**CHƯƠNG**

**VIII**

**ĐẠI SỐ TỔ HỢP**

BÀI 1: QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

**LÝ THUYẾT.**

**I ===I**

**1. Quy tắc cộng và sơ đồ hình cây**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Quy tắc cộng   |  |  | | --- | --- | | Giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo một trong hai phương án khác nhau:  - Phương án 1 có  cách thực hiện.  - Phương án 2 có  cách thực hiện.  Khi đó số cách thực hiện công việc là :  cách | Phương án 1..  cách  Phương án 2 ..  cách | |

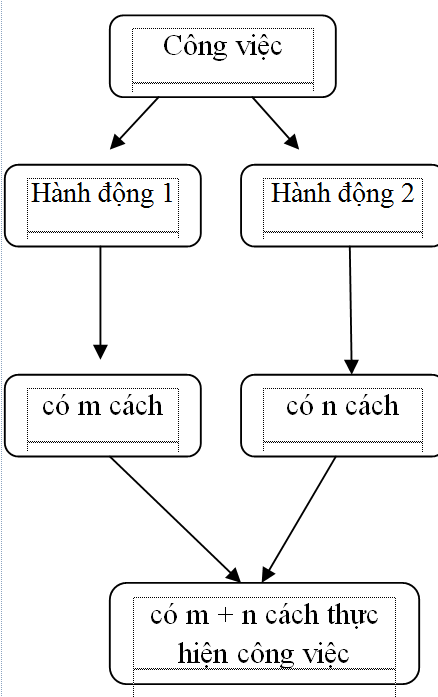
Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiên, hành động kia có n cách thực hiên không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

**Chú ý**: số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là  hoặc .

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau: Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì 

**Mở rộng:** Một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động

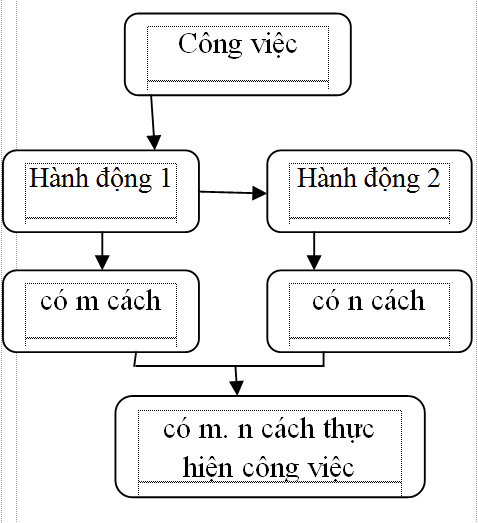
.Nếu hành động A1 có m1cách thực hiện, hành động A2 có m2 cách thực hiện,…, hành động Ak có mk cách thực hiện và các cách thực hiên của các hành động trên không trùng nhau thì công việc đó có  cách thực hiện.

****

**2. Quy tắc nhân**

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp.Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có m.n cách thực hiện.

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi k hành độngliên tiếp. Nếu hành động A1 có m1cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện hành động A1 có m2 cách thực hiện hành động A2,…, có mk cách thực hiện hành động Ak thì công việc đó có  cách hoàn thành.

****

***NHẬN XÉT CHUNG:***

***Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước như sau:***

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành một trong các phương án A1, A2,...,An).

Bước 2: Đếm số cách chọn  trong các phương án .

Bước 3: Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là: .

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi tất cả các công đoạn hoàn thành).

Bước 2: Đếm số cách chọn  trong các công đoạn .

Bước 3: Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là: .

***Cách đếm gián tiếp (đếm phần bù)***

Trong trường hợp hành động  chia nhiều trường hợp thì ta đi đếm phần bù của bài toán như sau:

 Đếm số phương án thực hiện hành động  (không cần quan tâm đến có thỏa tính chất  hay không) ta được phương án.

 Đếm số phương án thực hiện hành động  không thỏa tính chất  ta được  phương án.

Khi đó số phương án thỏa yêu cầu bài toán là: .

**BÀI TẬP.**

**Câu 1.** Trên giá sách có 8 cuốn truyện ngắn, 7 cuốn tiểu thuyết và 5 tập thơ (tất cả đều khác nhau). Vẽ sơ đồ hình cây minh họa và cho biết bạn Phong có bao nhiêu cách chọn một cuốn để đọc vào ngày cuối tuần.

**Lời giải**

Truyện ngắn …… 8 cuốn

Tiểu thuyết ………7 cuốn

Thơ ……….5 tập

Để chọn một cuốn sách đọc vào ngày cuối tuần, bạn Phong thực hiện 1 trong 3 sự lựa chọn sau:

Chọn một cuốn truyện ngắn : Có  cách.

Chọn một cuốn tiểu thuyết : Có  cách.

Chọn một tập thơ : Có  cách.

Theo quy tắc cộng thì bạn Phong có :  cách.

**Câu 2.** Một người gieo đồng xu hai mặt, sau mỗi lần gieo thì ghi lại kết quả sấp hay ngửa. Hỏi nếu người đó gieo ba lần thì có thể có bao nhiêu khả năng xảy ra?

**Lời giải**

Lần gieo thứ nhất: Có khả năng xảy ra.

Lần gieo thứ hai: Có khả năng xảy ra.

Lần gieo thứ ba: Có khả năng xảy ra.

Nếu người đó gieo ba lần thì số khả năng xảy ra là: .

**Câu 3.** Ở một loài thực vật, A là gen trội quy định tình trạng hoa kép, a là gen lặn quy định tình trạng hoa đơn.

1. Sự tổ hợp giữa hai gen trên tạo ra mấy kiểu gen?
2. Khi giao phối ngẫu nhiên, có bao nhiêu kiểu giao phối khác nhau từ các kiểu gen đó?

**Lời giải**

1. Sự tổ hợp gen A và gen a thành các kiểu gen là: AA, Aa, aa.

Vậy có 3 kiểu gen.

1. Khi giao phối ngẫu nhiên thì có các kiểu giao phối:













Vậy có 6 kiểu giao phối khác nhau.

**Câu 4.** Có bao nhiêu số tự nhiên

1. có ba chữ số khác nhau?
2. là số lẻ có ba chữ số khác nhau?
3. là số có ba chữ số và chia hết cho 5?
4. là số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

**Lời giải**

1. Gọi số tự nhiên cần tìm là  với  là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau, .

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Như vậy có  số tự nhiên có ba chữ số khác nhau.

1. Gọi số tự nhiên cần tìm là  với là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau,  và  lẻ.

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Như vậy có  số tự nhiên lẻ có ba chữ số khác nhau.

1. Gọi số tự nhiên cần tìm là  với  là các chữ số tự nhiên  và  .

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Như vậy có  số tự nhiên có ba chữ số và chia hết cho.

1. Gọi số tự nhiên cần tìm là  với  là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau  và  .

Trường hợp 1: 

Chọn : Có  cách.

Chọn : Có  cách.

Chọn : Có  cách.

Như vậy có  số thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 2: 

Chọn : Có  cách.

Chọn : Có  cách.

Chọn : Có  cách.

Như vậy có  số thỏa mãn bài toán.

Vậy có  số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

**Câu 5.** a) Mật khẩu của chương trình máy tính quy định gồm 3 kí tự, mỗi kí tự là một chữ số. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

b) Nếu chương trình máy tính quy định mới mật khẩu vẫn gồm 3 kí tự, nhưng kí tự đầu tiên phải là một chữ cái in hoa trong bảng chữ cái tiếng Anh gồm 26 chữ (từ A đến Z) và 2 kí tự sau là các chữ số (từ 0 đến 9). Hỏi quy định mới có thể tạo được nhiều hơn quy định cũ bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

**Lời giải**

1. Giả sử mật khẩu của máy tính gồm  ký tự, mỗi ký tự là một chữ số.

Chọn ký tự đầu tiên: Có  cách chọn.

Chọn ký tự thứ hai: Có  cách chọn.

Chọn ký tự thứ ba: Có  cách chọn.

Vậy có thể tạo được  mật khẩu khác nhau thỏa mãn bài toán.

1. Giả sử mật khẩu mới của máy tính gồm  ký tự , ký tự đầu là một chữ cái in hoa, 2 ký tự sau là một chữ số.

Chọn ký tự đầu tiên là một chữ cái in hoa trong bảng chữ cái tiếng Anh gồm  chữ (từ A đến Z): Có  cách chọn.

Chọn ký tự thứ hai là các chữ số (từ  đến ): Có  cách chọn.

Chọn ký tự thứ ba là các chữ số (từ  đến ): Có  cách chọn.

Vậy có thể tạo được  mật khẩu khác nhau thỏa mãn bài toán.

Do đó quy định mới có thể tạo được nhiều hơn quy định cũ số mật khẩu khác nhau là:

 (mật khẩu).

**HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**II ===I**

### **DẠNG 1: QUY TẮC CỘNG**

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

Nếu một công việc nào nó **có thể thực hiện theo n hướng khác nhau**, trong đó:

Hướng thứ 1 có m1 cách thực hiện

Hướng thứ 2 có m2 cách thực hiện

…. ……….

Hướng thứ n có mn cách thực hiện

Khi đó, có:  cách để hoàn thành công việc đã cho.

**BÀI TẬP.**

**2 ===I**

**Câu 1.** Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ  hoặc cỡ  Áo cỡ  có  màu khác nhau, áo cỡ  có  màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

**Lời giải**

Nếu chọn cỡ áo  thì sẽ có  cách.

Nếu chọn cỡ áo  thì sẽ có  cách.

Theo qui tắc cộng, ta có  cách chọn mua áo.

**Câu 2.** Một người có  cái quần khác nhau,  cái áo khác nhau, chiếc cà vạt khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt?

**Lời giải**

 **Nếu** chọn một cái quần thì sẽ có  cách.

 Nếu chọn một cái áo thì sẽ có  cách.

 Nếu chọn một cái cà vạt thì sẽ có  cách.

Theo qui tắc cộng, ta có  cách chọn.

**Câu 3.** Trên bàn có  cây bút chì khác nhau,  cây bút bi khác nhau và  cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

 Nếu chọn một cây bút chì thì sẽ có  cách.

 Nếu chọn một cây bút bi thì sẽ có  cách.

 Nếu chọn một cuốn tập thì sẽ có  cách.

Theo qui tắc cộng, ta có cách chọn.

**Câu 4.** Trong một trường THPT, khối  có  học sinh nam và  học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối  đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

**Lời giải**

Nếu chọn một học sinh nam có  cách.

Nếu chọn một học sinh nữ có  cách.

Theo qui tắc cộng, ta có  cách chọn.

**DẠNG 2: QUY TẮC NHÂN**

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

Nếu một công việc nào đó phải hoàn thành qua n giai đoạn liên tiếp, trong đó:

Giai đoạn 1 có m1 cách thực hiện

Giai đoạn 2 có m2 cách thực hiện

…. ……….

Giai đoạn n có mn cách thực hiện

Khi đó, có:  cách để hoàn thành công việc đã cho.

Ta thường gặp các bài toán sau:

**Bài toán 1:** Đếm số phương án liên quan đến số tự nhiên

Khi lập một số tự nhiên  ta cần lưu ý:

\*  và .

\*  là số chẵn  là số chẵn

\*  là số lẻ  là số lẻ

\*  chia hết cho  chia hết cho 

\*  chia hết cho   chia hết cho 

\*  chia hết cho 

\*  chia hết cho 6 là số chẵn và chia hết cho 

\*  chia hết cho  chia hết cho 

\*  chia hết cho  chia hết cho .

\*  chia hết cho tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số nguyên chia hết cho .

\*  chia hết cho  hai chữ số tận cùng là .

**Bài toán 2:** Đếm số phương án liên quan đến kiến thức thực tế

**Bài toán 3:** Đếm số phương án liên quan đến hình học

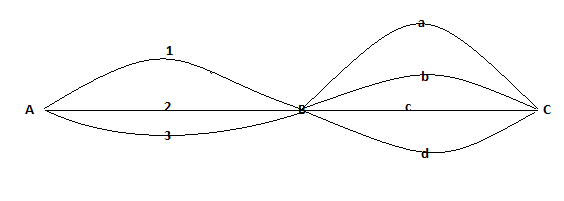
**BÀI TẬP.**

**2 ===I**

**Câu 1.** Từ thành phố  đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố B đến thành phố C có 4 con đường. Có bao nhiêu cách đi từ thành phố A đến thành phố C, biết phải đi qua thành phố

**Lời giải**

**Cách 1:** Làm bằng cách liệt kê các con đường đi:



Căn cứ vào sơ đồ trên, ta có các con đường đi là: 1a, 1b, 1c, 1d, 2a, 2b, 2c, 2d, 3a, 3b, 3c, 3d. Vậy có 12 con đường

**Cách 2:** Sử dụng quy tắc nhân

Để đi từ thành phố A đến thành phố B ta có 6 con đường để đi. Với mỗi cách đi từ thành phố A đến thành phố B ta có 4 cách đi từ thành phố B đến thành phố

Vậy có  cách đi từ thành phố A đến.

**Câu 2.** Từ các số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

**Lời giải**

**Cách 1:**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |

Giả sử số cần lập có các chữ số ở các vị trí như trên (Được đánh số từ 1 đến 6)

Nếu chữ số 2, 3 đứng ở các vị trí (1) và (2), thì các vị trí còn lại có , suy ra có  (số)

Nếu chữ số 2, 3 không đứng ở các vị trí như trên, sẽ có 8 cách sắp xếp hai chữ số này sao cho gần nhau, các vị trí còn lại có  cách sắp xếp, suy ra có (số)

Vậy có 144+48= 192 số cần lập

**Cách 2:**

Đặt , xét các số  trong đó  đôi một khác nhau và thuộc tập . Có  số như vậy

Khi ta hoán vị  trong  ta được hai số khác nhau

Nên có  số thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 3.** Có 3 học sinh nữ và 2 hs nam.Ta muốn sắp xếp vào một bàn dài có 5 ghế ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để:

**1.** 3 học sinh nữ ngồi kề nhau

**2.** 2. 2 học sinh nam ngồi kề nhau.

**Lời giải**

**Cách 1:**

1. Giả sử các vị trí ghế được đánh số như sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |

Để sắp xếp để 3 nữ cạnh nhau, ta cần sắp xếp họ ở các vị trí: . Và với mỗi cách có 3!= 6 cách sắp xếp ba nữ và 2! = 2 cách sắp xếp 2 nam. Suy ra có 3.6.2 = 36 cách

2. Giả sử các vị trí ghế được đánh số như sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |

Để sắp xếp 2 nam ngồi cạnh nhau, ta cần sắp xếp họ ở các vị trí . Và với mọi cách như vậy có 2! cách xếp các bạn nam và 3! Cách xếp các bạn nữ. Suy ra có 4.2!.3! = 48 cách

**Cách 2:**

**1.** Xem 3 bạn nữ là một “phần tử đặc biệt”. Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán: 

**2**. Xem 2 bạn nam là một “phần tử đặc biệt”. Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán: 

**Câu 4.** Xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài.Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:

**1.** A và F ngồi ở hai đầu ghế

**2.** A và F ngồi cạnh nhau

**3.** A và F không ngồi cạnh nhau

**Lời giải**

**1.** Số cách xếp A, F: 

Số cách xếp : 

Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán: 

**2.** Xem  là một phần tử , ta có:  số cách xếp

. Khi hoán vị  ta có thêm được một cách xếp

Vậy có  cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.

**3.** Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán:  cách

**Câu 5.** Có bao nhiêu chữ số chẵn gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 

**Lời giải**

Gọi .

**Cách 1:** Tính trực tiếp

Vì  là số chẵn nên .

***TH 1:***  có 1 cách chọn .

Với mỗi cách chọn  ta có 6 cách chọn 

Với mỗi cách chọn  ta có 5 cách chọn 

Với mỗi cách chọn  ta có  cách chọn 

Suy ra trong trường hợp này có  số.

***TH 2:*** có 4 cách chọn d

Với mỗi cách chọn , do  nên ta có 5 cách chọn

.

Với mỗi cách chọn  ta có 5 cách chọn 

Với mỗi cách chọn  ta có  cách chọn 

Suy ra trong trường hợp này có  số.

Vậy có tất cả  số cần lập.

**Cách 2:** Tính gián tiếp ( đếm phần bù)

Gọi {số các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số }

{số các số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số }

{ số các số tự nhiên chẵn có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số }

Ta có: .

Dễ dàng tính được: .

Ta đi tính ?

 là số lẻ  có 2 cách chọn.

Với mỗi cách chọn  ta có 5 cách chọn (vì )

Với mỗi cách chọn  ta có 5 cách chọn 

Với mỗi cách chọn  ta có 4 cách chọn 

Suy ra 

Vậy .

**Câu 6.** Từ các số  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên,mỗi số có 6 chữ số đồng thời thỏa điều kiện:sáu số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 số sau một đơn vị

**Lời giải**

**Cách 1:** Gọi  là số cần lập

Theo bài ra ta có:  (1)

Mà  và đôi một khác nhau nên

 (2)

Từ (1), (2) suy ra: 

Phương trình này có các bộ nghiệm là: 

Với mỗi bộ ta có  số.

Vậy có cả thảy  số cần lập.

**Cách 2:** Gọi  là số cần lập

Ta có: 

. Do 

Suy ra ta có các cặp sau: 

Với mỗi bộ như vậy ta có  cách chọn  và  cách chọn 

Do đó có:  số thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 7.** Bạn An có 3 cái áo và 4 cái quần. Hỏi bạn An có mấy cách chọn

a) Một cái quần hoặc một cái áo? b) Một bộ quần áo ?

***Lời giải***

a) Để chọn một cái quần hoặc một cái áo ta có hai phương án lựa chọn

Phương án A- Chọn một cái quần: Có 4 cách thực hiện.

Phương án B- Chọn một cái áo: Có 3 cách thực hiện.

Theo quy tắc cộng ta có:  cách chọn một cái quần hoặc một cái áo.

b) Để chọn một bộ quần áo, ta phải thực hiện hai công đoạn liên tiếp

Công đoạn 1- Chọn một cái quần: Có 4 cách thực hiện

Công đoạn 2- Chọn một cái áo: Có 3 cách thực hiện.

Theo quy tắc nhân ta có  cách chọn một bộ quần áo.

**Câu 8.** Cho hai đường thẳng song song . Trên  lấy  điểm phân biệt, trên  lấy  điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà đỉnh của nó được chọn từ  đỉnh nói trên?

***Lời giải***

* Trường hợp : Lấy  điểm thuộc ,  điểm thuộc :

Lấy điểm thứ nhất thuộc  có  cách, lấy điểm thứ hai thuộc có  cách

Lấy điểm thuộc  có cách.

Vì sự thay đổi các đỉnh trong tam giác không tạo thành một tam giác mới nên hai đỉnh lấy trên  nếu đổi thứ tự lấy không tạo thành tam giác mới.

Do đó có  tam giác

* Trường hợp : Lấy  điểm thuộc ,  điểm thuộc :

Lấy điểm thứ nhất thuộc  có  cách, lấy điểm thứ hai thuộc có  cách

Lấy điểm thuộc  có  cách.

Vì sự thay đổi các đỉnh trong tam giác không tạo thành một tam giác mới nên hai đỉnh lấy trên  nếu đổi thứ tự lấy không tạo thành tam giác mới.

Do đó có  tam giác

Vậy có  tam giác.