay, giả thuyết abc vẫn chưa được chứng minh và việc lấy phản ví dụ cho giả thuyết là điều không thể. Bởi vì, số mũ $1 + \varepsilon$ làm cho giả thuyết rất mạnh. Mặt khác giả thuyết abc chứng tỏ rằng nếu trong khai triển của các số a, b, c có các thừa số nguyên tố với số mũ lớn thì các thừa số này được bù lại bằng một số lượng lớn các số nguyên tố nhỏ, có mặt trong khai triển với số mũ 1 .Các thừa số trong khai triển với số mũ lớn thì chúng được bù lại bởi các số nguyên tố lớn với số mũ 1.

Giả sử giả thuyết abc đúng, khi đó ta sẽ chứng minh được nhiều kết quả cũng như các giả thuyết về số học.

3.2 Áp dụng giả thuyết abc vào nghiên cứu số học

3.2.1 Các định lý và giả thuyết của số học.

3.2.1.1 Định lý cuối cùng của Fermat.

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên khác 0, với mọi số nguyên dương $n \geq 3$.

Dựa vào giả thuyết abc ta sẽ chứng minh được tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho phương trình Fermat vô nghiệm với mọi $n \geq n_0$.

Thật vậy, ta xét trường hợp $gcd(x, y, z) = 1$ và giả sử các số x, y, z đều dương, nếu ngược lại thì ta lấy trị tuyệt đối, sao cho $x^n + y^n = z^n$.

Theo giả thuyết abc ta có:

$$max\{\ x^n,\ y^n,\ z^n\} \leq C_\varepsilon.[rad(x^n y^n z^n)]^{1+\varepsilon}.$$

Chọn $\varepsilon = 1$, $k = max\{\ 1, C_1\}$, ta được

$$max\{\ x^n,\ y^n,\ z^n\} \leq k.[rad(x^n y^n z^n)]^2$$

Do các số x, y, z đều dương nên $rad(x^n y^n z^n) = rad(x.y.z) \leq x.y.z < z^3$.

Do đó $z^n < k.z^6$, hay $z^{n-6} \leq k$, do $gcd(x, y, z) = 1$ nên $z \geq 3$. Ta suy ra $3^{n-6} \leq k$. Lấy logarit cơ số 3 hai vế ta được $n < log_3 k + 6 = n_0$.

Trường hợp $gcd(x, y, z) = d \neq 1$ thì bằng cách loại bỏ thừa số chung ta được phương trình $x'^n + y'^n = z'^n$ vô nghiệm khi $n \geq 3$, với $gcd(x', y', z') = 1$.

Như vậy, định lý cuối cùng của Fermat chỉ đúng với $n < n_0$, tức là bài toán bị chặn và nếu xác định được $C_\varepsilon = C_1$ thì bài toán được giải quyết xong. Chẳng hạn, chọn $C_\varepsilon = \varepsilon = 1$ thì định lý cuối cùng của Fermat đúng khi $n \geq 6$. Các trường hợp $n < 6$ đã được chứng minh trước đó. Vào năm 1825 Ơle đã chứng minh với $n = 3$, từ phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương ta suy ra định lý cuối cùng của Fermat đúng với $n = 4$ (Xem [14]), Diricle với $n = 5$.

Tương tự như định lý Davenport cho đa thức ta có giả thuyết Hall cho số nguyên phát biểu vào năm 1965. Đây cũng chính là lời giải của bài toán đã được phát biểu vào năm 1921: Tìm các số x, y nguyên dương sao cho $x^3 - y^2 = k$, với k là số nguyên cho trước.

3.2.1.2 Giả thuyết Hall: Giả sử x, y là các số nguyên dương sao cho $x^3 - y^2 \neq 0$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số C_ε sao cho

$$\left|\ x^3 - y^2\right| > C_\varepsilon x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Thật vậy, trước hết ta có sự phân tích $x^3 = (x^3 - y^2) + y^2$. Để tiện lợi trong kí hiệu ta có thể giả sử $x^3 - y^2 > 0$. Theo giả thuyết abc ta có:

$$max\{\left|\ x^3\right|, \left|\ x^3 - y^2\right|, \left|\ y^2\right|\} \leq C_\varepsilon.[rad(x^3(x^3 - y^2)y^2)]^{1+\varepsilon}.$$

Theo định nghĩa [1.1.4, trang 7] ta có các công thức đánh giá sau:

$$rad(xyz) \leq rad(x).rad(y).rad(z)$$

và $rad(x^n) = rad(x) \leq x$.

Do đó,

$$x^3 \leq C_\varepsilon[rad(x^3(x^3-y^2)y^2)]^{1+\varepsilon}.$$

Suy ra

$$x^3 \leq C_\varepsilon[rad(x^3)]^{1+\varepsilon}[rad(x^3-y^2)]^{1+\varepsilon}[rad(y^2)]^{1+\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x^3 \leq C_\varepsilon x^{1+\varepsilon}(x^3-y^2)^{1+\varepsilon}y^{1+\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x^{2-\varepsilon} \leq C_\varepsilon(x^3-y^2)^{1+\varepsilon}y^{1+\varepsilon}. \tag{3.1}$$

Tương tự

$$y^2 \leq C_\varepsilon x^{1+\varepsilon}(x^3-y^2)^{1+\varepsilon}y^{1+\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow y \leq C_\varepsilon x^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}(x^3-y^2)^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \tag{3.2}$$

Thay (3.2) vào (3.1) ta được

$$x^{2-\varepsilon} \leq C_\varepsilon(x^3-y^2)^{\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}+(1+\varepsilon)}x^{\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}}$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{1-5\varepsilon}{1-\varepsilon}} \leq C_\varepsilon(x^3-y^2)^{\frac{2+2\varepsilon}{1-5\varepsilon}}$$

$$\Leftrightarrow x \leq C_\varepsilon(x^3-y^2)^{\frac{2+2\varepsilon}{1-5\varepsilon}} = C_\varepsilon(x^3-y^2)^{2+\frac{12\varepsilon}{1-5\varepsilon}}$$

Như vậy,

$$x^{\frac{1}{2}-\frac{12\varepsilon}{1-5\varepsilon}} \leq C_\varepsilon(x^3-y^2)^{(2+\frac{12\varepsilon}{1-5\varepsilon})(\frac{1}{2}-\frac{12\varepsilon}{1-5\varepsilon})}$$

Đặc $\varepsilon_1 = \frac{12\varepsilon}{1-5\varepsilon}$. Khi đó, ta được

$$x^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1} \leq C_\varepsilon(x^3-y^2)^{(2+\varepsilon_1)(\frac{1}{2}-\varepsilon_1)} = C_\varepsilon(x^3-y^2)^{1-\frac{3}{2}\varepsilon_1-\varepsilon_1^2}$$

Tức là,

$$x^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1} \leq C_\varepsilon(x^3-y^2)$$

$$\Leftrightarrow \left| x^3-y^2\right| > C_{\varepsilon_1}x^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}.$$

Ta có thể biến đổi kết quả của giả thuyết Hall như sau:

$$\left| x^3-y^2\right| > C_\varepsilon x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

$$\Leftrightarrow \left| x^3-y^2\right|^{\frac{2}{1-2\varepsilon}} > C_\varepsilon x$$

$$\Leftrightarrow \left|\ x^3 - y^2\right|^{\frac{6}{1-2\varepsilon}} > C_\varepsilon x^3$$

$$\Leftrightarrow \left|\ x^3 - y^2\right|^{6+\frac{12\varepsilon}{1-2\varepsilon}} > C_\varepsilon x^3$$

$$\Leftrightarrow \left|\ x^3 - y^2\right|^{6+\varepsilon_1} > C_{\varepsilon_1} x^3$$

Bằng cách chứng minh tương tự như trên, ta có thể mở rộng giả thuyết Hall cho các số mũ luỹ thừa nguyên m và n bất kỳ.

3.2.1.3 Giả thuyết Hall tổng quát: Cho m và n là các số nguyên lớn hơn 1. Giả sử x, y là các số nguyên sao cho $a.x^m - b.y^n \neq 0$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số C_ε sao cho

$$\left|\ x^m\right| < C_\varepsilon \left|\ x^m - y^n\right|^{\frac{n.m.(1+\varepsilon)}{mn-n-m}}.$$

Chứng minh [xem [16], trang 14, chương 1]

3.2.2 Các bài toán tương tự cho số học của các bài toán ở 2.2.2

Tương tự như bài toán [(2.2), trang 25] ta có bài toán sau cho số nguyên. Đây chính là giả thuyết Tijdeman-Zagier.

Bài toán 3.1: (Giả thuyết Tijdeman-Zagier).

Nếu p, q, r là các số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3 thì phương trình $x^p + y^q = z^r$ không có nghiệm nguyên x, y, z khác 0, nguyên tố cùng nhau.

Thật vậy, giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z khác 0 nguyên tố cùng nhau thoả mãn phương trình $x^p + y^q = z^r$. Theo giả thuyết abc ta được

$$max\{\ x^p,\ y^q,\ z^r\} \leq C_\varepsilon.[rad(x^p y^q z^r)]^{1+\varepsilon}.$$

Ta chứng minh bài toán này trong trường hợp số mũ đủ lớn. Tức là,

$$min(p, q, r)\ > k, \tag{3.3}$$

trong đó $k = \frac{logC_\varepsilon}{log2} + (3 + 3\varepsilon)$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $max\{\ x,\ y,\ z\} = x$. Khi đó,

$$x^p \leq C_\varepsilon.[rad(x^p y^q z^r)]^{1+\varepsilon},$$

$$\Leftrightarrow x^p \leq C_\varepsilon.(xyz)^{1+\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x^p \leq C_\varepsilon.x^{3+3\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x^{p-3-3\varepsilon} \leq C_\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow p \leq \frac{logC_\varepsilon}{log2} + (3+3\varepsilon) = k,\ do\ \ logx \geq log2.$$

Điều này mâu thuẫn với (3.3).

Vậy phương trình $x^p + y^q = z^r$ không có nghiệm không tầm thường, nguyên tố cùng nhau khi p, q, r là các số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Hay nói cách khác, nếu p, q, r là các số nguyên lớn hơn 2 và thỏa mãn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leq 1$ thì phương trình $x^p + y^q = z^r$ chỉ có nghiệm tầm thường trong $\mathbb{Z}$ hoặc các nghiệm có ước chung khác 1.

Vấn đề đặt ra là khi $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < 1$ và p, q, r là các số nguyên bất kỳ, bỏ đi giả thiết lớn hơn hoặc bằng 3, thì phương trình $x^p + y^q = z^r$, với $gcd(x, y, y) = 1$, có nghiệm (x, y, z) không tầm thường trong $\mathbb{Z}$ hay không? Đây chính là giả thuyết Fermat-Catalan.

Bài toán 3.2: (Giả thuyết Fermat-Catalan)

Nếu p, q, r là các số nguyên dương thoả mãn hệ thức $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < 1$ thì tồn tại hữu hạn các số nguyên tố cùng nhau x, y, z là nghiệm của phương trình $x^p + y^q = z^r$.

Thật vậy, giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z khác 0 nguyên tố cùng nhau thoả mãn phương trình $x^p + y^q = z^r$. Ta có thể giả sử $p \leq q \leq r$, nếu ngược lại thì ta đổi vị trí của các số hoặc chuyển vế cho phương trình.

Khi đó, (p, q, r) có một trong các cặp số sau: $(2, 3, r))$ với $r \geq 7$, hoặc $(2, 4, r)$ với $r \geq 5$, hoặc $(2, q, r)$ với $r \geq q \geq 5$, hoặc $(3, 3, r)$ với $r \geq 4$, hoặc $(3, q, r)$ với $r \geq q \geq 4$, hoặc (p, q, r) với $r \geq q \geq p \geq 4$.

Trong các trường hợp trên thì

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{41}{42},$$

và

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{41}{42}$$

khi $(p, q, r) = (2, 3, 7)$.

Theo giả thuyết abc ta được

$$max\{\ x^p,\ y^q,\ z^r\} \leq C_\varepsilon.rad(x^p y^q z^r)^{1+\varepsilon}. \tag{3.4}$$

Chọn $\varepsilon = \frac{1}{42}$ và đặt $max\{|\ x^p|\ ,|\ y^q|\ ,|\ z^r|\} = M$.

Khi đó, theo (3.4) ta có

$$M \leq C.[rad(x^p).rad(y^q).rad(z^r)]^{1+\frac{1}{42}},$$

với $C = C_{\frac{1}{42}}$.

Do đó

$$M \leq C.(|\ x||\ y||\ z|)^{\frac{43}{42}}$$

$$\Leftrightarrow M \leq C.M^{\frac{1}{p}} M^{\frac{1}{q}} M^{\frac{1}{r}\frac{43}{42}}$$

$$\Leftrightarrow M \leq C.M^{(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}).\frac{43}{42}}$$

$$\Leftrightarrow M^{\frac{1}{1764}} \leq C.$$

Điều này chứng tỏ M bị chặn, tức là x, y, z bị chặn. Vì vậy có hữu hạn các số x, y, z nguyên tố cùng nhau thoả phương trình $x^p + y^q = z^r$ khi p, q, r là các số nguyên dương thoả mãn hệ thức $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < 1$.

Bây giờ, ta xét một trường hợp riêng của bài toán 3.2. Đây chính là phương trình Catalan cho số nguyên.

Bài toán 3.3 Phương trình $x^p - y^q = 1$ với $p, q \geq 2$ chỉ có nghiệm nguyên dương duy nhất $(x, y) = (3, 2)$.

Thật vậy, theo bài toán (3.2), với $p = 2, q = 3, r \geq 7$ thì bài toán có nghiệm $(x, y) = (3, 2)$. Nếu $p, q \geq 3$, áp dụng kết quả (3.1) thì phương trình vô nghiệm.

Như vậy, theo bài toán (3.1) thì phương trình $x^p + y^q = z^r$ vô nghiệm khi p, q, r là các số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 3, khi đó ta có $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leq 1$. Theo bài toán (3.2) thì phương trình $x^p + y^q = z^r$

có hữu hạn nghiệm (x, y, z), nguyên tố cùng nhau khi p, q, r là các số nguyên dương thoả mãn hệ thức $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < 1$.

Từ hai kết quả này ta suy ra được phương trình $x^p + y^q = z^r$ chỉ có nghiệm khi chỉ có duy nhất một trong ba số p, q, r bằng 2 và thoả $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < 1$.

Chẳng hạn, ta có các nghiệm của phương trình như sau:

$$1 + 2^3 = 3^2; 2^5 + 7^2 = 3^4; 7^3 + 13^2 = 2^9; 2^7 + 17^3 = 71^2; 3^5 + 11^4 = 122^2$$

$$17^7 + 76271^3 = 21063928^2; 33^8 + 1549034^2 = 15613^3...$$

Trường hợp $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geq 1$ thì việc tồn tại nghiệm của phương trình $x^p + y^q = z^r$ được xét gần giống như bài tập [(2.5), trang 27] cho đa thức. Cụ thể như sau :

Bài toán 3.4

Cho p, q, r là các số nguyên dương thoả $2 \leq p \leq q \leq r$ và giả sử x, y, z là các số nguyên, nguyên tố cùng nhau từng cặp, khi đó:

a) Nếu $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > 1$, tức là $(p, q, r) = (2, 2, r)$ với $r \geq 2$ hoặc $(p, q, r) = (2, 3, r)$ với $3 \leq r \leq 5$ thì phương trình $x^p + y^q = z^r$ vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

b) Nếu $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = 1$ thì phương trình $x^p + y^q = z^r$ không có nghiệm khi $(p, q, r) = (3, 3, 3)$ và $(p, q, r) = (2, 4, 4)$ nhưng có nghiệm khi $(p, q, r) = (2, 3, 6)$, chẳng hạn phương trình $x^2 + y^3 = z^6$ có nghiệm là $(3, -2, 1)$.

Các kết quả này được chứng minh bởi lý thuyết hàm Modunlar (xem [10], [14]), không thể áp dụng được giả thuyết abc.

Tương tự như các bài toán tồn tại đa thức, ta phát biểu bài toán tìm số nguyên thoả điều kiện cho trước.

Theo bài toán [(2.6), trang 29]: Cho a là một số phức khác 0. Khi đó, nếu tồn tại các đa thức một biến với hệ số phức $f(t), g(t)$ thoả phương trình $f^2(t) = g^3(t) + a$ thì f và g là các đa thức hằng.

Do đó, khi ta thay đa thức trong bài toán này bởi các số nguyên thì bài toán sẽ có nghiệm .

Bài toán 3.5

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - y^2 = 4$.

Chúng ta có thể giải bài toán trên dựa vào số nguyên Gauss(xem [2]). Tuy nhiên phương pháp này khá phức tạp. Chúng ta có cách giải ngắn gọn hơn nhiều dựa vào giả thuyết Hall . Theo giả thuyết Hall ta có

$$\left| x^3 - y^2 \right|^{6+\varepsilon} > C_\varepsilon x^3$$
$$\left| x^3 - y^2 \right|^{6+\varepsilon} > C_\varepsilon y^2.$$

Do đó,

$$4^{6+\varepsilon} > C_\varepsilon x^3$$
$$4^{6+\varepsilon} > C_\varepsilon y^2.$$

Như vậy x và y đều bị chặn bởi những số nhỏ. Mặt khác, từ phương trình $x^3 - y^2 = 4$ ta suy ra được $x \leq y$ nên ta dễ dàng thay các giá trị của x và y vào phương trình. Phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2, 2)$.

Tương tự bài toán trên, áp dụng giả thuyết Hall cho các số mũ m, n lớn hơn 1 với công thức

$$| x^m | < C_\varepsilon \, | x^m - y^n |^{\frac{n.m.(1+\varepsilon)}{mn-n-m}}, \tag{3.5}$$

ta suy ra được định lý Lebesgue: Cho p là một số nguyên tố. Khi đó phương trình $x^p - y^2 = 1$ không có nghiệm nguyên thoả $x.y \neq 0$.

Đồng thời việc áp dụng công thức (3.5) ta tìm được $(x, y) = (0, 1)$ là nghiệm duy nhất của phương trình $x^3 + 1 = y^4$. Bài toán này chỉ là một trường hợp của bài toán tổng quát sau.

Bài toán 3.6 (Trích đề thi vô địch quốc gia Ấn Độ 1998).

Tìm các số (x, y, n) nguyên dương sao cho $(x, n + 1) = 1$ và thỏa mãn hệ thức $x^n + 1 = y^{n+1}$.

Bài toán này được giải quyết đơn giản khi ta áp dụng giả thuyết Hall. Ta xét các trường hợp như sau.

Nếu $n = 1$, ta được phương trình $x + 1 = y^2$ có vô số nghiệm thoả điều kiện $(x, 2) = 1$. Ta suy ra x là số lẻ và y chẵn. Chẳng hạn $(x, y) = (3, 2), (15, 4), (35, 6), ...$ là các nghiệm của phương trình.

Nếu $n > 1$, theo giả thuyết Hall ta có : với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số C_ε sao cho

$$| \; x^m| < C_\varepsilon \, | \; x^m - y^n|^{\frac{n.m.(1+\varepsilon)}{nm-n-m}}.$$

Thay $m = n$; $n + 1 = m$ và $| \; x^m - y^n| = 1$, ta được

$$| \; x^n| < C_\varepsilon.1.$$

Do đó $x = 0$ và $y = 1$ thỏa hệ thức $x^n + 1 = y^{n+1}$. Mặt khác, theo giả thiết $(x, n + 1) = 1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy bài toán chỉ có nghiệm khi $n = 1$, x lẻ và y chẵn.

Bài toán 3.7 (Trích đề thi vô địch Nga 1997)

Tìm các số nguyên tố p và q thoả mãn hệ thức sau:

$$(p + q)^3 + q^4 = p^5. \tag{3.6}$$

Ta có thể giải bài toán trên mà không áp dụng giả thuyết abc như sau:

Xét trường hợp $p = q$, ta được phương trình $p^3(p^2 - p - 8) = 0$ (loại).

Xét trường hợp $p \neq q$, khi ấy ta có:

$$\begin{aligned} &(p + q)^3 + q^4 = p^5, \\ \Leftrightarrow\ & q^4 + q^3 + 3pq(p + q) = p^5 - p^3, \\ \Leftrightarrow\ & q[q^2(q+1)+3p(q+1)+3p(q-1)] = p^3(p^2-1). \end{aligned}$$

Kết hợp với p và q là các số nguyên tố nên ta suy ra

$$\begin{cases} p \,|(q + 1) \\ q \,|(p^2 - 1) \end{cases}$$

Xét khả năng thứ nhất $\begin{cases} p \,|(q + 1) \\ q \,|(p - 1) \end{cases}$

Ta suy ra $\begin{cases} p \le (q+1) \\ q \le (p-1) \end{cases}$, tức là $(p-1) \le q \le (p-1)$. Ta được $p-1=q$ mà p và q là các số nguyên tố nên ta suy ra $p=3, q=2$, thay vào phương trình (3.6) không thoả.

Xét khả năng thứ hai $\begin{cases} p\,|(q+1) \\ q\,|(p+1) \end{cases}$

Ta suy ra $\begin{cases} p \le (q+1) \\ q \le (p+1) \end{cases}$, tức là $(p-1) \le q \le (p+1)$. Ta được $q=p-1$ hoặc $q=p$ hoặc $q=p+1$ mà p và q là các số nguyên tố nên ta suy ra $p=3, q=2$ hoặc $p=2, q=3$, thay vào phương trình (3.6) không thoả.

Vậy bài toán cho vô nghiệm.

Bài toán (3.7) có thể giải quyết thật ngắn gọn khi chúng ta dùng đến giả thuyết abc mà trực tiếp là giả thuyết Tijdeman-Zagier, trong đó $x=p+q, y=q, z=p$, $(p,q)=1$ và các số mũ đều lớn hơn hoặc bằng 3. Khi đó, phương trình (3.6) vô nghiệm.

Giả sử chúng ta thay đổi giả thiết của bài toán và nếu ta không áp dụng giả thuyết Tijdeman-Zagier liệu có giải được bài toán sau không?

Bài toán 3.8 Tìm các số nguyên, nguyên tố cùng nhau p và q thoả mãn hệ thức sau:

$$(p+q)^3+q^4=p^5. \tag{3.7}$$

Bằng cách lập luận tương tự như bài tập (3. 7) ta suy ra các trường hợp $q=p-1$ hoặc $q=p$ hoặc $q=p+1$ mà p và q là các số nguyên tố cùng nhau nên chúng ta không thể thử hết các giá trị của các số p và q nguyên tố cùng nhau thoả mãn hệ thức (3.7). Do đó ta không thể kết luận được bài toán.Tuy nhiên, khi áp dụng giả thuyết Tijdeman-Zagier thì bài toán (3.8) thoả các điều kiện của giả thuyết. Do đó bài toán vô nghiệm. Bây giờ chúng ta xét bài toán tương tự như bài [(2.8), trang 30] cho số nguyên và cũng có cách giải tương tự.

Bài toán 3.9: Tìm tất cả các số nguyên a và b thoả mãn phương trình

$$(a+b)^3=a^3+b^3.$$

Bài toán 3.7 ta có thể giải theo hằng đẳng thức như sau:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3$$

$$\Leftrightarrow 3a^2.b + 3a.b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a.b(a+b) = 0.$$

Từ đó suy ra $a = 0$ hoặc $b = 0$ hoặc $a = -b$. Tuy nhiên, việc giải bài toán cho số mũ tổng quát $n \geq 3$ thì sẽ rất khó khăn khi dùng hằng đẳng thức. Trong trường hợp đó, chúng ta sẽ dùng giả thuyết abc mà hệ quả của nó là định lý cuối cùng của Fermat cho số nguyên để giải quyết bài toán. Bài toán (3.9) là một trường hợp của bài toán sau.

Bài toán 3.10: Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Tìm tất cả các số nguyên a và b thoả mãn phương trình

$$(a+b)^n = a^n + b^n. \tag{3.8}$$

a) Xét trường hợp n là số lẻ.

Giả sử $(a, b) = 1$ thì $gcd(a, b, a+b) = 1$. khi đó, áp dụng giả thuyết abc hoặc định lý Fermat cho số nguyên, ta suy ra được không tồn tại hai số nguyên a và b thoả mãn phương trình $(a+b)^n = a^n + b^n$.

Ta thấy rằng, $a = -b$ hoặc ít nhất $a = 0$ hoặc $b = 0$ thoả mãn phương trình (3.8).

Trường hợp khác, khi $(a, b) = c$, hiển nhiên $c \neq 0, c \neq a$. Khi đó, tồn tại các số nguyên u, v sao cho $a = c.u$, $b = c.v$. Phương trình $(a+b)^n = a^n + b^n$

$$\Leftrightarrow (u+v)^n = u^n + v^n. \tag{3.9}$$

Hiển nhiên $(u, v) = 1$ nên theo định lý Fermat cho số nguyên ta suy ra phương trình (3.9) vô nghiệm.

Như vậy, khi n là số lẻ thì phương trình (3.8) chỉ có nghiệm $a = -b$ hoặc ít nhất $a = 0$ và $b = 0$.

b) Xét trường hợp n là số chẵn.

Giả sử $(a, b) = 1$ thì $gcd(a, b, a+b) = 1$. Khi đó, áp dụng giả thuyết abc hoặc định lý Fermat cho số nguyên, ta suy ra được không tồn tại hai số nguyên a và b thoả mãn phương trình $(a+b)^n = a^n + b^n$.

Ta thấy rằng, ít nhất $a = 0$ và $b = 0$ thoả mãn phương trình (3.8).

Trường hợp $(a,b) = c$, $c \neq 0$. Khi đó, tồn tại các số nguyên u, v sao cho $a = c.u$, $b = c.v$. Phương trình$(a+b)^n = a^n + b^n$ tương đương với phương trình

$$(u+v)^n = u^n + v^n. \tag{3.10}$$

Hiển nhiên $(u,v) = 1$ nên theo định lý Fermat cho số nguyên ta suy ra phương trình (3.10) vô nghiệm.

Như vậy, khi n là số chẵn thì phương trình (3.8) chỉ có nghiệm khi ít nhất $a = 0$ hoặc $b = 0$.

Trong khi đó, nếu ta không dùng định lý Fermat cho số nguyên mà áp dụng khai triển nhị thức Niuton thì chúng ta sẽ gặp khó khăn và không kết luận được bài toán.

Thật vậy, $(a+b)^n = a^n + b^n$

$$\Leftrightarrow C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(C_n^1 a^{n-2} + C_n^2 a^{n-3} b + ... + C_n^{n-1} b^{n-2}) = 0$$

Sẽ rất khó để tìm a và b thoả $C_n^1 a^{n-2} + C_n^2 a^{n-3} b + ... + C_n^{n-1} b^{n-2} = 0$.

Chúng ta phát biểu tương tự cho số nguyên của bài toán [(2.13), trang 32.]

Bài toán 3.11 Tồn tại hay không số nguyên a sao cho mọi ước nguyên tố của a và $a+1$ đều có số mũ bội.

Giả sử tồn tại số nguyên a sao cho mọi ước nguyên tố của a và $a+1$ đều có số mũ bội.

Do mũ bội của một số nguyên nhỏ nhất là bội 2 và mọi ước nguyên tố của a đều là mũ bội nên $rad(a) \leq \sqrt{a}$.

Tương tự mọi ước nguyên tố của $a+1$ đều là có số mũ bội nên $rad(a+1) \leq \sqrt{a+1}$.

Từ đó, ta suy ra

$$rad(a).rad(a+1) \leq \sqrt{a.(a+1)}.$$

Như vậy, ta có

$$[rad(a).rad(a+1)]^2 \leq a.(a+1). \tag{3.11}$$

Ta có sự phân tích $(a+1) - a = 1$, rõ ràng $(a, a+1) = 1$, vì nếu ngược lại thì tồn tại số nguyên b là ước chung lớn nhất của a và $a+1$. Khi đó, $(a, a+1) = b$ suy ra $(a, a+1-a) = b$ hay $(a, 1) = b$ (vô lý) .

Như vậy, $(a, a+1) = 1$, áp dụng giả thuyết abc cho các số nguyên a , 1 và $a+1$ ta có

$$max\{a, a+1\} \leq C_\varepsilon.[ada(a+1)]^{1+\varepsilon}.$$

Do đó,

$$a.(a+1) \leq C_\varepsilon.[rad(a(a+1)]^{2+2\varepsilon}. \tag{3.12}$$

Kết hợp (3.11) và (3.12), ta được

$$[rad(a).rad(a+1)]^2 \leq a.(a+1) \leq C_\varepsilon.[rad(a(a+1)]^{2+2\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq C_\varepsilon.[rad(a(a+1)]^{2\varepsilon} \text{ (đúng).}$$

Như vậy, khác với bài toán [(2.13), trang 32] cho đa thức không tồn tại. Bài toán (3.11) là tồn tại số a, chẳng hạn $a = 8$ khi đó $8 = 2^3$ và $9 = 3^2$.

Chúng ta phát biểu tương tự cho số nguyên của bài toán [(2.14), trang 33].

Bài toán 3.12: Tìm hai số nguyên a và b sao cho $rad(a) = rad(b)$ và $rad(a+1) = rad(b+1)$.

Ta dễ dàng chỉ được các số như sau: $a = 2, b = 8$ vì $rad2 = rad8 = 2$ và $rad3 = rad9 = 3$ hoặc $a = 75, b = 1215$.

Chương 4

Một số kết quả gần đây theo hướng mở rộng định lý Mason

Ta biết rằng định lý Mason phát biểu cho ba đa thức nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là hằng số. Vậy định lý Mason có thể áp dụng cho n hàm số $n \geq 3$ được hay không? Khi đó bất đẳng thức trong định lý Mason sẽ như thế nào? Ta đã biết đến một cách chứng minh khác của định lý này là dùng định thức của Đại số tuyến tính. Trong những năm gần đây, bằng kỹ thuật Wronskian chúng ta có thể mở rộng định lý Mason cho nhiều đa thức cũng như mở rộng cho hàm nhiều biến.

4.1 Định lý Mason mở rộng cho nhiều hàm số một biến.

4.1.1 Định lý: Cho $n+2$ đa thức $f_0, f_1, ..., f_{n+1}$ một biến trên trường có đặc số 0, không có nghiệm chung, không đồng thời là các đa thức hằng. Giả sử rằng $gcd(f_i, f_j, f_k) = 1$ với các số khác nhau bất kỳ $i, j, k \in \{0, 1, ..., n+1\}$, $f_0 + f_1 + ... + f_{n+1} = 0$ và hệ $f_0, f_1, ..., f_n$ độc lập tuyến tính. Khi đó

$$\underset{0 \leq j \leq n+1}{Max} \deg(f_j) \leq (2n-1)[n_0(f_0.f_1...f_{n+1}) - 1]. \tag{4.1}$$

4.1.2 Chứng minh : Theo giả thiết hệ $f_0, f_1, ..., f_n$ độc lập tuyến tính, khi đó theo [Định lý 1.3.2 trang 11] chúng ta được định thức Wronskian W của $f_0, f_1, ..., f_n$ không triệt tiêu. Do đó, đặt

$$P = \frac{W(f_0, f_1, ..., f_n)}{f_0.f_1...f_n}$$

$$Q = \frac{f_0.f_1...f_{n+1}}{W(f_0, f_1, ..., f_n)}.$$

Từ đó ta có

$$P.Q = f_{n+1}. \tag{4.2}$$

Giả sử rằng α là một nghiệm của

$$f_0.f_1...f_{n+1},$$

theo giả thiết $f_0, f_1, ..., f_{n+1}$ không có nghiệm chung. Do đó, tồn tại k, $0 \leq k \leq n+1$ sao cho $f_k(\alpha) \neq 0$ nên $\mu^{\alpha}_{f_k} = 0$.

Mặt khác, $f_0 + f_1 + ... + f_{k-1} + f_{k+1} + ... + f_{n+1} = -f_k$ và áp dụng các tính chất của định thức [(1.3.4.3), trang 12] ta có các phép biến đổi sau:

$$W(f_0, f_1, ..., f_n) = \det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \dots f_k \dots & f_n \\ f_0' & f_1' \dots f_k' \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ f_0^{(n)} & f_1^{(n)} \dots f_k^{(n)} \dots & f_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \dots (f_{n+1} + \sum\limits_{i \neq k} f_i) \dots & f_n \\ f_0' & f_1' \dots (f_{n+1}' + \sum\limits_{i \neq k} f_i') \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ f_0^{(n)} & f_1^{(n)} \dots (f_{n+1}^{(n)} + \sum\limits_{i \neq k} f_i^{(n)}) \dots & f_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \dots f_{n+1} \dots & f_n \\ f_0' & f_1' \dots f_{n+1}' \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ f_0^{(n)} & f_1^{(n)} \dots f_{n+1}^{(n)} \dots & f_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{n-k+2} W(f_0, f_1, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_{n+1}).$$

Do đó,

$$\mu^{\alpha}_{\frac{f_0.f_1...f_{n+1}}{W(f_0, f_1, ..., f_n)}} = \mu^{\alpha}_{\frac{f_0.f_1...f_{k-1}.f_{k+1}...f_{n+1}}{W(f_0, f_1, ...f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_{n+1})}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \mu^{\alpha}_{f_j} - \mu^{\alpha}_{W(f_0,f_1,...,f_{k-1},f_{k+1},...,f_{n+1})}.$$

Theo định nghĩa định thức [xem (1.3.4.2), trang 11] ta có được kết quả $W(f_0, f_1, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_{n+1})$ là tổng của các số hạng có dạng như sau $\delta.(f_{\alpha_0})(f'_{\alpha_1})...(f^{(n)}_{\alpha_n})$, với $\alpha_i \in \{0, 1, ..., n+1\}\backslash\{k\}; \delta = \pm 1$.

Giả sử rằng tồn tại m hàm số f_j sao cho $f_j(\alpha) = 0$. Theo giả thiết $gcd(f_i, f_j, f_k) = 1$ với các số khác nhau $i, j, k \in \{0, 1, ..., n+1\}$, chúng ta suy ra $m \leq 2$.

Như vậy, có nhiều nhất là hai đa thức nhận α làm nghiệm. Chúng ta biết rằng $\mu^{\alpha}_{\varphi^{(k)}} \geq -k + \mu^{\alpha}_{\varphi}$ [xem tính chất 1.4.2.2, trang 13]. Từ đó, ta có

$$\mu^{\alpha}_{f_{\alpha_0}.f'_{\alpha_1}...f^{(n)}_{\alpha_n}} \geq \sum_{f_j(\alpha)} \mu^{\alpha}_{f_{\alpha_j}} - (n + (n-1)). \tag{4.3}$$

$$= \mu^{\alpha}_{\prod_{j=0}^{n+1} f_{\alpha_j}} - (2n-1).$$

Đẳng thức ở (4.3) xảy ra khi α là nghiệm của $f^{(n)}_{\alpha_n}$ và $f^{(n-1)}_{\alpha_{n-1}}$.

Dựa vào tính chất $\mu^{\alpha}_{f+g} \geq \min(\mu^{\alpha}_f, \mu^{\alpha}_g)$ và $\mu^{\alpha}_{fg} = \mu^{\alpha}_f + \mu^{\alpha}_g$, chúng ta suy ra

$$\mu^{\alpha}_{W(f_0,f_1,...,f_{k-1},f_{k+1},...,f_{n+1})} \geq \mu^{\alpha}_{\prod_{j=0}^{n+1} f_{\alpha_j}} - (2n-1)$$

$$\Leftrightarrow \mu^{\alpha}_{\prod_{j=0}^{n+1} f_{\alpha_j}} - \mu^{\alpha}_{W(f_0,f_1,...,f_{k-1},f_{k+1},...,f_{n+1})} \leq 2n-1.$$

Vì vậy,

$$\mu^{\alpha}_{\frac{f_0.f_1...f_{n+1}}{W(f_0,f_1,...,f_n)}} \leq 2n-1.$$

Kết hợp với α là một nghiệm của $f_0.f_1...f_{n+1}$, chúng ta suy ra

$$deg(Q) \leq (2n-1)[n_0(f_0.f_1...f_{n+1})]. \tag{4.4}$$

Ta có sự biến đổi $P = \frac{W(f_0, f_1, ..., f_n)}{f_0.f_1...f_n} = \frac{1}{f_0.f_1...f_n} \det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \dots & f_n \\ f_0' & f_1' \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_0^{(n)} & f_1^{(n)} \dots & f_n^{(n)} \end{pmatrix}$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \dots & 1 \\ \frac{f_0'}{f_0} & \frac{f_1'}{f_1} \dots & \frac{f_n'}{f_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{f_0^{(n)}}{f_0} & \frac{f_1^{(n)}}{f_1} \dots & \frac{f_n^{(n)}}{f_n} \end{pmatrix}.$$

Như vậy P là tổng của các số hạng sau

$$\delta \frac{f'_{\beta_1} f''_{\beta_2} ... f^{(n)}_{\beta_n}}{f_{\beta_1} f_{\beta_2} ... f_{\beta_n}},$$

với $\beta_i \in \{0, 1, ..., n\}, \delta = \pm 1$. Trong mỗi số hạng của tổng, ta có

$$\deg \frac{f'_{\beta_1} f''_{\beta_2} ... f^{(n)}_{\beta_n}}{f_{\beta_1} f_{\beta_2} ... f_{\beta_n}} = \deg \left(\frac{f'_{\beta_1}}{f_{\beta_1}} \right) + \deg \left(\frac{f''_{\beta_2}}{f_{\beta_2}} \right) + ... + \deg \left(\frac{f^{(n)}_{\beta_n}}{f_{\beta_n}} \right)$$

$$= -(1 + 2 + 3 + ... + n) = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

Do đó

$$deg(P) \leq -\frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.5}$$

Từ các công thức (4.2), (4.4), (4.5) chúng ta suy ra

$$deg(f_{n+1}) = deg(P) + deg(Q) \leq (2n-1)[n_0(f_0.f_1...f_{n+1})] - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ta lại có $\frac{n(n+1)}{2} > (2n-1), \forall n > 2$ nên

$$deg(f_{n+1}) \leq (2n-1)[n_0(f_0.f_1...f_{n+1}) - 1].$$

Khi chúng ta đặt

$$P = \frac{W(f_1, f_2, ..., f_{n+1})}{f_1.f_2...f_{n+1}}$$

$$Q = \frac{f_0.f_1...f_{n+1}}{W(f_0, f_1, ..., f_n)}.$$

Vì hệ $f_0, f_1, ..., f_n$ độc lập tuyến tính mà $f_0 + f_1 + ... + f_{n+1} = 0$, biến đổi ta có hệ $f_1, ..., f_{n+1}$ cũng độc lập tuyến tính.

Khi đó, nếu ta thay $f_0 = -(f_1 + ... + f_{n+1})$ trong $W(f_0, f_1, ..., f_n)$ thì ta được $W(f_0, f_1, ..., f_n) = W(f_1, f_2, ..., f_{n+1})$. Từ đó ta có

$$P.Q = f_0.$$

Lập luận tương tự ta cũng có

$$deg(f_0) \leq (2n-1)[n_0(f_0.f_1...f_{n+1}) - 1].$$

Tương tự cho các đa thức $f_1, ..., f_n$, ta được

$$\underset{0\leq j\leq n+1}{Max} \deg(f_j) \leq (2n-1)[n_0(f_0.f_1...f_{n+1}) - 1].$$

Chúng ta vẫn có kết quả tương tự cho hàm nhiều biến.

4.2 Định lý Mason mở rộng cho các hàm nhiều biến.

4.2.1 Định lý: Cho $n+2$ đa thức $f_0, f_1, ..., f_{n+1}$ nhiều biến trên vành $F[x_1, x_2, ..., x_l]$ của trường F có đặc số 0, không có nghiệm chung, không đồng thời là các đa thức hằng. Giả sử rằng $gcd(f_i, f_j, f_k) = 1$ với các số khác nhau $i, j, k \in \{0, 1, ..., n+1\}$, $f_0 + f_1 + ... + f_{n+1} = 0$ và hệ $f_0, f_1, ..., f_n$ độc lập tuyến tính. Khi đó

$$\underset{0\leq j\leq n+1}{Max} \deg(f_j) \leq (2n-1)[n_0(f_0.f_1...f_{n+1}) - 1]\ .$$

4.2.2 Chứng minh định lý: (Xem [6]).

Chúng ta có kết quả tương tự cho định lý Davenport .

4.3 Định lý Davenport mở rộng cho nhiều hàm số.

4.3.1 Định lý Davenport mở rộng cho nhiều hàm số một biến.

Cho F là một trường đóng đại số có đặc số 0. Xét các đa thức một biến $f_1, f_2, ..., f_k (k \geq 3)$ với hệ số trên F không có nghiệm chung, không đồng thời là các đa thức hằng. Cho các số nguyên dương $l_j (1 \leq j \leq k)$ sao cho $l_1 \leq l_2 \leq ... \leq l_k$ và $\sum_{j=1}^{k} l_j \leq kl_1 + k(k-1)$. Giả sử rằng hệ

$f_1^{l_1}, f_2^{l_2}, ..., f_k^{l_k}$ độc lập tuyến tính trên trường F. Khi đó ta có

$$\left\{1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{k-1}{l_j}\right\} \max_{1 \le j \le k} \deg(f_j^{l_j}) \le \deg(\sum_{j=1}^{k} f_j^{l_j}) - (k-1). \tag{4.6}$$

Chứng minh(xem[4])

Khi $k = 2, l_1 = 2, l_2 = 3, f_1 = f, f_2 = -g$, theo công thức 4.6 ta được định lý Davenport:

$$\left\{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})\right\} \deg g^3 \le \deg(f^2 - g^3) - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \deg \le \deg(f^2 - g^3) - 1.$$

4.3.2 Định lý Davenport mở rộng cho các hàm số nhiều biến. Cho F là một trường đóng đại số có đặc số 0. Xét các đa thức nhiều biến $f_1, f_2, ..., f_k (k \ge 3)$ trên vành $F[x_1, x_2, ..., x_l]$ không có nghiệm chung, không đồng thời là các đa thức hằng. Cho các số nguyên dương $l_j (1 \le j \le k)$ sao cho $l_1 \le l_2 \le ... \le l_k$ và $\sum_{j=1}^{k} l_j \le kl_1 + k(k-1)$. Giả sử rằng hệ $f_1^{l_1}, f_2^{l_2}, ..., f_k^{l_k}$ độc lập tuyến tính trên trường F. Khi đó ta có

$$\left\{1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{k-1}{l_j}\right\} \max_{1 \le j \le k} \deg(f_j^{l_j}) \le \deg(\sum_{j=1}^{k} f_j^{l_j}) - (k-1).$$

Chứng minh(xem [5]).

4.4 Áp dụng định lý mở rộng cho định lý Mason vào nghiên cứu đa thức hàm nhiều biến

4.4.1 Định lý cuối cùng của Fermat cho các đa thức của hàm nhiều biến.

Phương trình

$$f_0^m + f_1^m + ... + f_n^m = f_{n+1}^m \tag{4.5}$$

vô nghiệm khi $m \ge (n+2)(2n-1)$. Trong đó, các đa thức nhiều biến $f_0, f_1, ..., f_{n+1} (n \ge 2)$ trên vành $C[x_1, x_2, ..., x_l]$ nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là các đa thức hằng. Đồng thời hệ $f_0^m, f_1^m, f_2^m, ..., f_{n+1}^m$ độc lập tuyến tính trên trường $\mathbb{C}$.

Thật vậy, áp dụng định lý Mason cho các hàm nhiều biến ta có

$$\underset{0\le j\le n+1}{Max}\, f_j^m \le (2n-1)[n_0(f_1^m.f_2^m...f_{n+1}^m)-1].$$

Do đó,

$$\deg f_j^m \le (2n-1)[n_0(f_0.f_1...f_{n+1})-1], \forall j=0,1,...,n+1.$$

Ta suy ra

$$\deg f_j \le \frac{(2n-1)}{m}[\deg(f_0)+\deg(f_1)+...+\deg(f_{n+1})-1],$$

$\forall j=0,1,...,n+1.$

Lấy tổng vế theo vế $n+2$ các bất đẳng thức ta trên được

$$\sum_{j=0}^{n+1}\deg f_j \le \frac{(2n-1)(n+2)}{m}[\sum_{j=0}^{n+1}\deg f_j - 1].$$

Chuyển vế ta được

$$\left(1-\frac{(2n-1)(n+2)}{m}\right)\sum_{j=0}^{n+1}\deg f_j \le -\frac{(2n-1)(n+2)}{m} < 0.$$

Từ đó, ta suy ra $\left(1-\frac{(2n-1)(n+2)}{m}\right) < 0$ hay $m < (2n-1)(n+2)$.

Vậy phương trình 4.7 chỉ có nghiệm khi $m < (2n-1)(n+2)$.

Trường hợp $l=1, n=1$ ta được định lý cuối cùng Fermat cho đa thức của ba hàm số một biến vô nghiệm khi $n \ge 3$ [xem bài toán 2.2.1.1, trang 20].

Tương tự, chúng ta có định lý sau cho các số mũ khác nhau.

4.4.2 Định lý Fermat tổng quát cho các đa thức của hàm nhiều biến.

Phương trình

$$f_0^{m_0}+f_1^{m_1}+...+f_n^{m_n}=f_{n+1}^{m_{n+1}} \tag{4.8}$$

vô nghiệm khi $m_j \ge (n+2)(2n-1), \forall j=0,1,...,n+1$. Trong đó, các đa thức nhiều biến $f_0, f_1, ..., f_{n+1} (n \ge 2)$ trên vành $C[x_1, x_2, ..., x_l]$

nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là các đa thức hằng. Đồng thời hệ $f_0^m, f_1^m, f_2^m, ..., f_{n+1}^m$ độc lập tuyến tính trên trường $\mathbb{C}$.

Thật vậy, giả sử phương trình (4.8) có nghiệm không tầm thường, áp dụng định lý Mason cho các hàm nhiều biến ta có

$$\underset{0\leq j\leq n+1}{Max} f_j^m \leq (2n-1)[n_0(f_0^m.f_1^m...f_{n+1}^m)-1]$$

Do đó,

$$\deg f_j^{m_j} \leq (2n-1)[n_0(f_0.f_1...f_{n+1})-1], \forall j=0,1,...,n+1.$$

Ta suy ra

$$m_j deg f_j \leq (2n-1)[\deg(f_0)+\deg(f_1)+...+\deg(f_{n+1})-1],$$

$\forall j = 0, 1, ..., n+1.$

Lấy tổng vế theo vế $n+2$ các bất đẳng thức trên ta được

$$\sum_{j=0}^{n}[m_j-(2n-1)(n+2)]\deg(f_j) \leq -(2n-1)(n+2) < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $m_j \geq (n+2)(2n-1), \forall j = 0, ..., n+1$. Vậy phương trình 4.8 vô nghiệm.

Trường hợp $l = 1, n = 1$ ta được định lý Fermat tổng quát cho đa thức của ba hàm số một biến vô nghiệm khi $m_i \geq 3, \forall j = 0, 1, 2$ [bài toán 2.2, trang 25] .

Chúng ta có kết quả tương tự cho phương trình Fermat-Catalan cho các hàm nhiều biến.

4.4.3 Phương trình Fermat-Catalan cho các hàm nhiều biến

Cho các số nguyên dương $m_j (0 \leq j \leq n+1)$. Nếu

$$\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m_1}+...+\frac{1}{m_{n+1}} \leq \frac{1}{2n-1}$$

thì phương trình

$$f_0^{m_0}+f_1^{m_1}+...+f_n^{m_n} = f_{n+1}^{m_{n+1}}. \tag{4.9}$$

vô nghiệm. Trong đó, các đa thức nhiều biến $f_0, f_1, ..., f_{n+1} (n \geq 2)$ trên vành $C[x_1, x_2, ..., x_l]$ nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là các đa thức hằng và giả sử rằng hệ $f_0^{m_0}, f_1^{m_1}, f_2^{m_2}, ..., f_{n+1}^{m_{n+1}}$ độc lập tuyến tính trên trường $\mathbb{C}$.

Thật vậy, giả sử phương trình (4.9) có nghiệm không tầm thường, áp dụng định lý Mason cho các hàm nhiều biến ta có

$$\underset{0 \leq j \leq n+1}{Max} f_j^{m_j} \leq (2n-1)[n_0(f_0^{m_0}.f_1^{m_1}...f_{n+1}^{m_{n+1}}) - 1].$$

Do đó,

$$\deg f_j^{m_j} \leq (2n-1)[n_0(f_0.f_1...f_{n+1}) - 1], \forall j = 0, 1, ..., n+1.$$

Ta suy ra

$$m_j deg f_j \leq (2n-1)[\deg(f_0) + \deg(f_1) + ... + \deg(f_{n+1}) - 1],$$

$\forall j = 0, 1, ..., n+1$.

Tức là

$$\deg(f_j) \leq \frac{1}{m_j}(2n-1)[\deg(f_0) + \deg(f_1) + ... + \deg(f_{n+1})] - \frac{2n-1}{m_j}.$$

Lấy tổng vế theo vế $n+2$ các bất đẳng thức trên ta được

$$\sum_{j=0}^{n+1} \deg(f_j) \leq \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{m_j}(2n-1)[\deg(f_0) + \deg(f_1) + ... + \deg(f_{n+1})]$$

$$-(2n-1) \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{m_j}.$$

Do đó

$$\sum_{j=0}^{n+1} \deg(f_j) \left(1 - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{m_j}(2n-1)\right) \leq -(2n-1) \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{m_j} < 0.$$

Ta suy ra

$$1 - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{m_j}(2n-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{m_j}(2n-1) > 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{m_j} > \frac{1}{2n-1}.$$

Như vậy phương trình (4.9) có nghiệm khi $\sum\limits_{j=0}^{n+1} \frac{1}{m_j} > \frac{1}{2n-1}$. Do đó khi $\sum\limits_{j=0}^{n+1} \frac{1}{m_j} \leq \frac{1}{2n-1}$ thì phương trình (4.9) vô nghiệm.

Trường hợp $l = 1, n = 1$ ta được phương trình Fermat -Catalan cho đa thức của ba hàm số một biến

$$f_0^{m_0} + f_1^{m_1} + f_2^{m_2} = 0$$

vô nghiệm khi $\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \leq 1$ [bài tập 2.3, trang 25].

Kết luận

Luận văn trình bày về Định lý Mason và ứng dụng trong nghiên cứu đa thức. Trình bày sự tương tự giữa số nguyên và đa thức, một số kết quả gần đây theo hướng mở rộng của định lý Mason. Các kết quả này được viết ở dạng các bài báo của nhiều tác giả. Do đó, trong quá trình thực hiện luận văn này, chúng tôi chủ yếu thực hiện việc đọc hiểu và trình bày lại các kết quả đã có một cách chi tiết và hệ thống. Đồng thời bổ sung thêm một số bài tập cho phong phú hơn.

Luận văn đã đạt được các kết quả sau

- Trình bày hệ thống và chứng minh chi tiết định lý Mason và các hệ quả của nó: định lý Fermat cho đa thức, định lý Davenport. Sưu tầm và sáng tạo được một số bài tập về tồn tại đa thức, các bài toán về nghiệm trong $\mathbb{C}[t]$, trong đó vận dụng các kết quả đã được nghiên cứu để giải các bài toán trên. Đặc biệt là kết luận được sự tồn tại nghiệm của phương trình Diophatine cho đa thức ở dạng tổng quát.

- Trình bày hệ thống và chứng minh chi tiết các tương tự số học của định lý Mason và các hệ quả của nó. Giải chi tiết các bài tập tương tự số học đã được trình bày ở đa thức.

-Trình bày hệ thống và chứng minh chi tiết về việc mở rộng của định lý Mason và các hệ quả của nó. Giải chi tiết cho kết quả tổng quát của các bài tập đã được trình bày dựa vào định lý Mason cho hàm một biến.

Tài liệu tham khảo

[1] Hà Huy Khoái - Phạm Huy Điển, *Số học thuật toán- Cơ sở lý thuyết và tính toán thực hành*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2003.

[2] Nguyễn Văn Mậu , *Một số vấn đề số học chọn lọc*, NXB Giáo Dục, tháng 10, 2008.

[3] Nguyễn Thành Quang, Phan Đức Tuấn, *A note on Browkin and Brzezinski's Conjecture*, Intern. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 2, 2007, n. 27, 1335-1340.

[4] Nguyễn Thành Quang, Phan Đức Tuấn, *An extension of Davenport's Theorem* , Sci. Magan, No. 3, 2007, 9-13.

[5] Nguyễn Thành Quang, Phan Đức Tuấn, *An extension of Davenport's Theorem for functions of several variables*, International Journal of Algebra, Vol. 2, no. 10, 469-475.

[6] Nguyễn Thị Phương Vinh, *Một tương tự của định lý abc cho các hàm nhiều biến*, Tạp chí khoa học Đại học Huế, số 50-2009.

[7] Andrew Granville and Thomas J. Tucker, *It's As Easy As abc*, Vol. 49 Number 10, Notices of the AMS, November 2002.

[8] Alin Bostan and Philippe Dumas, *Bodu09 Wronskians and Linear indenpendence*, Algorithms Project, Inria Rocquencourt, France.

[9] Frits Beukers, *The genneralzed Fermat equation*, January 20, 2006.

[10] Henri Cohen, *Number Theory* , Vol. 2, Analytic and modern tool, Springer, 2007.

[11] Mason, *Equations over function fields* , Oxford University Press, 1990.

[12] M. Bayat and H. Teimoori, *A new bound for an extension of Mason's Theorem*, Arch. Math. 82(2004), 230-239.

[13] Michiel de Bondt, *Another generalization of Mason's ABC- theorem*, arxiv 0707.0434v2 [math. CM] 23 June 2009.

[14] P.Ribenboim, *13 Lectures on Fermat's last theorem*, Spring-Verlag, New York and Heidelberg, 1979.

[15] R. Daniel Mauldin, *A generalization of Fermat's last theorem*, Vol. 44 Number 11, Notices of the AMS, December 1997.

[16] Jeffiey Paul Wheeler, *The abc Conjecture*, The university of Tennessee, Knoxville, August 2002.