PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TIỀN HẢI	ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI NĂM 2016-2017 MÔN: TOÁN 8

Bài 1. (4,5 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $M=(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$
2) Cho a,b,c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

Nếu $a+b+c=0$ thì $\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$

3) Cho $A=p^4$ trong đó p là số nguyên tố. Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là số chính phương.

Bài 2. (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức $P=\left(\frac{x-4}{x^3-1}+\frac{1}{x-1}\right):\left(1-\frac{x-8}{x^2+x+1}\right) \quad (x\neq 1)$
   a) Rút gọn biểu thức P
   b) Tính giá trị của P khi x là nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$
2) Chứng minh rằng: $f(x)=(x^2+x-1)^{2018}+(x^2-x+1)^{2018}-2$ chia hết cho $g(x)=x^2-x$

Bài 3. (3,5 điểm)

1) Tìm m để phương trình có nghiệm (với m tham số) $\frac{x-m}{x+3}+\frac{x-3}{x+m}=2$
2) Giải phương trình: $2x(8x-1)^2.(4x-1)=9$

Bài 4. (7,0 điểm) Cho hình chữ nhật $ABCD, AB=2AD.$ Trên cạnh AD lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $AM=CP.$ Kẻ BH vuông góc với AC tại H. Gọi Q là trung điểm của $CH,$ đường thẳng kẻ qua P song song với MQ cắt AC tại N.

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành
b) Khi M là trung điểm của $AD.$ Chứng minh BQ vuông góc với NP
c) Đường thẳng AP cắt DC tại điểm F. Chứng minh rằng $\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{AP^2}+\frac{1}{4AF^2}$

Bài 5. (1,0 điểm). Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1.

$$M=(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$$
$$M=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-24$$
$$M=(x^2+7x+11-1)(x^2+7x+11+1)-24$$
$$M=(x^2+7x+11)^2-25$$
$$M=(x^2+7x+6)(x^2+7x+16)$$
$$M=(x+1)(x+6)(x^2+7x+16)$$

2. Các ước dương của A là $1;p;p^2;p^3;p^4$

Tổng các ước là $1+p+p^2+p^3+p^4=n^2\ (n\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow 4+4p+4p^2+4p^3+4p^4=4n^2$

Ta có:

$4p^4+4p^3+p^2<4n^2<4p^4+p^2+4+4p^3+8p^2+4p$

$\Rightarrow (2p^2+p)^2<(2n)^2<(2p^2+p+2)^2\Rightarrow (2n)^2=(2p^2+p+1)^2$

Do đó :

$4p^4+4p^3+4p^2+4p+4=4p^4+4p^3+5p^2+2p+1$

$\Leftrightarrow p^2-2p-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p_1=-1(ktm)\\ p_2=3(tm)\end{array}\right.$

Vậy $p=3$

3. Đặt $\dfrac{a-b}{c}=x;\dfrac{b-c}{a}=y;\dfrac{c-a}{b}=z\Rightarrow \dfrac{c}{a-b}=\dfrac{1}{x};\dfrac{a}{b-c}=\dfrac{1}{y};\dfrac{b}{c-a}=\dfrac{1}{z}(1)$

$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=9$

Ta có: $$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\right) \qquad (2)$$

Ta lại có: $$\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\frac{c}{a-b}=\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}.\frac{c}{a-b}$$

$$=\frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)}=\frac{c(c-a-b)}{ab}=\frac{c\left[2c-(a+b+c)\right]}{ab}=\frac{2c^2}{ab}$$

Tương tự ta có: $$\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc};\frac{x+y}{z}=\frac{2b^2}{ac}$$

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2}{abc}\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

Vì $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Do đó: $$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2}{abc}.3abc=3+6=9$$

Bài 2.

1. a) Với $x\neq 1$ ta có:

$$P=\left(\frac{x-4}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right):\frac{x^2+x+1-x+8}{x^2+x+1}$$

$$=\left(\frac{x-4+x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right):\frac{x^2+9}{x^2+x+1}=\frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x^2+x+1)}.\frac{x^2+x+1}{x^2+9}$$

$$=\frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+9)}=\frac{x+3}{x^2+9}$$

Vậy $x\neq 1$ thì $P=\dfrac{x+3}{x^2+9}$

b) $x^2-3x+2=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(tm)\\ x=1(ktm)\end{array}\right.$

thay $x=2$ vào P ta có: $P=\frac{2+3}{2^2+9}=\frac{5}{13}$

Kết luận với $x=2$ thì $P=\frac{5}{13}$

2) Đa thức $g(x)=x^2-x=x(x-1)$ có hai nghiệm là $x=0 \quad v \qquad x=1$

Ta có $f(0)=(-1)^{2018}+1^{2018}-2=0 \Rightarrow x=0$ là nghiệm của $f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ chứa thừa số x

Ta có $f(1)=(1^2+1-1)^{2018}+(1^2-1+1)^{2018}-2=0 \Rightarrow x=1$ là nghiệm của $f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ chứa thừa số $x-1$ mà các thừa số x và $x-1$ không có nhân tử chung do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x-1)$

Vậy $f(x)=(x^2+x-1)^{2018}+(x^2-x+1)^{2018}-2$ chia hết cho $g(x)=x^2-x$

Bài 3.

1) ĐKXĐ: $x\neq -3; x\neq -m$ ta có:

$\frac{x-m}{x+3}+\frac{x-3}{x+m}=2 \Rightarrow x^2-m^2+x^2-9=2(x+3)(x+m)$

$\Leftrightarrow 2x^2-m^2-9=2(x^2+3x+3m+mx) \Leftrightarrow -2(m+3)x=(m+3)^2 \qquad (1)$

Với $m=3$ thì (1) có dạng $0x=0$. Nghiệm đúng mọi x thỏa mãn điều kiện $x\neq -3$ $x\neq -m$, do đó tập nghiệm của phương trình là $x\neq \pm 3$

Với $m\neq -3$ thì phương trình (1) có nghiệm $x=-\frac{(m+3)^2}{2(m+3)}=-\frac{m+3}{2}$

Để giá trị này là nghiệm của phương trình thì ta phải có:

$-\frac{m+3}{2}\neq -3$ và $-\frac{m+3}{2}\neq -m$ tức là $m\neq 3$. Vậy nếu $m\neq \pm 3$ thì $x=-\frac{m+3}{2}$ là nghiệm.

Kết luận : với $m=-3$ thì $S=\{x/x\neq\pm3\}$. Với $m\neq\pm3$ thì $S=\left\{-\dfrac{m+3}{2}\right\}$

2. Ta có: $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$

$\Leftrightarrow (64x^2-16x+1)(8x^2-2x)=9 \Leftrightarrow (64x^2-16x+1)(64x^2-16x)=72(*)$

Đặt $64x^2-16x=t$ ta có:

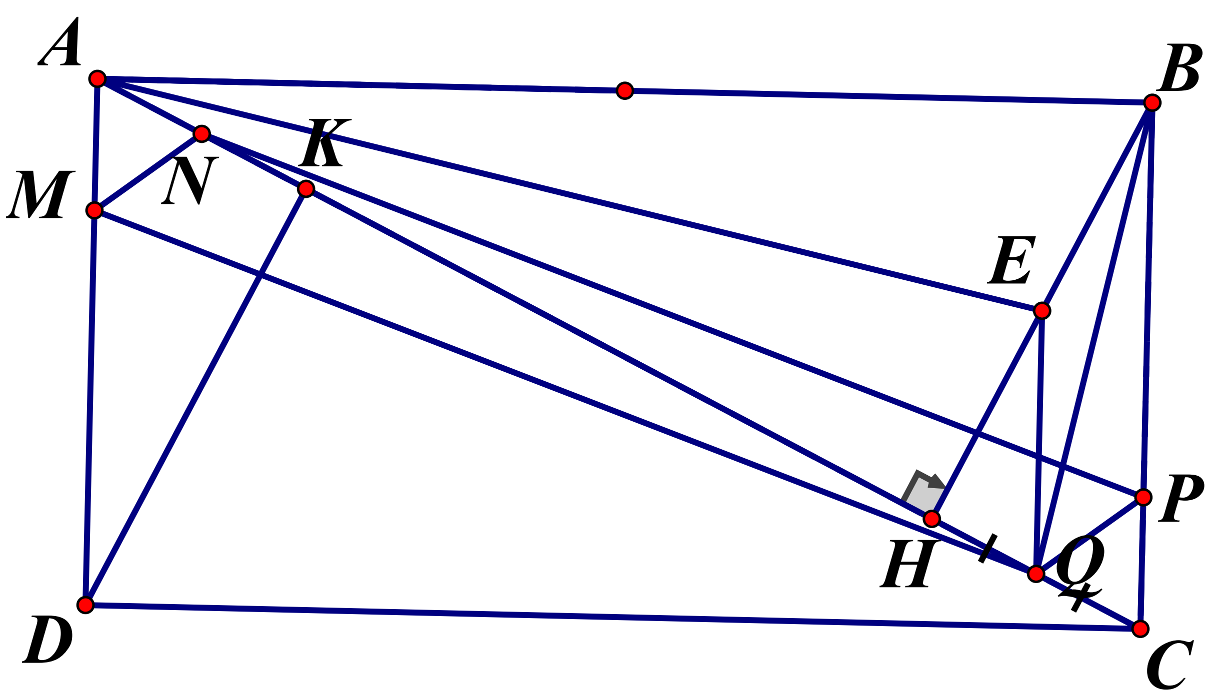
$(*)\Leftrightarrow t(t+1)-72=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-9\\ t=8\end{array}\right.$

Với $t=-9$ ta có: $64x^2-16x=-9\Leftrightarrow 64x^2-16x+9=0\Leftrightarrow (8x-1)^2+8=0$

(Vô nghiệm vì $(8x-1)^2+8>0$)

Với $t=8$ ta có $64x^2-16x=8\Leftrightarrow 64x^2-16x-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\\ x=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$

Bài 4.



a) Chứng minh được $DH//BK(1)$

Chứng minh được $\Delta AHD = \Delta CKB \Rightarrow DH = BK \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Gọi E là trung điểm BK, chứng minh được QE là đường trung bình ΔKBC

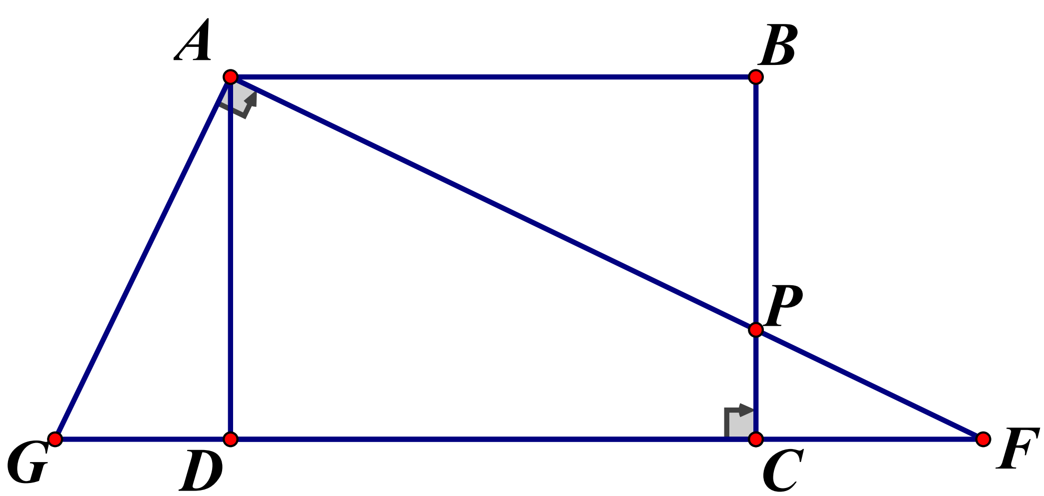
nên $QE//BC \Rightarrow QE \perp AB$ (vì $BC \perp AB$) và $QE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$

Chứng minh $AM = QE$ và $AM//QE \Rightarrow AMQE$ là hình hành

Chứng minh $AE//NP//MQ(3)$.

Xét ΔAQB có BK và QE là hai đường cao của tam giác nên E là trực tâm của tam giác nên AE là đường cao thứ ba của tam giác $AE \perp BQ \Rightarrow BQ \perp NP$

c)



Vẽ tia Ax vuông góc với AF. Gọi giao của Ax với CD là G.

Chứng minh $\widehat{GAD} = \widehat{BAP}$ (cùng phụ với $\widehat{PAD}$) $\Rightarrow \Delta ABP(g.g)$

$\Rightarrow \frac{AP}{AG} = \frac{AB}{AD} = 2 \Rightarrow AG = \frac{1}{2}AP$

Ta có: ΔAGF vuông tại A có $AD \perp GF$ nên $AG.AF = AD.GF\ (= 2S_{AGF})$

$\Rightarrow AG^2.AF^2 = AD^2.GF^2\ (1)$

Ta chia hai vế của (1) cho $AD^2.AG^2.AF^2$ mà $AG^2 + AF^2 = GF^2$ (đl Pytago)

$$\Rightarrow \frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AG^2}+\frac{1}{AF^2}\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}AP\right)^2}+\frac{1}{AF^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{AB^2}=\frac{4}{AP^2}+\frac{1}{AF^2}\Rightarrow \frac{1}{AB^2}=\frac{1}{AP^2}+\frac{1}{4AF^2}$$

Bài 5.

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x,y,z trong đó cạnh huyền là z $(x,y,z$ là các số nguyên dương). Ta có

$xy=2(x+y+z)$ (1) và $x^2+y^2=z^2$ (2)

Từ (2) suy ra $z^2=(x+y)^2-2xy,$ thay (1) vào ta có:

$$z^2=(x+y)^2-4(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow z^2+4z=(x+y)^2-4(x+y)\Leftrightarrow z^2+4z+4=(x+y)^2-4(x+y)+4$$

$$\Leftrightarrow (z+2)^2=(x+y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+2=x+y-2 \\ z+2=-x-y+2(ktm \quad vi \quad z>0) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow z=x+y-4;$ thay vào (1) ta được: $xy=2(x+y+x+y-4)$

$$\Leftrightarrow xy-4x-4y=-8$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(y-4)=8=1.8=2.4$$

Từ đó tìm được các giá trị của x,y,z là:

$$(x;y;z)\in\{(5;12;13);(12;5;13);(6;8;10);(8;6;10)\}$$