

**SÁNG TÁC ĐỀ GIỮA HỌC KÌ II LỚP 11
THEO MA TRẬN CỦA BGD**

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. [NB] Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

- A. $\lim v_n = 0$ nếu $\lim(v_n + a) = 0$. B. $\lim v_n = a$ nếu $\lim(v_n - a) = 0$.
C. $\lim v_n = 0$ nếu $\lim(v_n - a) = 0$. D. $\lim v_n = a$ nếu $\lim(v_n + a) = 0$.

Câu 2. [NB] Cho $\lim u_n = 4$, $\lim v_n = -1$. Khi đó $\lim(u_n - v_n)$ bằng

- A. 3. B. -4. C. -5. D. 5.

Câu 3. [NB] Trong các kết quả sau, kết quả nào **sai** ?

Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- A. $\lim(u_n + v_n) = a + b$. B. $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.
C. $\lim(u_n - v_n) = a - b$. D. $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$

Câu 4. [NB] Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

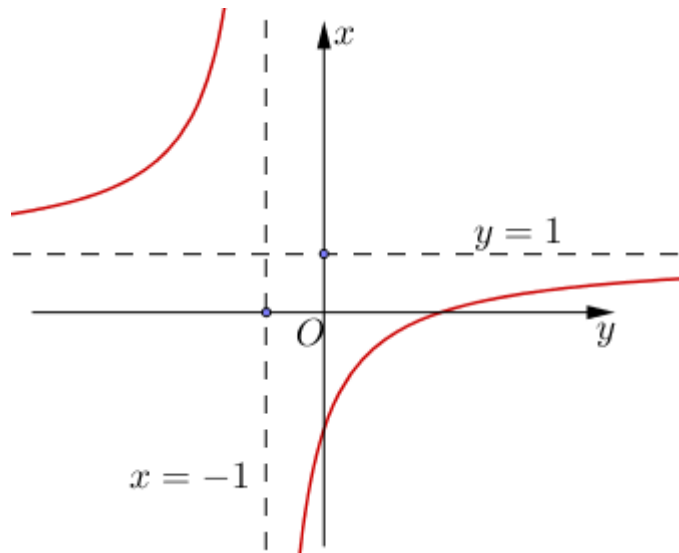
- A. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
B. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
C. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
D. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 5. [NB] Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai ?

- A. $\lim q^n = 0, \forall q \in R$. B. $\lim c = c$ với c là hằng số.
C. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương . D. $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Câu 6. [NB] Trong các kết quả sau, kết quả nào **đúng** ?

- A. Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{v_n}{u_n} = 0$.



- A. $1; +\infty; -\infty; 1$ B. $-\infty; +\infty; 1; 1$ C. $1; 1; +\infty; -\infty$ D. $+\infty; -\infty; 1; 1$

Câu 14. [NB] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K chứa a . Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu

- A. $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow a$. B. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$.
 C. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ D. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a$

Câu 15. [NB] Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x - 6}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-6; 1)$ B. $(-1; 6)$ C. $(-1; +\infty)$ D. $(-\infty; 6)$

Câu 16. [NB] Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu của a sẽ là

- A. Điểm A . B. Trùng với phương chiếu.
 C. Đường thẳng đi qua A . D. Đường thẳng đi qua A hoặc chính A .

Câu 17. [NB] Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Nếu giá của ba vectơ a, b, c cắt nhau từng đôi một thì ba vectơ đó đồng phẳng.
 B. Nếu trong ba vectơ a, b, c có một vectơ 0 thì ba vectơ đó đồng phẳng.
 C. Nếu giá của ba vectơ a, b, c cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng.
 D. Nếu trong ba vectơ a, b, c có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng.

Câu 18. [NB] Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn đẳng thức đúng.

- A. $DB' = DA + DD' + DC$ B. $AC' = AC + AB + AD$
 C. $DB = DA + DD' + DC$ D. $AC' = AB + AB' + AD$

Câu 19. [NB] Cho hai đường thẳng a, b lần lượt có véc tơ chỉ phương là u, v . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu $a \perp b$ thì $u \cdot v = 0$. B. Nếu $u \cdot v = 0$ thì $a \perp b$.

- C. $\cos(a, b) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|u| \cdot |v|}$ D. $\cos(a, b) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$

Câu 20. [NB] Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.
D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

Câu 21. [TH] Cho dãy số (u_n) có $\lim u_n = 7$. Tính giới hạn $\lim \frac{5u_n - 7}{7u_n - 5}$.

A. 7. **B.** $\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{14}{15}$. **D.** $\frac{7}{11}$.

Câu 22. [TH] Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$$

A. $\frac{4}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 23. [TH] Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(2n^3 + 1)^4 (2n + 3)^{10}}{2n^{22} + 2}$ là:

A. 2. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** 2^{13} . **D.** 2^{18} .

Câu 24. [TH] Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{4x - 1} - \frac{2x^3}{2x^2 + 1} \right)$.

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 25. [TH] Kết quả của $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^3 + 2x - 5}{x^2 + 2x}$ bằng:

A. $\frac{-9}{8}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Câu 26. [TH] Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - ax + 6} + x) = 5$ với $a \in \mathbb{R}$. Giá trị của a là:

A. 6 **B.** -10 **C.** 10 **D.** -6

Câu 27. [TH] Hàm số nào được cho dưới đây liên tục trên tập số thực \mathbb{R} ?

A. $y = \frac{x+1}{x-1}$. **B.** $y = \frac{x-1}{x+1}$. **C.** $y = \frac{x-1}{x^2+1}$. **D.** $y = \frac{x+1}{x^2-1}$.

Câu 28. [TH] Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1; x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại

A. $x = 0; x = 1$. **B.** Mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.
C. Mọi điểm trừ $x = -1$. **D.** Mọi điểm trừ $x = 0$.

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{khi } x \neq 2 \\ 5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Câu 29. [TH] Cho hàm số

Khẳng định nào sau đây đúng về tính liên tục của hàm số đã cho?

- A. Hàm số liên tục trên \mathbb{R} .
- B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$, gián đoạn tại $x = 2$.
- C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$, gián đoạn tại $x = 4$.
- D. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 5)$ và $(5; +\infty)$, gián đoạn tại $x = 5$.

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{khi } x < 1 \\ 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Câu 30. [TH] Cho hàm số

Với giá trị nào của tham số thực a thì hàm số đã cho liên tục trên \mathbb{R} ?

- A. $a = -2$.
- B. $a = 1$.
- C. $a = 4$.
- D. $a = 3$.

Câu 31. [TH] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. M, N lần lượt là trung điểm của AB và BB' .

Góc giữa hai vectơ MN và $A'C'$ bằng.

- A. 0° .
- B. 60° .
- C. 90° .
- D. 30° .

Câu 32. [TH] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'D'$. Góc giữa hai đường thẳng MN và $B'C$ là.

- A. 90° .
- B. 45° .
- C. 30° .
- D. 60° .

Câu 33. [TH] Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{CDA} = 90^\circ$, $AB = DC$. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC . Biết $AC \perp BD$. Góc giữa MN và EF bằng

- A. 90° .
- B. 30° .
- C. 60° .
- D. 45° .

Câu 34. [TH] Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABFE$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. BD, AK, GF đồng phẳng.
- B. BD, IK, GF đồng phẳng.
- C. BD, EK, GF đồng phẳng.
- D. BD, IK, GC đồng phẳng.

Câu 35. [TH] Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$
- B. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$
- C. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$
- D. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. [VD] Tính $\lim \left(\sqrt{9^n - 2 \cdot 3^n} - 3^n + \frac{1}{2021} \right)$

Câu 2. [VD] Cho tứ diện $ABCD$, trên cạnh AB, CD lấy điểm P, Q sao cho $AP = 4PB, CD = 5CQ$.
Chứng minh AD, BC, PQ đồng phẳng.

Câu 3a. [VD] Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3} - \sqrt[3]{6x-5}}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

Câu 3b. [VDC]

1. Cho phương trình: $x^3 \cos^3 x + m(x \cos x - 1)(x \cos x + 2) = 0$.

Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

2. Cho phương trình: $(m^2 - m + 2021)x^3 - (2m^2 - 2m + 4040)x^2 - 4x + m^2 - m + 2021 = 0$.

Chứng minh phương trình có 3 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của tham số m .

-----**Hết**-----

1B	2D	3B	4C	5A	6C	7B	8D	9A	10A	11C	12B	13B	14C	15B
16D	17A	18A	19D	20D	21D	22B	23C	24A	25B	26C	27C	28B	29B	30A
31B	32D	33A	34B	35A										

LỜI GIẢI

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. [NB] Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

- A. $\lim v_n = 0$ nếu $\lim(v_n + a) = 0$. **B.** $\lim v_n = a$ nếu $\lim(v_n - a) = 0$!
- C. $\lim v_n = 0$ nếu $\lim(v_n - a) = 0$. **D.** $\lim v_n = a$ nếu $\lim(v_n + a) = 0$.

Lời giải

FB tác giả: Phạm Thúy Hiên

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được khái niệm giới hạn của dãy số

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số :

$$\lim v_n = a \text{ nếu } \lim(v_n - a) = 0$$

Câu 2. [NB] Cho $\lim u_n = 4$, $\lim v_n = -1$. Khi đó $\lim(u_n - v_n)$ bằng

- A. 3. **B.** -4. **C.** -5. **D.** 5 !

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Việt

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được định lý về giới hạn hữu hạn.

Ta có: $\lim(u_n - v_n) = 4 - (-1) = 5$.

Câu 3. [NB] Trong các kết quả sau, kết quả nào sai ?

Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- A. $\lim(u_n + v_n) = a + b$. **B.** $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$!
- C. $\lim(u_n - v_n) = a - b$. **D.** $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Việt

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được định lý về giới hạn hữu hạn

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0 \text{)}.$$

Theo định lý về giới hạn hữu hạn, ta có:

Câu 4. [NB] Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

- A. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- B.** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Lời giải

FB tác giả: Phạm Thúy Hiền

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được định nghĩa dãy số dẫn tới vô cực.

Theo định nghĩa giới hạn vô cực:

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 5. **[NB]** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai ?

A. $\lim q^n = 0, \forall q \in \mathbb{R}$

B. $\lim c = c$ với c là hằng số.

C. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương.

D. $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Lời giải

FB tác giả: Phạm Thúy Hiền

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được một số giới hạn đặc biệt.

Ta có $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$

Câu 6. **[NB]** Trong các kết quả sau, kết quả nào **đúng** ?

A. Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{v_n}{u_n} = 0$.

B. Nếu $\lim u_n = a$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

C. Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

D. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Việt

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được định lý về giới hạn vô cực và giới hạn hữu hạn.

Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

Câu 7. **[NB]** Cho $\lim u_n = -2$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$. Khi đó $\lim \frac{u_n}{v_n}$ bằng

A. ∞ .

B. $-\infty$.

C. 0 .

D. $+\infty$.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Việt

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được định lý về giới hạn vô cực.

Ta có $\lim u_n = -2 < 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ nên theo định lý về giới hạn vô cực ta có $\lim \frac{u_n}{v_n} = -\infty$.

Câu 8. [NB] Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2019}{x + 2020}$.

- A. $\frac{2019}{2020}$.
- B. $\frac{2021}{2022}$.
- C. $\frac{2018}{2019}$.
- D. $\frac{2020}{2021}$!**

Lời giải

FB tác giả: Lâm Tú

Yêu cầu cần đạt: nhận biết được giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2019}{x + 2020} = \frac{1 + 2019}{1 + 2020} = \frac{2020}{2021}$.

Câu 9. [NB] Cho $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10$. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} [h(x) - g(x)]$.

- A. 7 !**
- B. -7.
- C. -13.
- D. 13.

Lời giải

FB tác giả: Lâm Tú

Yêu cầu cần đạt: nhận biết được hiệu của hai giới hạn (định lý về giới hạn hữu hạn)

Có $\lim_{x \rightarrow 2} [h(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 10 - 3 = 7$.

Câu 10. [NB] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x - 8 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 + 2x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

- A. 0.
- B. -2.
- C. 8 !**
- D. -14.

Lời giải

FB tác giả: Lâm Tú

Yêu cầu cần đạt: nhận biết được giới hạn trái của hàm số.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$.

Câu 11. [NB] Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, với $L, M \in \mathbb{R}$. Chọn khẳng định sai.

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$.
- B. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = LM$.
- C. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$!**
- D. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$.

Lời giải

FB: Phạm Hữu Đảo

Yêu cầu cần đạt: nắm chắc các quy tắc tính giới hạn

Khẳng định C chỉ đúng khi $M \neq 0$.

Câu 12. [NB] Cho k là một số nguyên dương. Chọn mệnh đề **sai**.

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k} = +\infty$. **B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$! C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{x^k} = 0$. D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8x^k = +\infty$.**

Lời giải

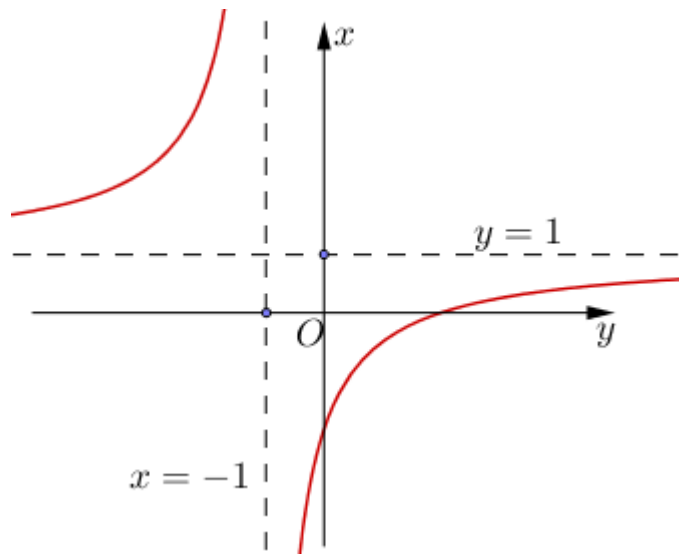
FB: Phạm Hữu Đảo

Yêu cầu cần đạt: nắm chắc các giới hạn vô cực và giới hạn 0

Khi k là số chẵn tức là k có dạng $k = 2m$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2m} = +\infty$.

Câu 13. [NB] Hình vẽ sau là đồ thị của một hàm số $y = f(x)$. Hãy quan sát đồ thị và cho biết

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ lần lượt có giá trị bằng:



- A. $1; +\infty; -\infty; 1$. **B. $-\infty; +\infty; 1; 1$ C. $1; 1; +\infty; -\infty$ D. $+\infty; -\infty; 1; 1$.**

Lời giải

FB: Phạm Hữu Đảo

Yêu cầu cần đạt: nắm chắc kiến thức về giới hạn 1 bên và giới hạn tại vô cực

Chọn B

Câu 14. [NB] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K chứa a . Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu

- A. $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow a$. **B. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$.
C. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$! D. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a$.**

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Văn

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được khái niệm hàm số liên tục tại một điểm; định nghĩa hàm số liên tục trên một khoảng

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K chứa a . Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- Câu 15.** [NB] Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x - 6}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?
- A. $(-6; 1)$. **B.** $(-1; 6)$! C. $(-1; +\infty)$. D. $(-\infty; 6)$.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Văn

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được khái niệm hàm số liên tục tại một điểm; định nghĩa hàm số liên tục trên một khoảng

TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 6\}$.

Hàm số liên tục trên các khoảng: $(-\infty; -1); (-1; 6); (6; +\infty)$.

Vì vậy hàm số liên tục trên khoảng $(-1; 6)$.

- Câu 16.** [NB] Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu của a sẽ là
- A. Điểm A . **B.** Trùng với phương chiếu.
 C. Đường thẳng đi qua A . **D.** Đường thẳng đi qua A hoặc chính A !

Lời giải

FB tác giả: Lê Xuân Quang

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được khái niệm phép chiếu song song.

Nếu phương chiếu song song hoặc trùng với đường thẳng a thì hình chiếu là điểm A .

Nếu phương chiếu không song song hoặc không trùng với đường thẳng a thì hình chiếu là đường thẳng đi qua điểm A .

- Câu 17.** [NB] Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?
- A.** Nếu giá của ba vectơ a, b, c cắt nhau từng đôi một thì ba vectơ đó đồng phẳng.
 B. Nếu trong ba vectơ a, b, c có một vectơ 0 thì ba vectơ đó đồng phẳng.
 C. Nếu giá của ba vectơ a, b, c cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng.
 D. Nếu trong ba vectơ a, b, c có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng.

Lời giải

Tác giả: Hồ Hữu Tình

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được khái niệm ba vectơ trong không gian đồng phẳng

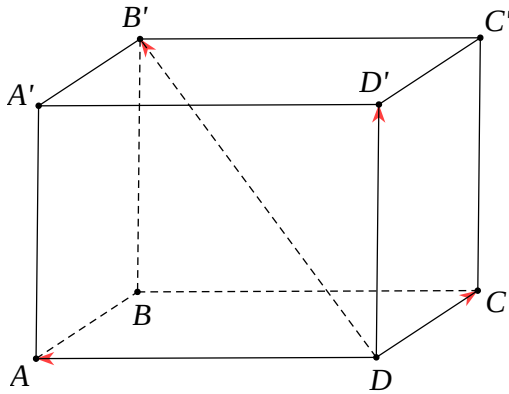
Dựa vào khái niệm ba vectơ đồng phẳng.

- Câu 18.** [NB] Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn đẳng thức đúng.
- A.** $DB' = DA + DD' + DC$! **B.** $AC' = AC + AB + AD$.
 C. $DB = DA + DD' + DC$. **D.** $AC' = AB + AB' + AD$.

Lời giải

Tác giả: Hồ Hữu Tình

Yêu cầu cần đạt: Chỉ ra được quy tắc hình hộp để cộng vectơ trong không gian



Theo quy tắc hình hộp ta có $\vec{DB'} = \vec{DA} + \vec{DD'} + \vec{DC}$.

Câu 19. [NB] Cho hai đường thẳng a, b lần lượt có véc tơ chỉ phương là u, v . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu $a \perp b$ thì $u \cdot v = 0$.

B. Nếu $u \cdot v = 0$ thì $a \perp b$.

C. $\cos(a, b) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|u| \cdot |v|}$.

D. $\cos(a, b) = \frac{uv}{|u| \cdot |v|}$.

Lời giải

FB tác giả: Trương Huyền

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết khái niệm tích vô hướng của hai véc tơ trong không gian

$$\cos(a, b) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|u| \cdot |v|}$$

Góc giữa 2 đường thẳng trong không gian luôn là góc nhọn hoặc vuông nên

Câu 20. [NB] Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

Lời giải

FB tác giả: Trương Huyền

Yêu cầu cần đạt: Nhận biết được khái niệm và điều kiện vuông góc giữa hai đường thẳng

Đường thẳng Δ_1 có véc tơ chỉ phương u_1

Đường thẳng Δ_2 có véc tơ chỉ phương u_2

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương v

$$\begin{cases} \Delta_1 // \Delta_2 \Rightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương} \\ d \perp \Delta_1 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow d \perp \Delta_2$$

Câu 21. [TH] Cho dãy số (u_n) có $\lim u_n = 7$. Tính giới hạn $\lim \frac{5u_n - 7}{7u_n - 5}$.

Câu 24. [TH] Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{4x-1} - \frac{2x^3}{2x^2+1} \right)$.

- A.** $-\infty$; **B.** $+\infty$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

FB tác giả: Trang Anh

Yêu cầu cần đạt: Học sinh biết cách tính giới hạn đến vô cực

Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{4x-1} - \frac{2x^3}{2x^2+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2(2x^2+1) - 2x^3(4x-1)}{(4x-1)(2x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^4 + 2x^3 + 3x^2}{(4x-1)(2x^2+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(-2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^3 \left(4 - \frac{1}{x} \right) \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{\left(4 - \frac{1}{x} \right) \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} = -\infty . \end{aligned}$$

Câu 25. [TH] Kết quả của $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^3 + 2x - 5}{x^2 + 2x}$ bằng:

- A.** $\frac{-9}{8}$. **B.** $-\infty$; **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

FB tác giả: Suy Dià

Yêu cầu cần đạt: Học sinh hiểu được giới hạn một bên để từ đó biết được khi nào ra $+\infty$ hay $-\infty$.

Ta có : $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^3 + 2x - 5}{x^2 + 2x} = -\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} (-x^3 + 2x - 5) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + 2x) = 0 \\ x \rightarrow -2^- \Rightarrow x < -2 \Rightarrow x^2 + 2x = x(x+2) > 0 \end{cases}$$

Vì

Câu 26. [TH] Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - ax + 6} + x) = 5$ với $a \in \mathbb{R}$. Giá trị của a là:

- A.** 6 **B.** -10 **C.** 10 **D.** -6

Lời giải

FB tác giả: Suy Dià

Yêu cầu cần đạt: Học sinh nhận biết được thể nào là dạng $\infty - \infty$ và cách khử dạng vô định đó.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - ax + 6} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - ax + 6} + x)(\sqrt{x^2 - ax + 6} - x)}{\sqrt{x^2 - ax + 6} - x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - ax + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - ax + 6} - x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-a + \frac{6}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a + \frac{6}{x}}{- \left(\sqrt{1 - \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Theo đề bài, ta lại có: $\frac{a}{2} = 5 \Leftrightarrow a = 10$

Câu 27. [TH] Hàm số nào được cho dưới đây liên tục trên tập số thực \mathbb{R} ?

A. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x-1}{x^2+1}$!

D. $y = \frac{x+1}{x^2-1}$.

Lời giải

FB tác giả: Hoang Trang

Yêu cầu cần đạt: Xét được tính liên tục của hàm số trên 1 khoảng, trên tập xác định.

Phương án A hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ nên hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Phương án B hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên hàm số gián đoạn tại $x=-1$.

Phương án D hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ nên hàm số gián đoạn tại $x = \pm 1$.

Phương án C hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ là hàm phân thức hữu tỉ có tập xác định là \mathbb{R} nên nó liên tục trên \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1; x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Câu 28. [TH] Hàm số

A. $x=0; x=1$.

C. Mọi điểm trừ $x=-1$.

liên tục tại

B. Mọi điểm $x \in \mathbb{R}$!

D. Mọi điểm trừ $x=0$.

Lời giải

FB tác giả: Lê Xuân Quang

Yêu cầu cần đạt: Giải thích được tính liên tục tại một điểm của hàm số.

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Để thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

- Xét tại $x = -1$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3 = f(-1).$$

→ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = -1$.

- Xét tại $x = 0$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x + 1) = 1 = f(0).$$

→ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Câu 29. [TH] Cho hàm số

Khẳng định nào sau đây đúng về tính liên tục của hàm số đã cho?

A. Hàm số liên tục trên \mathbb{R} .

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$, gián đoạn tại $x = 2$.

C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$, gián đoạn tại $x = 4$.

D. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 5)$ và $(5; +\infty)$, gián đoạn tại $x = 5$.

Lời giải

FB tác giả: Hoang Trang

Yêu cầu cần đạt: Xét được tính liên tục của hàm số trên 1 khoảng, trên tập xác định.

Trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$, hàm số $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định nên liên tục.

Xét hàm số tại $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

$$f(2) = 5$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{khi } x < 1 \\ 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Câu 30. [TH] Cho hàm số

Với giá trị nào của tham số thực a thì hàm số đã cho liên tục trên \mathbb{R} ?

A. $a = -2$.

B. $a = 1$.

C. $a = 4$.

D. $a = 3$.

Lời giải

FB tác giả: Hoang Trang

Yêu cầu cần đạt: Xét được tính liên tục của hàm số trên 1 khoảng, trên tập xác định.

Trên khoảng $(-\infty; 1)$, hàm số $y = x^2 - a$ là hàm đa thức nên liên tục.

Trên khoảng $(1; +\infty)$, hàm số $y = 3$ là hàm đa thức nên liên tục.

Xét hàm số tại $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - a) = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3) = 3$$

$$f(1) = 3$$

Hàm số liên tục trên \mathbb{R} khi hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = -2$.

Câu 31. [TH] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. M, N lần lượt là trung điểm của AB và BB' .

Góc giữa hai vectơ MN và $A'C'$ bằng.

A. 0° .

B. 60° .

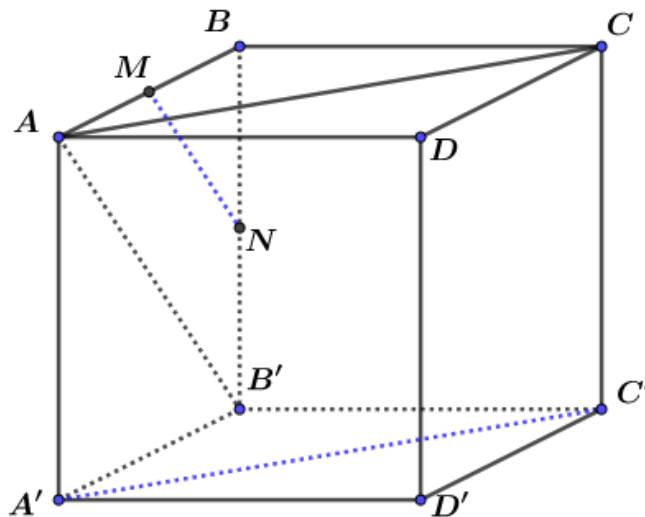
C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Hữu Học

Yêu cầu cần đạt: Xác định được góc giữa hai đường thẳng trong không gian



Ta có
$$\begin{cases} \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB'} \\ \vec{A'C'} = \vec{AC} \end{cases} \Rightarrow (\vec{MN}, \vec{A'C'}) = \left(\frac{1}{2}\vec{AB'}, \vec{AC} \right) = \widehat{AB'C}$$

Tam giác $AB'C$ là tam giác đều nên $\widehat{AB'C} = 60^\circ$.

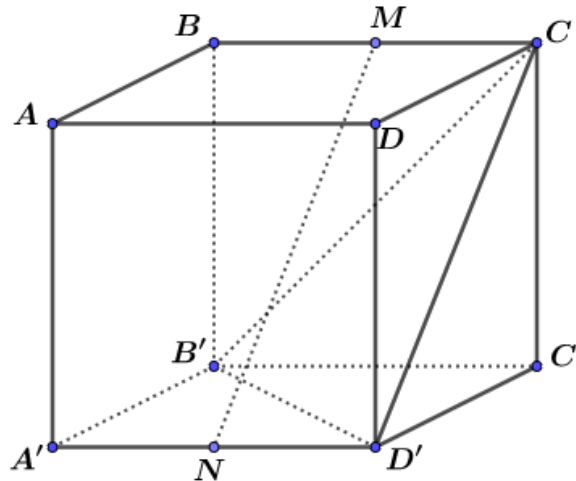
Vậy $(\vec{MN}, \vec{A'C'}) = 60^\circ$.

- Câu 32. [TH]** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'D'$. Góc giữa hai đường thẳng MN và $B'C$ là.
- A. 90° . B. 45° . C. 30° . **D. 60° !**

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Hữu Học

Yêu cầu cần đạt: Xác định được góc giữa hai đường thẳng trong không gian



Ta có $MN \parallel CD' \Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng MN và $B'C$ bằng góc giữa hai đường thẳng CD' và $B'C$.

Tam giác $B'CD'$ là tam giác đều nên suy ra góc giữa hai đường thẳng CD' và $B'C$ bằng 60° .

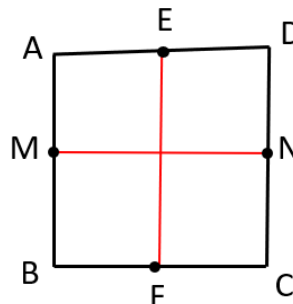
Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và $B'C$ bằng 60° .

- Câu 33. [TH]** Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$, $AB = DC$. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC . Biết $AC \perp BD$. Góc giữa MN và EF bằng
- A. 90° .** B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải

FB tác giả: Đỗ Thanh Tùng

Yêu cầu cần đạt: Sử dụng tích vô hướng



Ta có:

$$\begin{cases} \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC}) \\ \vec{EF} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}) \end{cases} \Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{EF} = \frac{1}{4}(\vec{AD} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{DC})$$

$$\Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{EF} = \frac{1}{4} (\vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{DC} + \vec{BC} \cdot \vec{AB} + \vec{BC} \cdot \vec{DC})$$

$$\text{Mà } \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{AD} \cdot \vec{DC} = 0 \end{cases} \quad (\text{Do } \angle ABC = \angle CDA = 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{EF} = \frac{1}{4} (\vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{BC} \cdot \vec{DC})$$

$$\Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{EF} = \frac{1}{4} (|\vec{AD}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos(\angle BAD) + |\vec{BC}| \cdot |\vec{DC}| \cdot \cos(\angle BCD))$$

$$\Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{EF} = \frac{1}{4} (|\vec{AD}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos(\angle BAD) + |\vec{BC}| \cdot |\vec{DC}| \cdot \cos(180^\circ - \angle BAD))$$

Do $AC \perp BD$ nên dễ chứng minh $AB = AD; DC = CB$ bằng hệ thức lượng trong tam giác vuông

$$\Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{EF} = \frac{1}{4} (|\vec{AD}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos(\angle BAD) - |\vec{BC}| \cdot |\vec{DC}| \cdot \cos(\angle BAD)) = 0$$

$\Rightarrow MN \perp EF$. Chọn A.

Câu 34. [TH] Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABFE$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. BD, AK, GF đồng phẳng.

B. BD, IK, GF đồng phẳng.

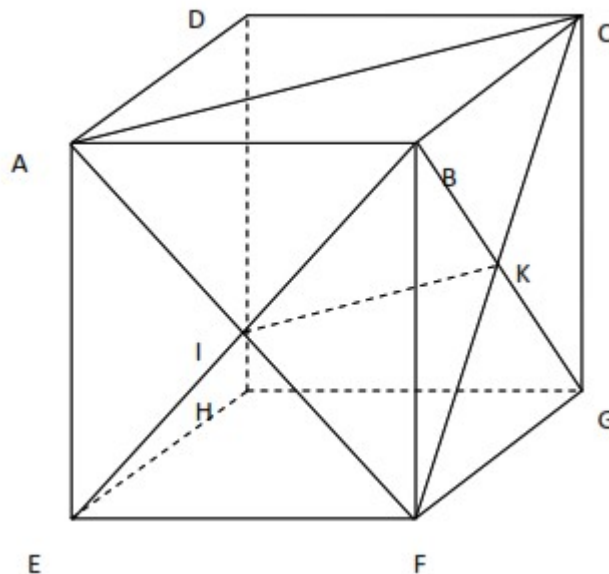
C. BD, EK, GF đồng phẳng.

D. BD, IK, GC đồng phẳng.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Thành Trung

Yêu cầu cần đạt: Giải thích được sự đồng phẳng của ba vectơ cho trước.



$$+ \text{ Vì } \begin{cases} IK \parallel (ABCD) \\ GF \parallel (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow IK, GF, BD \text{ đồng phẳng.}$$

+ Các bộ vectơ ở câu A, C, D không thể có giá cùng song song với một mặt phẳng. Do đó chúng không thể đồng phẳng.

Câu 35. [TH] Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$

B. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$

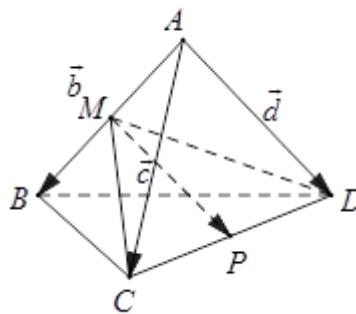
C. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$

D. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Thành Trung

Yêu cầu cần đạt: Thực hiện được phép cộng, trừ vectơ, nhân vectơ, sự bằng nhau của hai vectơ trong không gian



Ta có:

$$\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{MC} + \vec{MD})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AM} + \vec{AD} - \vec{AM}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - 2\vec{AM})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. [VD] Tính $\lim \left(\sqrt{9^n - 2 \cdot 3^n} - 3^n + \frac{1}{2021} \right)$

Lời giải

FB tác giả: Trần Mạnh Nguyên

Yêu cầu cần đạt: Vận dụng được các khái niệm giới hạn, định lý, giới hạn đặc biệt vào tình huống cụ thể.

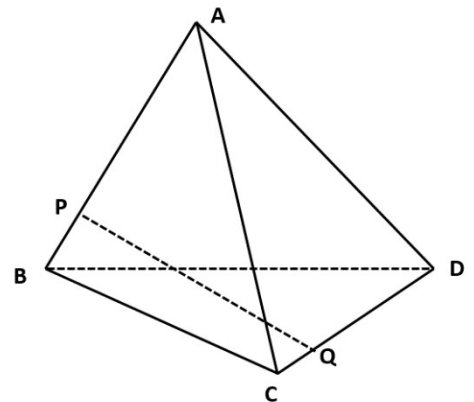
$$\begin{aligned}
\lim\left(\sqrt{9^n - 2 \cdot 3^n} - 3^n + \frac{1}{2021}\right) &= \lim(\sqrt{9^n - 2 \cdot 3^n} - 3^n) + \lim\frac{1}{2021} \\
&= \lim\frac{9^n - 2 \cdot 3^n - 9^n}{\sqrt{9^n - 2 \cdot 3^n} + 3^n} + \frac{1}{2021} \\
&= \lim\frac{-2 \cdot 3^n}{3^n\left(\sqrt{1 - \frac{2}{3^n}} + 1\right)} + \frac{1}{2021} \\
&= \lim\frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{3^n}} + 1} + \frac{1}{2021} \\
&= -1 + \frac{1}{2021}
\end{aligned}$$

Câu 2. [VD] Cho tứ diện $ABCD$, trên cạnh AB, CD lấy điểm P, Q sao cho $AP = 4PB, CD = 5CQ$.
 Chứng minh AD, BC, PQ đồng phẳng.

Lời giải

Tác giả : Nhân Trí

$$\begin{aligned}
AD &= AP + PQ + QD \quad (1) \\
BC &= BP + PQ + QC \\
\Rightarrow 4BC &= 4BP + 4PQ + 4QC \quad (2) \\
(1), (2) &\Rightarrow AD + 4BC = 5PQ \\
(\text{do } AP + 4BP &= 0; QD + 4QC = 0) \\
\Rightarrow \vec{PQ} &= \frac{1}{5}\vec{AD} + \frac{4}{5}\vec{BC} \\
\Rightarrow AD, BC, PQ &\text{ đồng phẳng.}
\end{aligned}$$



Câu 3a. [VD] Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3} - \sqrt[3]{6x-5}}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

Lời giải

FB tác giả: Duong Hoang Tu

Phản biện lại: Phạm Ngọc Châu

Yêu cầu cần đạt: Nắm vững kỹ thuật tính giới hạn hàm số cùng với kỹ năng biến đổi.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3} - \sqrt[3]{6x-5}}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3} - \sqrt[3]{6x-5}}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Ta có

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3} - \sqrt[3]{6x-5}}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4t+1} - \sqrt[3]{6t+1}}{t^2(t+2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4t+1} - (2t+1)}{t^2(t+2)} - \frac{\sqrt[3]{6t+1} - (2t+1)}{t^2(t+2)} \right).$$

$$* \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4t+1} - (2t+1)}{t^2(t+2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-4}{(t+2) \left[\sqrt{4t+1} + (2t+1) \right]} = -1.$$

$$* \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{6t+1} - (2t+1)}{t^2(t+2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-8t-12}{(t+2) \left[\sqrt[3]{(6t+1)^2} + (2t+1)\sqrt[3]{6t+1} + (2t+1)^2 \right]} = -2.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3} - \sqrt[3]{6x-5}}{x^3 - x^2 - x + 1} = -1 + 2 = 1.$$

Câu 3b. [VDC]

1. Cho phương trình: $x^3 \cos^3 x + m(x \cos x - 1)(x \cos x + 2) = 0$.

Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

Lời giải

FB tác giả: Giang Lê Văn

Phản biện lại: Phạm Ngọc Châu

Yêu cầu cần đạt: Nắm vững được tính chất liên tục của hàm số để chứng minh phương có nghiệm.

* Xét $f(x) = x \cos x - 1$ có tập xác định là \mathbb{R} và liên tục trên \mathbb{R} .

Có $f(0) = -1 < 0$ và $f(-\pi) = \pi - 1 > 0$.

Vậy $\exists x_1 \in (-\pi; 0): f(x_1) = 0$. Tức là $x_1 \cos x_1 = 1$

* Xét $g(x) = x \cos x + 2$ có tập xác định là \mathbb{R} và liên tục trên \mathbb{R} .

Có $g(0) = 2 > 0$ và $g(\pi) = -\pi + 2 < 0$.

Vậy $\exists x_2 \in (0; \pi): g(x_2) = 0$. Tức là $x_2 \cos x_2 = -2$

* Xét $F(x) = x^3 \cos^3 x + m(x \cos x - 1)(x \cos x + 2)$ có tập xác định là \mathbb{R} và liên tục trên \mathbb{R} .

Có $F(x_1) = 1^3 + m \cdot 0 = 1 > 0$ và $F(x_2) = (-2)^3 + 0m = -8 < 0$ nên $\exists x_0 \in (x_1; x_2): F(x_0) = 0$.

Vậy phương trình $F(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị m .

2. Cho phương trình: $(m^2 - m + 2021)x^3 - (2m^2 - 2m + 4040)x^2 - 4x + m^2 - m + 2021 = 0$.

Chứng minh phương trình có 3 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của tham số m .

Lời giải

FB tác giả: Giang Lê Văn

Phản biện lại: Phạm Ngọc Châu

Yêu cầu cần đạt: Vận dụng được định lí giá trị trung gian và kết hợp với tính năng bảng giá trị của máy tính Casio để tìm các khoảng mà phương trình có nghiệm.

$$f(x) = (m^2 - m + 2021)x^3 - (2m^2 - 2m + 4040)x^2 - 4x + m^2 - m + 2021$$

* Xét có tập xác

định là \mathbb{R} và liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có:

$$f(-1) = -2m^2 + 2m - 4035 = -2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{8069}{2} < 0, \forall m$$

$$f(0) = m^2 - m + 2021 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8083}{4} > 0, \forall m$$

$$f(1) = -2 < 0, \forall m$$

$$f(2) = m^2 - m + 2021 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8083}{4} > 0, \forall m$$

Do đó:

$$* f(-1) \cdot f(0) < 0 \text{ nên } \exists x_1 \in (-1; 0): f(x_1) = 0$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1; 0)$

$$* f(0) \cdot f(1) < 0 \text{ nên } \exists x_2 \in (0; 1): f(x_2) = 0$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$

$$* f(1) \cdot f(2) < 0 \text{ nên } \exists x_3 \in (1; 2): f(x_3) = 0$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(1; 2)$

Vì ba khoảng $(-1; 0)$, $(0; 1)$ và $(1; 2)$ rời nhau đôi một nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất ba nghiệm trên \mathbb{R} .

Mặt khác, vì $m^2 - m + 2021 > 0, \forall m$ nên $f(x)$ là một đa thức bậc ba nên phương trình $f(x) = 0$ chỉ có tối đa ba nghiệm trên \mathbb{R} .

Kết luận: Phương trình $f(x) = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt với mọi giá trị của tham số m .

-----Hết-----