|  |  |
| --- | --- |
| **ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**  **TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN** | **ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10**  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020** |

**MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)**

**Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)**

**Câu I. (4 điểm)**

1. Giải hệ phương trình : 
2. Giải phương trình: 

**Câu II. (2 điểm)**

1. Tìm nguyên dương thỏa mãn 
2. Với  là những số thực dương thỏa mãn



Chứng minh rằng: 

**Câu III. (3 điểm)**

Cho tam giác có là góc nhỏ nhất trong ba góc của tam giác và nội tiếp đường tròn (O). Điểm thuộc cạnh sao cho là phân giác Lấy các điểm thuộc (O) sao cho đường thẳng cùng song song với đường thẳng 

1. Chứng minh rằng 
2. Gọi giao điểm của đường thẳng với các đường thẳng lần lượt là Chứng minh rằng bốn điểm cùng thuộc một đường tròn
3. Gọi theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng Chứng minh rằng các đường thẳng đồng quy.

**Câu IV. (1 điểm)**

Với là những số thực dương thỏa mãn Chứng minh rằng:



**ĐÁP ÁN**

**Câu I.**

1. **Giải hệ phương trình: **

Nếu hệ phương trình trở thành (Vô nghiệm), do đó 

Nhân cả hai vế của phương trình với ta có:



Thế vào phương trình ta có:



Ta có: 

Thế vào phương trình (1) ta có: 



Vậy nghiệm của hệ phương trình là 

1. **Giải phương trình: **



ĐKXĐ: 

Đặt : 



Khi đó ta có:

Giải phương trình ta có: 

Với (vô lý)không là nghiệm của phương trình (\*)

, Thay vào ta được:



Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Câu II.**

1. **Tìm nguyên dương thỏa mãn: **

****

Đặt 





Ta lại có : 

Lại có 





Vậy phương trình có nghiệm 

1. **Với là những số thực dương thỏa mãn **

. **Chứng minh rằng **

**Giải**



Mặt khác 

Dự đoán dấu xảy ra 

Ta có: 

Áp dụng bất đẳng thức , ta có:





Ta biểu diễn theo  và bằng cách đồng nhất hệ số

Xét 



Dấu xảy ra 

**Câu III.**

****

1. **Chứng minh rằng **

Ta có: (so le trong do 

;(so le trong do 

(trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau).

Vậy (trong một đường tròn, hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau)

1. **Chứng minh rằng 4 điểm cùng thuộc một đường tròn.**

Ta có: (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

(góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn)

Vậy tứ giác là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện bằng nhau) hay cùng thuộc một đường tròn.

1. **Chứng minh các đường thẳng đồng quy**

Áp dụng định lý Mê-lê-na-uýt trong tam giác cát tuyến , ta có:

(do là trung điểm của nên 



Gọi Ta đi chứng minh 

Áp dụng định lý Mê-lê-na-uýt trong tam giác cát tuyến ta có:

(Do là trung điểm của nên 



Ta sẽ chứng minh (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)  
Vì nên áp dụng định lý Ta – let ta có: 

Lại có : (định lý đường phân giác), do đó: 

Xét và có: chung



Từ (1) và (2)

Tiếp tục áp dụng định lý đường phân giác trong tam giác ta có: 

Từ (3) và (4) ta suy ra do đó được chứng minh, tức là 

Từ suy ra , do đó 

Vậy đồng quy tại K

**Câu IV.**

Với ta có:

Áp dụng BĐT ta có:



Đặt áp dụng BĐT Schur ta có: 



Khi đó ta có:





Dấu xảy ra 

Vậy 