

1. MỤC LỤC

- Đối tượng nghiên cứu.....	1
- Mục đích nghiên cứu	1
- Đối tượng nghiên cứu.....	1
-Phương pháp nghiên cứu.....	1

2. NỘI DUNG 2

2.1. Cơ sở lí luận.....	2
2.1.1. Vài nét về sự hình thành vec tơ và tọa độ.....	2
2.1.2. Căn cứ vào bản chất hình học.....	2
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm	3
2.3. Thực hành giải một số dạng bài toán hình học không gian	3
thông qua 3 phương pháp giải khác nhau.	
2.3.1. Các bài toán về tính thẳng hàng.....	3
2.3.2. Các bài toán về quan hệ song song.....	6
2.3.3.Các bài toán về quan hệ vuông góc.....	10
2.3.4. Các bài toán về tính khoảng cách.....	13
2.3.5. Các bài toán về tính góc.....	16
2.4. Thực nghiệm sư phạm.....	18

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ 20

Tài liệu tham khảo

Phụ lục

1. MỞ ĐẦU

- LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Việc tổ chức dạy học các kiến thức hình học bằng các phương pháp khác nhau nhằm tạo ra cho học sinh tính linh hoạt, đa dạng khi tiếp cận một bài toán hình học.

Thực trạng hiện nay, tại trường THPT việc học hình học với một bộ phận học sinh là điều miễn cưỡng, môn hình chỉ đưa lại say mê với số ít học sinh khá và giỏi thì việc tạo ra cho các em hứng thú trong học hình bằng các cách tiếp cận đối với một bài toán bằng các phương pháp khác nhau là một việc nên làm. Điều đó sẽ góp phần làm cho các em nắm vững kiến thức hình học, hiểu được bản chất các đối tượng hình học trong chương trình phổ thông.

Hình học không gian chiếm một vị trí quan trọng trong chương trình toán cấp THPT, do vậy việc tìm kiếm các con đường tổ chức dạy học cho phần hình học không gian luôn được nhiều người quan tâm. Đặc biệt, hiện nay với những tiện ích do việc sử dụng phương tiện dạy học hiện đại đưa lại, giáo viên có thể trình chiếu và nhanh chóng phân tích, so sánh những phương pháp giải khác nhau cho một bài toán cụ thể trong một đơn vị thời gian nhất định, cách làm này đã tạo được ấn tượng rất tốt và thực sự có hiệu quả đối với học sinh.

Vì vậy tôi chọn đề tài:

“ Một số phương pháp giải toán hình học không gian ở trường THPT ”

- MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Mục đích nghiên cứu của đề tài là xây dựng hệ thống các dạng bài tập hình học không gian giải bằng các phương pháp khác nhau từ đó giúp cho học sinh tiếp cận hình học và giải toán hình học một cách dễ hơn.

- ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

Xây dựng cơ sở lý luận và thực tiễn của việc rèn luyện năng lực chuyển đổi của ba phương pháp.

Xây dựng hệ thống các dạng bài tập hình học không gian giải bằng các phương pháp khác nhau.

- PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu các tài liệu về phương pháp giảng dạy toán, sách giáo khoa, sách giáo viên về chương trình hình học ở cấp THPT; Điều tra tìm hiểu, khảo sát thực tế và thu thập thông tin.

Tìm hiểu về việc dạy và học hình học ở trường THPT Hàm Rồng theo các chủ đề: hình học tổng hợp, vectơ và tọa độ.

Đối chiếu kết quả kiểm tra ở 2 lớp thuộc khối 12 trường THPT Hàm Rồng

2. NỘI DUNG

2.1. CƠ SỞ LÝ LUẬN

2.1.1 Vài nét về sự hình thành kiến thức vec tơ và toạ độ.

Phương pháp toạ độ đã có nguồn gốc trong lịch sử cổ đại. Các nhà thiên văn học Hy Lạp (Hippocrates thế kỷ II-TCN, Ptolemaeus thế kỷ II) đã dùng các toạ độ cầu (vĩ độ và kinh độ) để xác định các điểm khác nhau trên trái đất, tuy nhiên sự phát triển của phương pháp toán học này đã bị kìm hãm do chưa có ký hiệu bằng chữ và quan niệm tổng quát về số.

Việc không có những phương pháp toán học tổng quát để giải các bài toán và chứng minh một số định lý hình học là một hạn chế rất lớn của hình học sơ cấp. Trong vật lý, cơ học, kỹ thuật ... người ta thấy hạn chế này một cách sâu sắc khi gặp những đường, những mặt phức tạp như đường Parabol, đường hypecbol, đường elip..., mặt Paraboloid, mặt Hypecboloid,... Cho đến thế kỷ XVII, nhà toán học Đêcac (R. Descartes) (1596-1650) đã sáng lập ra môn hình học giải tích một cách độc lập với Phêma (P. Fermat) (1601-1665). Hai ông đã cống hiến cho khoa học một phương pháp mới – phương pháp toạ độ làm cơ sở cho hình học giải tích, môn học đã dùng hệ toạ độ để chuyển những hình ảnh của hình học về ngôn ngữ của đại số.

Có thể nói, sự ra đời của khái niệm toạ độ và sau đó là khái niệm vec tơ đã góp phần thúc đẩy sự phát triển của lý thuyết toán học và sự ứng dụng của toán học vào thực tế đời sống.

2.1.2 Căn cứ vào bản chất toán học của kiến thức hình học.

Một nội dung, một khái niệm toán học có thể diễn đạt theo ngôn ngữ, ký hiệu khác nhau. Chẳng hạn:

+ Khái niệm: “***M là trung điểm của đoạn thẳng AB***”

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in AB \\ MA = MB \end{cases} \quad (\text{theo ngôn ngữ tổng hợp})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \quad (\text{theo ngôn ngữ vec tơ})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \quad (\text{theo ngôn ngữ toạ độ})$$

+ Khái niệm: “***đường thẳng AB***”

$$\Leftrightarrow \left\{ \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{theo ngôn ngữ vec tơ})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ M(x; y; z) / \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \right\} \quad (\text{theo ngôn ngữ tọa độ})$$

Như vậy, một khái niệm toán học có thể có những vỏ ngôn ngữ khác nhau và ta có thể dựa vào mỗi cách diễn đạt theo các ngôn ngữ khác nhau ấy mà định hướng để tìm ra các phương pháp khác nhau để giải quyết bài toán hình học. Chẳng hạn, dựa vào cách diễn đạt khái niệm: "Hai mặt phẳng vuông góc với nhau trong không gian" ta sẽ định hướng cách chứng minh hai mặt phẳng vuông góc:

1/ *Theo ngôn ngữ tổng hợp*: Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau, ta chứng minh góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 90° .

2/ *Theo ngôn ngữ vec tơ*: Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau, ta chứng minh tích vô hướng (qua phép biến đổi) của hai vec tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng bằng 0.

3/ *Theo ngôn ngữ tọa độ*: Để chứng minh hai mặt phẳng $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ vuông góc với nhau, ta chứng minh biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vec tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng bằng 0.

$$A_1.A_2 + B_1.B_2 + C_1.C_2 = 0$$

2.2 THỰC TRẠNG VẤN ĐỀ TRƯỚC KHI ÁP DỤNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm tôi nhận thấy việc học sinh THPT (cụ thể học sinh các lớp 12) khi giải một bài toán hình học không gian thường rất lúng túng, làm bài rất chậm, các đối tượng học sinh trung bình trở xuống thường không làm được các bài hình.

2.3. THỰC HÀNH GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN THÔNG QUA VIỆC KHAI THÁC CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC NHAU.

2.3.1. CÁC BÀI TOÁN VỀ TÍNH THẲNG HÀNG

Dạng toán 1: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

* *Phương pháp tổng hợp*: Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta có thể sử dụng một trong các hướng sau:

- + Chứng minh A, B, C cùng thuộc hai mặt phẳng khác nhau nào đó
- + Chứng minh AB và AC cùng song song với một đường thẳng nào đó...

* *Phương pháp vec tơ*

- + Chứng minh $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{AB} \quad (t \in \mathbb{R})$
- + Chứng minh với điểm O tùy ý có: $\overrightarrow{OC} = t \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - t) \cdot \overrightarrow{OA} \quad (t \neq 1)$
- + Chứng minh với điểm O tùy ý có: $\overrightarrow{OC} = t \cdot \overrightarrow{OB} + l \cdot \overrightarrow{OA} \quad (t + l = 1)$

* **Phương pháp tọa độ** Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$

+ Biểu thị tọa độ A, B, C theo hệ tọa độ đã chọn: $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$

+ Tính tọa độ của $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$

+ Chỉ ra sự tồn tại $t \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{AB}$
Hoặc thay tọa độ của điểm C vào phương trình đường thẳng AB thấy thỏa mãn

Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi G là trọng tâm tam giác A_1BD . Chứng minh rằng A, G, C_1 thẳng hàng.

Lời giải

* **Phương pháp tổng hợp:** Chứng minh A, G, C_1 cùng thuộc hai mặt phẳng khác nhau.

Ta có: $G \in A_1O \subset (ACC_1A_1)$ nên

$G \in (ACC_1A_1)$.

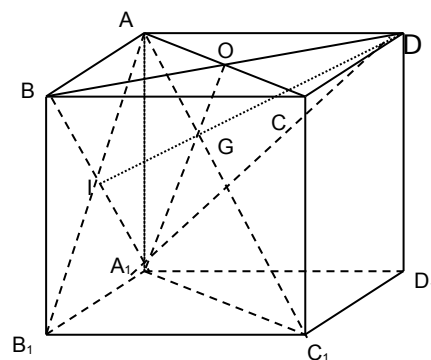
Vậy $A, G, C_1 \in (ACC_1A_1)$.

Mặt khác $G \in DI \subset (ADC_1B_1)$ nên

$G \in (ADC_1B_1)$.

Vậy $A, G, C_1 \in (ADC_1B_1)$.

Từ trên suy ra ba điểm A, G, C_1 thẳng hàng



Phương pháp vec tơ. Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ vec tơ gốc, biểu diễn các dữ kiện của bài toán sang ngôn ngữ vec tơ:

- Chọn hệ vec tơ gốc $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1D_1}$. Theo bài ra, G là trọng tâm tam giác

A_1BD nên $\overrightarrow{A_1G} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{A_1O}$.

- Để chứng minh rằng A, G, C_1 thẳng hàng, ta chứng minh $\overrightarrow{A_1G} = t \cdot \overrightarrow{AC_1}$

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức vec tơ phù hợp với yêu cầu bài toán.

Ta có: $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} = -\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1G} = \overrightarrow{A_1A} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{A_1O}$

$$= -\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1D}) = \frac{1}{3} \cdot (-\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC_1}$$

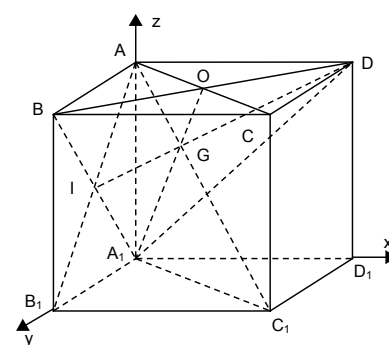
+ **Bước 3:** Chuyển kết luận ra ngôn ngữ hình học tổng hợp

Như vậy, ta có: $\overrightarrow{A_1G} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{A_1O}$ hay A, G, C_1 thẳng hàng.

* **Phương pháp tọa độ:** Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ tọa độ, chuyển các dữ kiện bài toán sang ngôn ngữ tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O \equiv A_1$,



$D_1 \in Ox, B_1 \in Oy, A \in Oz$. Khi đó ta có:

$A_1(0;0;0), D_1(a;0;0), B_1(0;b;0), A(0;0;c),$

$B(0;b;c), D(a;0;c), C_1(a;b;0)$. Vì G là trọng

tâm tam giác nên: $G = \left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3} \right)$.

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức tọa độ.

Ta có: $\overrightarrow{AC_1} = (a; b; -c), \overrightarrow{AG} = \left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; -\frac{c}{3} \right) = \frac{1}{3}(a; b; -c) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$

+ **Bước 3:** Chuyển kết luận ra ngôn ngữ hình học tổng hợp

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$ hay A, G, C_1 thẳng hàng.

Dạng toán 2: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, từ đó suy ra các tính chất khác.

Ví dụ 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. P là điểm trên đường thẳng

CC_1 sao cho $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CC_1}$, M là một điểm trên đường thẳng AD , N là điểm trên

đường thẳng BD_1 sao cho M, N, P thẳng hàng. Tính $\frac{MD}{MA}$.

Lời giải:

- **Phương pháp tổng hợp:** Ta có: $(ADD_1A_1) \cap (MP; BD_1) = MD_1$
 $(BCC_1B_1) \cap (MP; BD_1) = BP$. Vì $(ADD_1A_1) \parallel (BCC_1B_1)$ nên $MD_1 \parallel BP$,

do đó $MD_1 \parallel BP$ suy ra $\triangle MD_1D \sim \triangle BPC$, vậy nên $\frac{MD}{DC} = \frac{DD_1}{CP} = \frac{2}{3}$ hay $\frac{MD}{AD} = \frac{2}{3}$

từ đó $\frac{MD}{MA} = 2$.

* **Phương pháp vec tơ.** Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ vec tơ gốc, biểu diễn các dữ kiện của bài toán sang ngôn ngữ vec tơ:

Chọn hệ vec tơ gốc: $\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \overrightarrow{CC_1} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}$

Theo giả thiết, ta có: $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CC_1} = \frac{3}{2}\vec{b}$. Vì

D, M, A thẳng hàng nên: $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DA} = x\vec{a}$.

Vì M, N, P thẳng hàng nên:

$$\overrightarrow{CN} = \alpha\overrightarrow{CM} + (1 - \alpha)\overrightarrow{CP}.$$

Vì B, N, D_1 thẳng hàng nên:

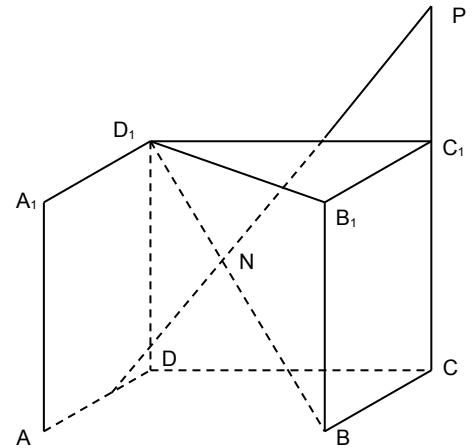
$$\overrightarrow{CN} = \beta\overrightarrow{CD_1} + (1 - \beta)\overrightarrow{CB}$$

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức vec tơ phù hợp với yêu cầu bài toán.

Ta có: $\overrightarrow{CN} = \alpha(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}) + (1 - \alpha)\overrightarrow{CP} = \alpha(\vec{c} + x\vec{a}) + (1 - \alpha)\frac{3}{2}\vec{b}$ (1)

$$= \alpha x\vec{a} + (1 - \alpha)\frac{3}{2}\vec{b} + \alpha\vec{c}.$$

Lại có $\overrightarrow{CN} = \beta(\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CD}) + (1 - \beta)\overrightarrow{CB} = \beta(\vec{b} + \vec{c}) + (1 - \beta)\vec{a} = (1 - \beta)\vec{a} + \beta\vec{b} + \beta\vec{c}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} \alpha \cdot x = 1 - \beta \\ \frac{3}{2} - \alpha - \alpha = \beta \\ \alpha = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{3}{5}; x = \frac{2}{3}. \text{Vây}$
 $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DA} \Rightarrow \frac{MD}{MA} = 2.$

• **Phương pháp tọa độ:** Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ tọa độ, chuyển các dữ kiện bài toán sang ngôn ngữ tọa độ
 Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $C \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, C_1 \in Oz$.

Khi đó: $C(0;0;0), B(a;0;0), D(0;b;0), C_1(0;0;c), D_1(0;b;c), D \left(0;0;\frac{3c}{2} \right).$

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức tọa độ.

Mặt phẳng (BD_1P) (chứa N) đi qua $B(a;0;0)$

có vec tơ chỉ phương là

$\overrightarrow{BP} = (-a; 0; \frac{3c}{2})$ và $\overrightarrow{BD_1} = (-a; b; c)$

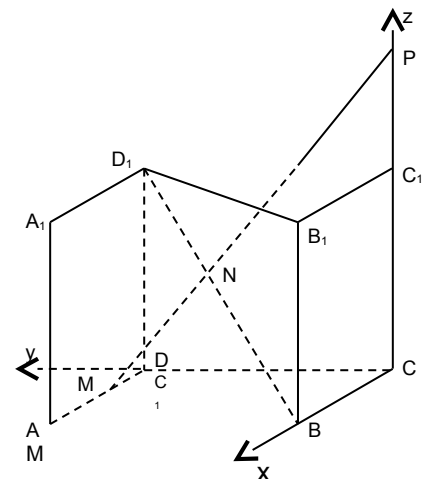
nên có phương trình: $3bcx + acy + 2abz - 3abc = 0$

(3)

Đường thẳng AD có phương trình:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (4)$

do đó M có tọa độ là nghiệm của hệ (3)



và (4) nên $M = \left(\frac{2a}{3}; b; 0 \right)$, từ đó có $\overrightarrow{DM} = \left(\frac{2a}{3}; 0; 0 \right), \overrightarrow{MA} = \left(\frac{a}{3}; 0; 0 \right) \Rightarrow \overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{MA}.$

+ **Bước 3:** Chuyển kết luận ra ngôn ngữ hình học tổng hợp $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{MA} \Rightarrow \frac{MD}{MA} = 2.$

2.3.2 CÁC BÀI TOÁN VỀ QUAN HỆ SONG SONG.

Dạng toán 1: Chứng minh đường thẳng song song với đường thẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng, hai mặt phẳng song song.

• **Phương pháp tổng hợp:**

+ Để chứng minh hai đường thẳng a và b song song với nhau, ta chứng minh chúng đồng phẳng rồi áp dụng các cách chứng minh trong hình học phẳng như: tính chất đường trung bình, định lý Talet đảo... hoặc chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng thứ ba,...

+ Để chứng minh $a \parallel (P)$ ta chứng minh $a \parallel b$ với $b \subset (P)$

+ Để chứng minh hai mặt phẳng song song với nhau, ta chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia,...

• **Phương pháp vec tơ, phương pháp tọa độ**

Khi giải bài toán dạng này, ta có thể tiến hành: Chuyển các dữ kiện của bài toán ra ngôn ngữ vec tơ hoặc tọa độ, sau đó biến đổi các đẳng thức vec tơ (hoặc tọa độ) thu được về dạng các đẳng thức vec tơ (hoặc tọa độ) tương đương với các điều kiện song song.

Ví dụ 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. M là điểm chia đoạn AD theo tỉ số $\frac{1}{4}$, N là điểm chia đoạn A_1C theo tỉ số $\frac{2}{3}$. Chứng minh: $MN \parallel (BC_1D)$.

Lời giải * *Phương pháp tổng hợp:*

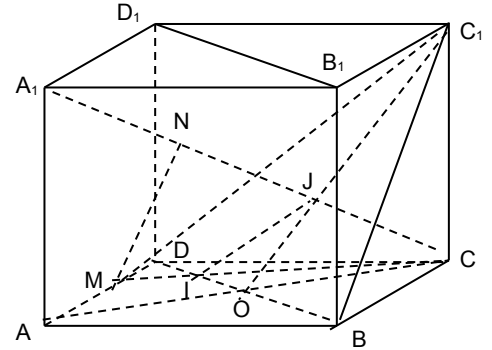
Đặt $O = AC \cap BD$, $I = MC \cap BD$,

$J = A_1C \cap C_1O$

Ta có: $\frac{JC}{JA_1} = \frac{OC}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$ suy ra

$$CJ = \frac{1}{3} \cdot CA_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot CN \quad \text{Vậy} \quad \frac{CJ}{CN} = \frac{5}{9} \quad (1).$$

Mặt khác $\frac{IC}{IM} = \frac{CB}{MD} = \frac{AD}{MD} = \frac{5}{4}$



$\frac{IC}{CM} = \frac{5}{9}$. Từ (1) và (2) có: $\frac{CJ}{CN} = \frac{CI}{CM}$ hay $MN \parallel IJ \subset (BC_1D)$, do đó $MN \parallel (BC_1D)$.

* **Phương pháp vec tơ.** Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ vec tơ gốc, biểu diễn các dữ kiện của bài toán sang ngôn ngữ vec tơ:

Chọn hệ vec tơ gốc: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. M là điểm chia đoạn AD theo tỉ số $\frac{1}{4}$, nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AD}$. N là điểm chia đoạn A_1C theo tỉ số $\frac{2}{3}$ nên $\overrightarrow{A_1N} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{A_1C}$, để chứng minh: $MN \parallel (BC_1D)$ ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{MN} = m \cdot \overrightarrow{BD} + n \cdot \overrightarrow{BC_1}$

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức vec tơ phù hợp với yêu cầu bài toán.

Ta có: $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1N} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AM}$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \frac{2}{5}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} - \frac{1}{5}\vec{c} = -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} = -\frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{c}) + \frac{3}{5}(\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC_1}$$

+ **Bước 3:** Chuyển kết luận ra ngôn ngữ hình học tổng hợp $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC_1}$

* **Phương pháp tọa độ:** Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ tọa độ, chuyển các dữ kiện bài toán sang ngôn ngữ tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $C \equiv O$,

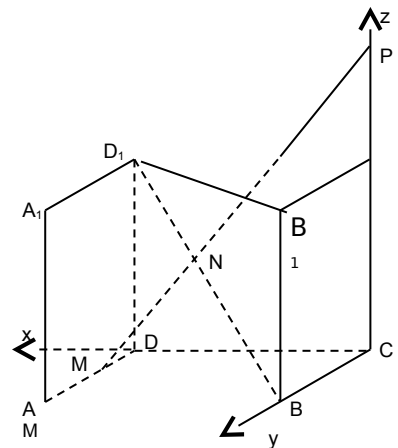
$B \in Ox$, $D \in Oy$, $C_1 \in Oz$. Giả sử ba kích thước của

hình hộp là a, b, c , khi đó:

$C(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;b;0)$, $C_1(0;0;c)$,

$A(a;b;0)$, $A_1(a;b;c)$. M là điểm chia đoạn AD theo

tỉ số $\frac{1}{4}$, nên $M = (\frac{4a}{5}, b, 0)$, $N = (\frac{3a}{5}, \frac{3b}{5}, \frac{3c}{5})$



+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức tọa độ.

Mặt phẳng (BC_1D) có phương trình là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + acy + abz + abc = 0$

Đường thẳng MN có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (-\frac{a}{5}, -\frac{2b}{5}, \frac{3c}{5})$.

+ **Bước 3:** Chuyển kết luận ra ngôn ngữ hình học tổng hợp

Vì $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ nên $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$ hay $MN \parallel (BC_1D)$

Dạng toán 2: Cho biết các quan hệ song song, từ đó suy ra các tính chất hình học khác.

Ví dụ 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. M là điểm trên đường chéo AC của mặt phẳng $(ABCD)$, N là điểm trên đường chéo thẳng C_1D của mặt phẳng (CDD_1C_1) sao cho $MN \parallel BD_1$. Tính tỉ số $\frac{MN}{BD_1}$.

*** Phương pháp tổng hợp:**

Đặt $I = BM \cap D_1N$, vì $I \in BM \subset (ABCD)$ và $I \in D_1N \subset (CDD_1C_1)$ nên $I \in CD$

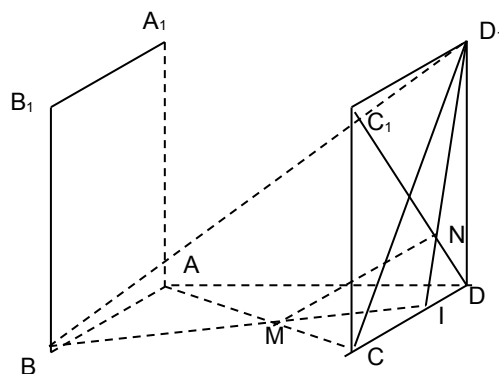
Ta có: $\frac{IN}{ND_1} = \frac{DN}{NC_1} = \frac{DI}{C_1D_1}$ (do $CD \parallel C_1D_1$),

$\frac{IM}{MB} = \frac{CM}{MA} = \frac{CI}{AB}$ (do $AB \parallel CD$) mặt khác

$\frac{IN}{ND_1} = \frac{IM}{MB}$ (do $MN \parallel BD_1$). nên suy ra:

$\frac{DI}{C_1D_1} = \frac{CI}{AB}$ do đó $DI = CI$ hay I là

trung điểm của CD .



Vậy $\frac{IM}{MB} = \frac{1}{2}$ hay $\frac{IM}{IB} = \frac{1}{3} = \frac{MN}{BD_1}$.

*** Phương pháp vec tơ.** Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ vec tơ gốc, biểu diễn các dữ kiện của bài toán sang ngôn ngữ vec tơ:

Chọn hệ vec tơ gốc: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BB_1} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}$ Theo bài ra A, M, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{MC} = x \cdot \overrightarrow{AC}$, C_1, N, D thẳng hàng nên $\overrightarrow{C_1N} = y \cdot \overrightarrow{C_1D}$, vì $MN \parallel BD_1$ nên $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{BD_1}$

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức vec tơ phù hợp với yêu cầu bài toán.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = k \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ (1) $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}, \overrightarrow{CC_1} = \vec{b}, \overrightarrow{C_1D} = \vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1N}$

(2). Vì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nên từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} \vec{a} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ \vec{b} = -\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ \vec{c} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BD_1}$

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BD_1}$

+ **Bước 3:** Chuyển kết luận ra ngôn ngữ hình học tổng hợp

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BD_1} \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{BD_1}|} = \frac{1}{3}$ hay $\frac{MN}{BD_1} = \frac{1}{3}$.

• **Phương pháp tọa độ:** Quy trình giải bài toán gồm:

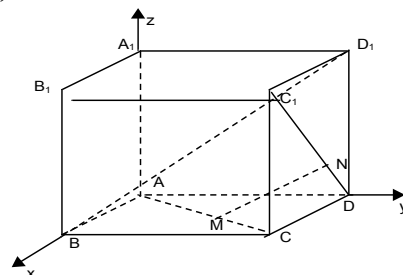
+ **Bước 1:** Chọn hệ tọa độ, chuyển các dữ kiện bài toán sang ngôn ngữ tọa độ
 Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $A \equiv O$, $B \in Ox$, $D \in Oy$, $A_1 \in Oz$. Giả sử ba kích thước của hình hộp là a, b, c , khi đó:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), D_1(0;b;c), C_1(0;0;c), C(a;b;0), A_1(a;b;c).$$

Vì nên $M(x_M; y_M; 0)$, Vì nên $N(x_N; 0; z_N)$

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức tọa độ.

„„„. Từ giả thiết suy ra: $MN \parallel BD_1$ suy ra



$$\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{BD_1} \Rightarrow \begin{cases} a - x_M = ka \\ b - y_M = kb \\ c - z_M = kc \end{cases} \quad (1), M$$

$$\in AC \Rightarrow \overrightarrow{MC} = x \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} a - x_M = xa \\ b - y_M = xb \end{cases} \quad (2),$$

$$N \in C_1D \Rightarrow \overrightarrow{C_1N} = y \cdot \overrightarrow{C_1D} \Rightarrow \begin{cases} x_N - a = ya \\ z_N - c = yc \end{cases} \quad (3). \text{ Từ (1),(2),(3) suy ra}$$

$$\begin{cases} a - x_M = ka \\ b - y_M = kb \\ c - z_M = kc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = a(1-k) \\ y_M = b(1-k) \\ z_M = c(1-k) \end{cases} \text{ như vậy } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BD_1}$$

+ **Bước 3:** Chuyển kết luận ra ngôn ngữ hình học tổng hợp.

2.3.3 CÁC BÀI TOÁN VỀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC.

Dạng toán 1: Chứng minh tính vuông góc của các đường thẳng và mặt phẳng.

• Phương pháp tổng hợp:

* Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , ta có thể chứng minh:

+ a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong (P) .

+ a song song với đường thẳng b mà $b \perp (P)$

+ Sử dụng định lý: "Nếu a thuộc mặt phẳng (P) mà (P) vuông góc với (Q) và a vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) thì $a \perp (P)$ "

+ Sử dụng định lý: "Nếu a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì a vuông góc với mặt phẳng (R) "...

* Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau, ta có thể chứng minh:

+ Mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

+ Góc giữa hai mặt phẳng có số đo bằng 90°

• Phương pháp vec tơ:

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau, ta quy về chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, ta quy về chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng. Như vậy đối với phương pháp vec tơ ta chỉ cần chú ý: $AB \perp CD$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

• Phương pháp tọa độ

+ Để chứng minh $AB \perp CD$ ta chứng minh:

$$(x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C) + (z_B - z_A)(z_D - z_C) = 0$$

+ Để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ta chứng minh vec tơ chỉ phương của đường thẳng cùng phương với vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

+ Để chứng minh hai mặt phẳng $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ vuông góc với nhau, ta chứng minh $A_1.A_2 + B_1.B_2 + C_1.C_2 = 0$

Ví dụ 5: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi P là trung điểm của AB , Q là giao điểm của BC_1 và CB_1 . Chứng minh rằng $D_1Q \perp (PB_1C)$.

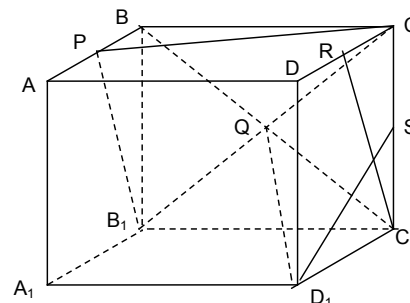
Lời giải:

* **Phương pháp tổng hợp:**

Vì $\triangle D_1B_1C$ đều và Q là trung điểm của B_1C

nên $D_1Q \perp B_1C$ (1).

Gọi R và S lần lượt là trung điểm của CD và CC_1 , khi đó: $RC_1 \parallel PB_1$, $QS \perp (CDD_1C_1)$ nên $QS \perp RC_1$. Mặt khác $D_1S \perp RC_1$ nên $RC_1 \perp (QSD_1)$. Vậy $RC_1 \perp D_1Q$ nên .



$D_1Q \perp PB_1$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $D_1Q \perp (PB_1C)$.

• **Phương pháp vec tơ.** Quy trình giải bài toán gồm:

+ Bước 1: Chọn hệ vec tơ gốc, biểu diễn các dữ kiện của bài toán sang ngôn

ngữ vec tơ: Chọn hệ vec tơ gốc $\overrightarrow{D_1Q} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{D_1B_1} + \overrightarrow{D_1C})$

+ Bước 2: Biến đổi các biểu thức vec tơ phù hợp với yêu cầu bài toán.

Ta có $\overrightarrow{B_1P} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{B_1B}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1} + 2\overrightarrow{B_1B}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{D_1Q} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{D_1B_1} + \overrightarrow{D_1C}) = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}) = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{B_1P} \cdot \overrightarrow{D_1Q} = (\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}) = 0$

$\overrightarrow{B_1C} \cdot \overrightarrow{D_1Q} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}) = 0$

+ Bước 3: Chuyển kết luận ra ngôn ngữ hình học tổng hợp

$\overrightarrow{B_1P} \cdot \overrightarrow{D_1Q} = 0 \Rightarrow D_1Q \perp PB_1$

$\overrightarrow{B_1C} \cdot \overrightarrow{D_1Q} = 0 \Rightarrow D_1Q \perp B_1C$. Vậy $D_1Q \perp B_1C$

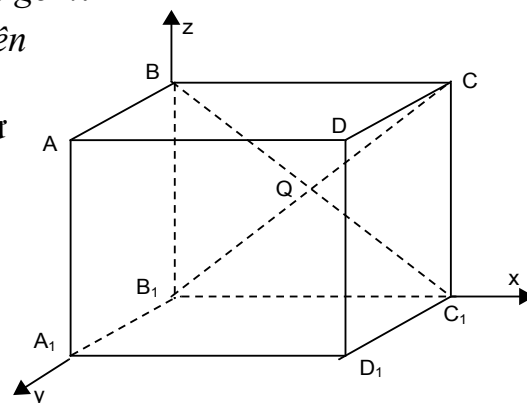
* **Phương pháp tọa độ:** Quy trình giải bài toán gồm:

+ Bước 1: Chọn hệ tọa độ, chuyển các dữ kiện bài toán sang ngôn ngữ tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: B_1 . Giả sử kích thước của hình lập phương là a , khi đó:

$B_1(0;0;0)$, $C_1(a;0;0)$, P là trung điểm của AB nên , $B(0;0;a)$, $C(a;0;a)$, $D_1(a;a;0)$,

A .



Q là trung điểm của B_1C nên $Q = (\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2})$

+ Bước 2: Biến đổi các biểu thức tọa độ.

Ta có: $\overrightarrow{QD_1}(\frac{a}{2}; a; \frac{a}{2})$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng QD_1 . Mặt phẳng (PB_1C) qua B_1 nhận hai vec tơ chỉ phương là $\overrightarrow{B_1P}$ và $\overrightarrow{B_1C}$ nên có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2})$ cùng phương với $\overrightarrow{QD_1}(\frac{a}{2}; a; \frac{a}{2})$ nên $D_1Q \perp (PB_1C)$.

Dạng toán 2: Cho biết các đường thẳng hay mặt phẳng vuông góc rồi từ đó suy ra các tính chất hình học khác.

Ví dụ 5 Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là nửa lục giác đều. $AB = BC = CD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là điểm trên cạnh SB sao cho M khác B và $AM \perp MD$.

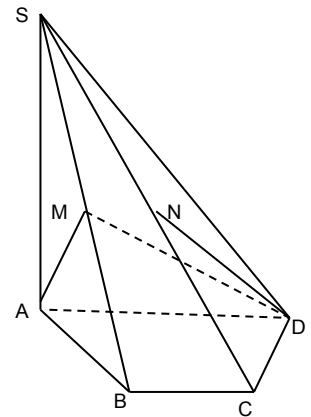
1) Tính tỉ số $\frac{SM}{SB}$

2) Tính diện tích thiết diện tạo bởi hình chóp và mặt phẳng (AMD)

Lời giải: * Phương pháp tổng hợp:

1) Ta có: $\begin{cases} BD \perp AB \\ BD \perp SA \end{cases}$ suy ra $BD \perp (SAB)$ và $BD \perp AM$. Mặt khác $AM \perp MD$ nên $AM \perp (BMD)$, do đó: $AM \perp SB$. khi đó: $SA^2 - SM^2 = AB^2 - BM^2$, hơn nữa $SM + BM = SB$. Suy ra:

$$\begin{cases} SM^2 - BM^2 = 2a^2 \\ SM + BM = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SM = \frac{3a}{2} \\ BM = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{3}{4}$$



2/ Thiết diện là hình thang $AMND$ có diện tích S được tính theo công thức:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (MN + AD) \cdot MH$$

MN là đường cao của hình thang và $AD = 2a$, $MN = \frac{3}{4} \cdot BC = \frac{3}{4}a$

Tính MH : Vì $AM \perp MD$ nên: $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{MD^2}$

với $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MD^2 = SM^2 + SD^2 - 2 \cdot SM \cdot SD \cdot \cos \angle DSM = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{39}}{8}$.

Vậy $S = \frac{11\sqrt{39}a^2}{64}$.

*** Phương pháp vec tơ. Quy trình giải bài toán gồm:**

+ **Bước 1:** Chọn hệ vec tơ gốc, biểu diễn các dữ kiện của bài toán sang ngôn ngữ vec tơ:

Chọn hệ vec tơ gốc: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$; $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = 2a$, $|\vec{c}| = a\sqrt{3}$

Khi đó ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. $AM \perp MD \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$ (1)

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức vec tơ phù hợp với yêu cầu bài toán.

1) Ta có $\overrightarrow{SM} = \alpha \overrightarrow{SB} = \alpha(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{SA}) = \alpha(\vec{a} - \vec{c})$, $\overrightarrow{D_1Q} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{D_1B_1} + \overrightarrow{D_1C}) =$
 $\frac{1}{2}(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}) = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ (Với $0 \leq \alpha < 1$, do $M \neq B$); $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SM} =$
 $-\vec{c} - \alpha(\vec{a} - \vec{c})$ $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c} + \vec{b}$.

Khi đó

(1) $\Leftrightarrow [-\vec{c} - \alpha(\vec{a} - \vec{c})] \cdot [\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c} + \vec{b}] = 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 7\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = 1 & (\text{loại}) \\ \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{SM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$

• **Phương pháp tọa độ:** Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ tọa độ, chuyển các dữ kiện bài toán sang ngôn ngữ tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: $A \equiv O$,

$D \in Ox$, $S \in Oz$, $Oy \subset (ABCD)$: $Oy \perp Oz$.

Khi đó: $A(0;0;0)$, $D(2a;0;0)$, $S(0;0;a\sqrt{3})$, $B = (\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0)$.

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức tọa độ.

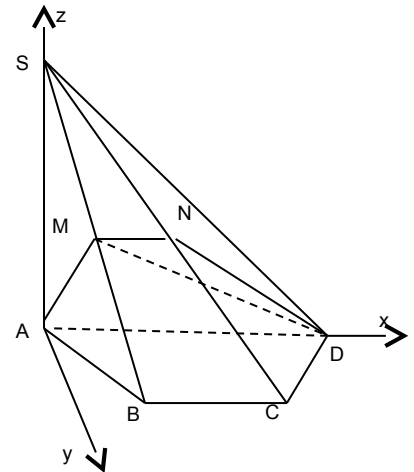
Đặt $M = (x_0; y_0; z_0) \in SB$. Đường thẳng SB có phương trình:

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{z - a\sqrt{3}}{-a\sqrt{3}}.$$

Vì $M \in SB$ nên:

$\begin{cases} y_0 = \sqrt{3}x_0 \\ z_0 = a\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x_0 \end{cases}$ Mặt khác $AM \perp MD \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$ do đó ta tìm

được: $\begin{cases} x_0 = \frac{3a}{8} \\ y_0 = \frac{3a\sqrt{3}}{8} \\ z_0 = \frac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}$



Vậy $\overrightarrow{SM} = (\frac{3a}{8}; \frac{3a\sqrt{3}}{8}; -\frac{3a\sqrt{3}}{4})$; $\overrightarrow{SB} = (\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -a\sqrt{3})$ do đó $\overrightarrow{SM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$

2.3.4 CÁC BÀI TOÁN VỀ TÍNH KHOẢNG CÁCH

Dạng toán 1: Chứng minh tính vuông góc của các đường thẳng và mặt phẳng.

• **Phương pháp tổng hợp:**

+ khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a: $d(M; a) = MH$ ($MH \perp a; H \in a$)

+ khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) được xác định như sau:

- Chọn trong (P) một đường thẳng a rồi dựng mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với a (nên chọn a để mặt phẳng (Q) dễ xác định)

- Xác định $b = (P) \cap (Q)$

- Dựng $AH \perp b$ tại H , khi đó $d(A; (P)) = AH$

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .

Ngoại trừ trường hợp đoạn vuông góc chung có sẵn, ta phải dựng đoạn vuông góc chung bằng các cách sau:

Cách 1: (áp dụng cho trường hợp $a \perp b$)

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và vuông góc với a tại A .

- Dựng $AB \perp b$ tại B , khi đó: $d(a; b) = AB$

Cách 2:

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và song song với a

- Chọn $M \in a$, dựng $MH \perp (P)$ tại H

- Từ H dựng $a' \parallel a$; $a' \cap b = B$

- Từ B dựng đường thẳng song song với MH cắt a tại A , khi đó $d(a; b) = AB$.

• **Phương pháp vec tơ:** đối với phương pháp này, ta cần chú ý áp dụng tích vô hướng của hai vec tơ để tính khoảng cách

- Khoảng cách giữa hai điểm A và B : $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

- Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a : Giải theo trình tự sau:

Chọn $A \in a$ và đặt $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$. Gọi N là hình chiếu vuông góc của điểm M trên a , khi đó: $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} = x\vec{a} - \vec{b}$. Tìm x nhờ điều kiện vuông góc của $\overrightarrow{MH}$, $\vec{a}$:

$$(x\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \text{ suy ra } MH = \sqrt{(x\vec{a} - \vec{b})^2}.$$

- Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) có cặp vec tơ chỉ phương là $\vec{a}, \vec{b}$:

Chọn $A \in a$ và đặt $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc M trên mặt phẳng (P) , khi đó: $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}$. Ta tìm được các hệ số x, y nhờ điều kiện vuông góc của $\overrightarrow{MH}$; $\vec{a}; \vec{b}$ từ đó suy ra khoảng cách cần tìm là:

$$MH = \sqrt{(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m})^2}.$$

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt có hai vec tơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$, Giải theo trình tự sau:

- Chọn $A \in a$ và $B \in b$ và đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$.

- Gọi MN là đoạn vuông góc chung của a và b , khi đó:



- Biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo các vec tơ không đồng phẳng

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{m}.$$

- Ta tìm được các hệ số x, y nhờ điều kiện vuông góc của $\overrightarrow{AB}$; $\vec{a}; \vec{b}$ từ đó suy ra khoảng cách cần tìm là: $MH = \sqrt{(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m})^2}.$

* **Phương pháp tọa độ:** Đối với phương pháp này, ta cần chú ý một số công thức:

- Khoảng cách giữa hai điểm A và B : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

- Khoảng cách từ một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến đường thẳng Δ đi qua điểm

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ và có vec tơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$: $d(M; \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MM_1} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

- Khoảng cách từ điểm $M(x_1; y_1; z_1)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt đi qua hai điểm M, M_1 có hai vec tơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$: $d(a; b) = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{MM_1}|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}$

Chú ý: - Việc tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau có thể quy về tính khoảng cách giữa hai điểm hoặc giữa đường thẳng và mặt phẳng song song hoặc giữa hai mặt phẳng song song.

- Việc tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song có thể quy về tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng.

Ví dụ 6: Cho tứ diện $OABC$ có các góc $AOB = BOC = COA = 90^\circ$ và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Gọi D là trung điểm của OC .

1) Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng BD .

2) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) .

Lời giải:

*** Phương pháp tổng hợp:**

1) Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên BD , khi đó có: $OM \perp BD$

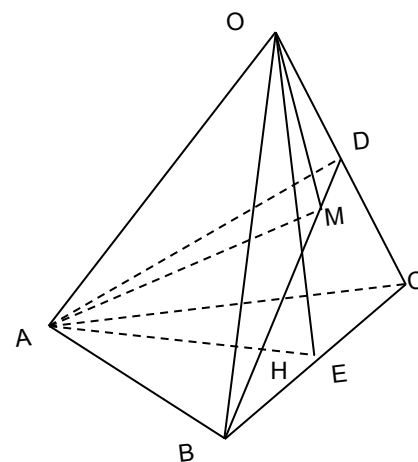
Xét tam giác vuông AOM có: $AM^2 = AO^2 + OM^2 = a^2 + OM^2$

Mặt khác, xét tam giác vuông OBD có:

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{4}{c^2} \Rightarrow OM^2 = \frac{b^2 \cdot c^2}{4b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow d(A; BD) = AM = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 \cdot c^2}{4b^2 + c^2}}$$

2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC) và $\mathbb{E} = AH \cap BC$. Vì $OH \perp BC$ và $OA \perp BC$ nên $BC \perp (OAH)$ do đó $BC \perp AH$ và $BC \perp OE$



Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{OE^2}$ với, vì vậy $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{4}{c^2}$ hay

$$d(O; (ABC)) = OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

*** Phương pháp vec tơ.** Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ vec tơ gốc, biểu diễn các dữ kiện sang ngôn ngữ vec tơ:

Chọn hệ vec tơ gốc: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$; khi đó $|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. D là trung điểm của OC nên $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \vec{c}$

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức vec tơ phù hợp với yêu cầu bài toán.

1) Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = x.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + (1-x).\vec{b} + \frac{x}{2}\vec{c}$. Vì

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow \left[-\vec{a} + (1-x)\vec{b} + \frac{x}{2}\vec{c} \right] \cdot \left(\frac{\vec{c}}{2} - \vec{b} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4b^2}{4b^2 + c^2} \text{ Vậy}$$

$$d(A; BD) = AM = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 \cdot c^2}{4b^2 + c^2}}$$

***Phương pháp tọa độ:** Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ tọa độ, chuyển các dữ kiện bài toán sang ngôn ngữ tọa độ

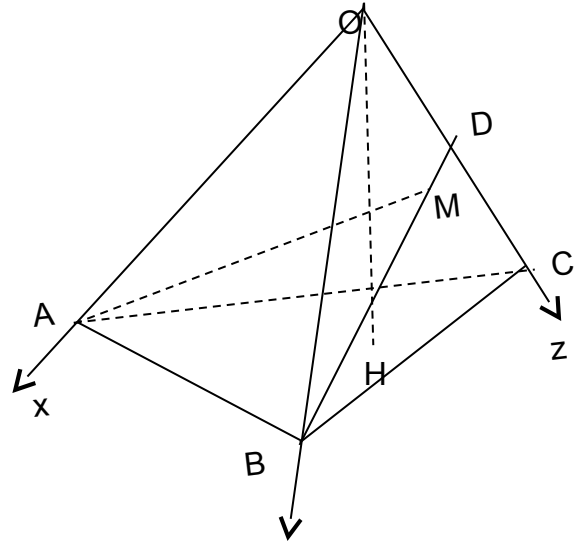
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$A \in Ox, B \in Oy, C \in Oz$.

khí đó: $O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;b;0)$

$C(0;0;c)$, Vì D là trung điểm của

OC nên $D = (0;0;\frac{c}{2})$.



+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức tọa độ.

1) Đặt M là hình chiếu vuông góc của A trên BD . Ta có:

$$\overrightarrow{BD} = \left(0, -b, \frac{c}{2} \right); \overrightarrow{BA} = (a, -b, 0). \text{ Vậy}$$

$$d(A; BD) = AM = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BD}|} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 \cdot c^2}{4b^2 + c^2}}$$

2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC) , mặt phẳng (ABC) có phương trình (theo đoạn chắn) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + acy + abz - abc = 0$$

$$\Rightarrow d(O; (ABC)) = OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

2.3.5 CÁC BÀI TOÁN VỀ TÍNH GÓC

*** Phương pháp vectơ:**

+ Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có hai vectơ chỉ phương $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

$$\text{được xác định: } \cos(d_1; d_2) = |\cos(\vec{a}_1; \vec{a}_2)| = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|}$$

+ Việc tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng quy về tính góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

+ Việc tính góc giữa hai mặt phẳng quy về tính góc giữa hai đường thẳng tương ứng vuông góc với hai mặt phẳng đó.

*** Phương pháp tọa độ:**

+ Góc giữa hai vectơ $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1), \vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ là

$$\cos(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

+ Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có hai vec tơ chỉ phương

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2 \text{ được xác định: } \cos(d_1; d_2) = |\cos(\vec{a}_1; \vec{a}_2)| = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

+ Góc giữa đường thẳng $d: \frac{x-x_0}{a} + \frac{y-y_0}{b} + \frac{z-z_0}{c} = 1$ và mặt phẳng P :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\text{được xác định: } \sin(d; (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

+ Góc giữa hai mặt phẳng $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y +$

$$C_2z + D_2 = 0 \text{ được xác định: } \cos((P); (Q)) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Ví dụ 7: Cho hai tia Ax_1 và By_1 hợp với nhau một góc 60° . Đường thẳng AB vuông góc với cả hai Ax_1 và By_1 . $AB = a$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai tia Ax_1 và By_1 sao cho $AM = m, BN = n$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và AB theo a, m, n

Lời giải:

• **Phương pháp tổng hợp:**

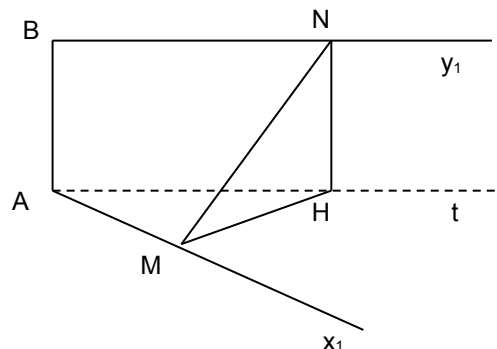
Dựng $At // By_1$ và $NH // AB$ ($H \in At$) Ta có:

$AB \perp AH, AB \perp AM \Rightarrow AB \perp (MHA)$. Mặt

khác $NH // AB$ nên $NH \perp (MHA)$

$\Rightarrow NH \perp MH$. Vì $NH = AB = a, MH^2 =$

$$AM^2 + AH^2 - 2 \cdot AM \cdot AH \cdot \cos 60^\circ$$



$$= m^2 + n^2 - m \cdot n \text{ suy ra } MN^2 = MH^2 + AH^2 = m^2 + n^2 + a^2 - m \cdot n.$$

$$\text{Vậy } \cos(MN; AB) = \cos MNH = \frac{a}{\sqrt{m^2 + n^2 + a^2 - mn}}$$

* **Phương pháp vec tơ.** Quy trình giải bài toán gồm:

+ **Bước 1:** Chọn hệ vec tơ gốc, biểu diễn các dữ kiện sang ngôn ngữ vec tơ:

Chọn hệ vec tơ gốc: $\vec{MA} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{BN} = \vec{c}$; khi đó $|\vec{a}| = m, |\vec{b}| = a, |\vec{c}| = n$

$$\text{và } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0; \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} mn.$$

+ **Bước 2:** Biến đổi các biểu thức vec tơ phù hợp với yêu cầu bài toán.

Ta có: $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{AB} \cdot \vec{MN} = \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = a^2$; $|\vec{AB}| = |\vec{b}| = a$;

$$|\vec{MN}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} = \sqrt{m^2 + n^2 + a^2 - m \cdot n}$$

* **Phương pháp tọa độ:** Quy trình giải bài

toán gồm: + **Bước 1:** Chọn hệ tọa

độ, chuyển các dữ kiện bài toán sang ngôn

ngữ tọa độ. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao

$$\overrightarrow{AB} = (0, 0, a) \text{ suy ra } |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{m^2 + n^2 + a^2 - m.n} ; |\overrightarrow{AB}| = a ; \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2.$$

2.4. THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

2.4.2 Nội dung thực nghiệm: Các tiết thực nghiệm là tiết 38-Tự chọn, và một bài

2.4.3 Tổ chức thực nghiệm

Thời gian thực nghiệm: Năm học 2015-2016

Hãy giải các bài toán sau bằng các phương pháp khác nhau:

Bài 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N lần lượt là các điểm chia hai đoạn thẳng CA và DC_1 theo tỉ số $\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng $MN \parallel (ABC_1D_1)$.

Điểm Lớp	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Số bài
Thực nghiệm	0	2	1	3	12	13	11	4	1	47

<i>Đối chứng</i>	2	4	11	13	9	6	2	1	0	48
----------------------	---	---	----	----	---	---	---	---	---	----

Kết quả sơ bộ: + Lớp thực nghiệm tỉ lệ học sinh đạt kết quả trung bình trở lên là: 44(tỉ lệ khá giỏi là:55%)

+ Lớp đối chứng tỉ lệ học sinh đạt kết quả trung bình trở lên là: 22 (tỉ lệ khá giỏi là:18%)

3.3 Kết luận thực nghiệm

+ Việc dạy học cho học sinh quy trình giải các bài toán hình học không gian bằng các phương pháp khác nhau thông qua một số tiết và dạng bài tập đã giúp cho các em thấy được các mối liên hệ giữa các chủ đề hình học tổng hợp, vec to và tọa độ

+ Giúp các em có kỹ năng thực sự giải một bài toán hình theo quy trình đã đưa ra,

+ Việc tổ chức dạy học tốt nhờ ứng dụng công nghệ thông tin, dùng các phương tiện dạy học hiện đại đã gây cho học sinh hứng thú học tập môn hình, nâng cao hiệu quả của giờ dạy.

Như vậy, mục đích thực nghiệm đã đạt và giả thuyết khoa học của đề tài là chấp nhận được.

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

- Kết luận:

Qua quá trình nghiên cứu đề tài: “**Một số phương pháp giải toán hình học không gian ở trường THPT** ” đã thu được một số kết quả:

+ Đề tài đã làm sáng tỏ các căn cứ lý luận và thực tiễn của việc rèn luyện năng lực chuyển đổi ngôn ngữ.

+ Đề tài đã đưa ra quy trình giải một lớp các bài toán bằng các phương pháp hình học tổng hợp, vec tơ và tọa độ.

+Dựa trên kinh nghiệm thực tế của giáo viên và qua kết quả thực nghiệm cho phép xác nhận giả thuyết của đề tài là chấp nhận được, có tính hiệu quả và mục đích nghiên cứu đã hoàn thành.

- Kiến nghị: Đối với giáo viên dạy học môn toán cần tách lọc các đối tượng học sinh để từ đó có phương pháp dạy học phù hợp. Đối với học sinh ở mức trung bình và dưới trung bình thì trang bị cho các học sinh phương pháp hệ trục tọa độ hóa để các em có sự tiếp cận dễ hơn.

Xác nhận của thủ trưởng đơn vị

Thanh Hoá, ngày 30 tháng 3 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN do mình viết,
không sao chép nội dung của người khác.

Người viết

Trịnh Đình Chiến

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Tài liệu bồi dưỡng giáo viên môn Toán- Nhà xuất bản giáo dục.

2. Phương pháp giải toán hình học, Lê Hồng Đức – Đào Thiện Khải – Lê Bích Ngọc, Nhà xuất bản đại học sư phạm- Năm 2004.
3. Sách Hình học 12, Nhà xuất bản giáo dục- Năm 2008.
4. Sách Hình học 12 Nâng cao, Nhà xuất bản giáo dục- Năm 2008.
5. Sách Hình học 11, Nhà xuất bản giáo dục- Năm 2007.
6. Sách Hình học 11 Nâng cao, Nhà xuất bản giáo dục- Năm 2007.
7. Sách Giáo viên Hình học 12, Nhà xuất bản giáo dục- Năm 2008.
8. Sách Giáo viên Hình học 12 Nâng cao, Nhà xuất bản giáo dục- Năm 2008.
9. Sách Giáo viên Hình học 11, Nhà xuất bản giáo dục- Năm 2007.
10. Sách Giáo viên Hình học 11 Nâng cao, Nhà xuất bản giáo dục- Năm 2007.