

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tính thể tích khối tròn xoay

Câu 1. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục hoành:

a) $y = \cos \frac{x}{2}, y = 0, x = 0, x = \pi$;

b) $y = x^2 - 2x, y = 0, x = 0, x = 2$.

Lời giải

a) Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành là:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{\pi}{2} (x + \sin x) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \text{ (dvtt)}.$$

b) Thể tích khối tròn xoay tạo thành là:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15} \text{ (dvtt)}.$$

Câu 2. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng đó quay quanh trục Ox .

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$, quay quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_1^2 x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \pi \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7\pi}{3}.$$

Câu 3. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox :

a) $y = 2\sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4$.

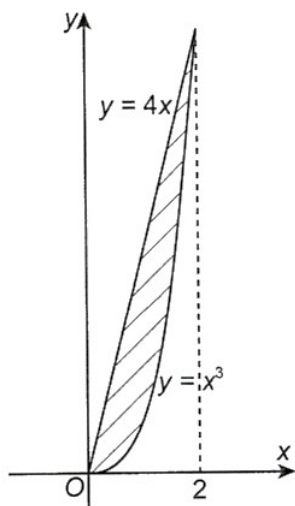
b) $y = 4x, y = x^3, x = 0, x = 2$.

Lời giải

a) Thể tích cần tính là

$$V = \pi \int_1^4 (2\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 4x dx = \pi 2x^2 \Big|_1^4 = 30\pi$$

b)



Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = 4x$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = x^3$ so với trục hoành, với $x \in [0; 2]$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = 4x, y = 0, x = 0, x = 2$ quanh trục Ox là
$$V_1 = \pi \int_0^2 (4x)^2 dx = \pi \int_0^2 16x^2 dx = \frac{128\pi}{3}$$

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = x^3, y = 0, x = 0, x = 2$ quanh trục Ox là
$$V_2 = \pi \int_0^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^2 x^6 dx = \frac{128\pi}{7}$$

Thể tích cần tính là
$$V = V_1 - V_2 = \frac{512\pi}{21}$$

Câu 4. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D , giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$ quanh trục hoành là

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi$$

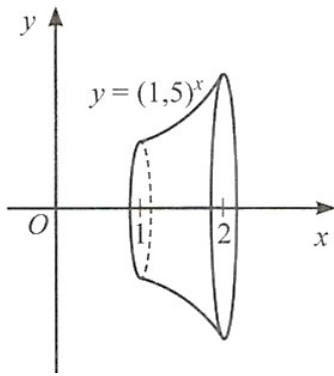
Vậy thể tích khối tròn xoay là
$$V = \frac{4}{3}\pi.$$

Câu 5. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $y = x^2 - 3x + 2$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1; x = 2$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là
$$V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx = \frac{\pi}{30} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 6. Cho đồ thị hàm số $y = (1,5)^x$ và khối tròn xoay như Hình.



a) Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như Hình?

b) Tính thể tích khối tròn xoay đó.

Giải

a) Hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (1,5)^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=1, x=2$.

b) Thể tích khối tròn xoay đó là:

$$V = \pi \int_1^2 [(1,5)^x]^2 dx = \pi \int_1^2 [(1,5)^2]^x dx = \frac{1,5^{2x} \pi}{2 \ln(1,5)} \Big|_1^2 = \frac{45\pi}{32 \ln(1,5)}.$$

Câu 7. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng đó quay quanh trục Ox .

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay đó là:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{\pi(x + \sin x)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 + 2\pi}{4}.$$

Câu 8. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

a) Tính diện tích S của hình phẳng H .

b) Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox .

Lời giải

a)
$$S = \int_1^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^2 = \frac{2}{\ln 2}.$$

$$b) \quad V = \pi \int_1^2 (2^x)^2 dx = \pi \int_1^2 4^x dx = \frac{4^x \pi}{2 \ln 2} \Big|_1^2 = \frac{12\pi}{2 \ln 2} = \frac{6\pi}{\ln 2}.$$

Câu 9. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2 - 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

a) Tính diện tích S của hình phẳng H .

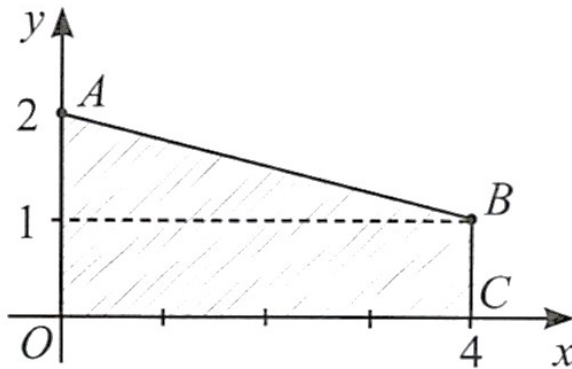
b) Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox .

Lời giải

$$a) \quad S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$b) \quad V = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $OABC$ có $A(0;2), B(4;1)$ và $C(4;0)$ như Hình.



Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $OABC$ quanh trục Ox .

Lời giải

Phương trình đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$ (1). Thay tọa độ của điểm A và B vào (1), ta

$$\text{được hệ phương trình } \begin{cases} b = 2 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 2. \end{cases}$$

Suy ra AB có phương trình: $y = -\frac{1}{4}x + 2$. Vậy tứ giác $OABC$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

của hàm số $y = -\frac{1}{4}x + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$. Do đó, thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x + 2 \right)^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{16} - x + 4 \right) dx = \pi \left(\frac{x^3}{48} - \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_0^4 = \frac{28\pi}{3}.$$

Câu 11. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

a) Tính diện tích của D .

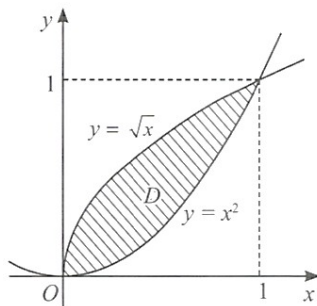
b) Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .

Lời giải

$$\text{a)} \quad S = \int_{-1}^1 |2x^3| dx = -2 \int_{-1}^0 x^3 dx + 2 \int_0^1 x^3 dx = -\frac{x^4}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^4}{2} \Big|_0^1 = 1$$

$$\text{b)} \quad V = \pi \int_{-1}^1 (2x^3)^2 dx = 4\pi \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_{-1}^1 = \frac{8\pi}{7}$$

Câu 12. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$ (Hình).



a) Tính diện tích của D .

b) Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .

Lời giải

$$\text{a)} \quad S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{b)} \quad V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$

Câu 13. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 1 + x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$ quanh trục Ox .

Lời giải

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 + x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 + 2x^2 + x^4) dx = \frac{56\pi}{15}$$

Câu 14. (Mã 110 2017) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:
$$V = \pi \int_0^{\pi} (\sqrt{2 + \sin x})^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (2 + \sin x) dx = \pi (2x - \cos x) \Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi + 1)$$

Câu 15. (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng

(H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox

Lời giải

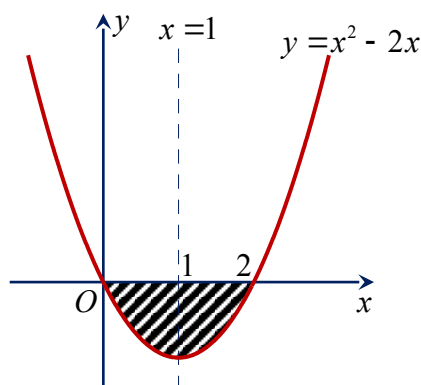
Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$$V = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + x^4 \right) dx = \frac{81\pi}{35}$$

Câu 16. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Lời giải

Theo đề, ta có hình vẽ sau:



Nhận xét: Khi nhìn vào hình vẽ. Đường thẳng $x = 1$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường $y = x^2 - 2x$ và trục hoành làm 2 phần. Để thấy lúc này hình phẳng (H) không thể xác định vì phần hình giới hạn bởi $x = 0$ đến $x = 1$ và $x = 1$ đến $x = 2$ chưa rõ ràng.

Nếu xét phần tròn xoay khi xoay hình phẳng quanh trục Ox khi $x = 0$ đến $x = 2$ thì không có đáp án trong bài, đồng thời đề cho thêm đường thẳng $x = 1$ là không cần thiết.

Do đó để bài toán có đáp án và rõ ràng hơn ta điều chỉnh đề như sau:

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Hình phẳng (H) giới hạn bởi
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases}$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 - 2x$ và $y = 0$ (trục hoành) là:

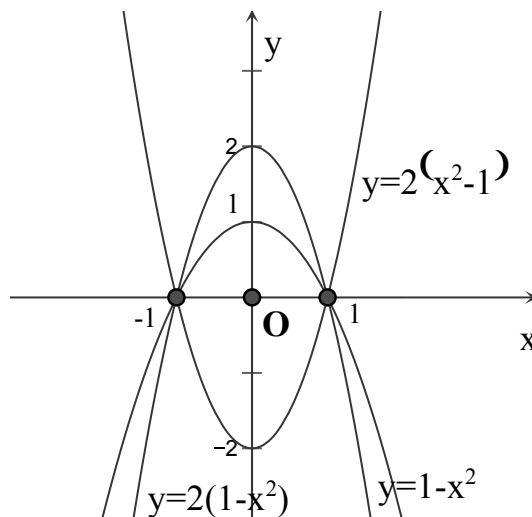
$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Khi đó thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là:

$$V_{Ox} = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 17. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2 - 1)$; $y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox .

Lời giải



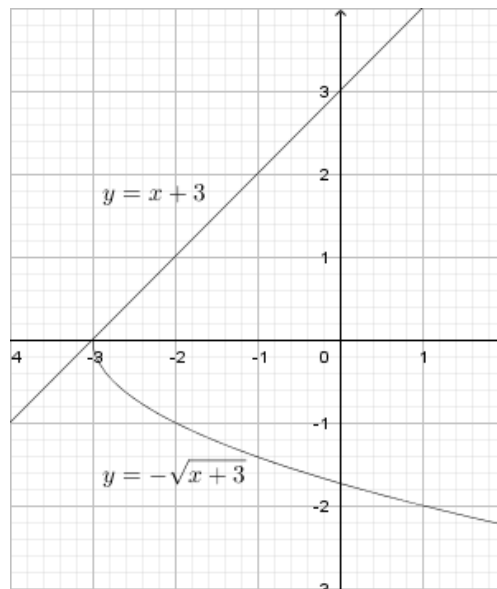
Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ và $y = 1 - x^2$ là $2(x^2 - 1) = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y = 2(1 - x^2)$.

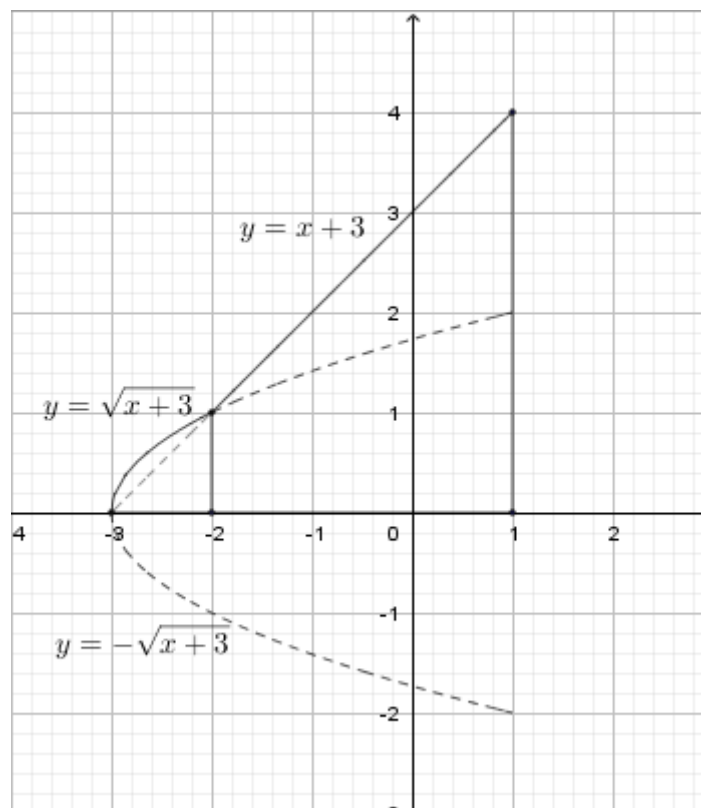
Ta có $2(1 - x^2) \geq 1 - x^2, \forall x \in [-1; 1]$. Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_{-1}^1 [2(1 - x^2)]^2 dx = \frac{64\pi}{15}.$$

Câu 18. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 3$, $y = -\sqrt{x+3}$, $x = 1$ xoay quanh trục Ox .



Lời giải



$$x + 3 = -\sqrt{x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 3} = 0 \\ \sqrt{x + 3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$$

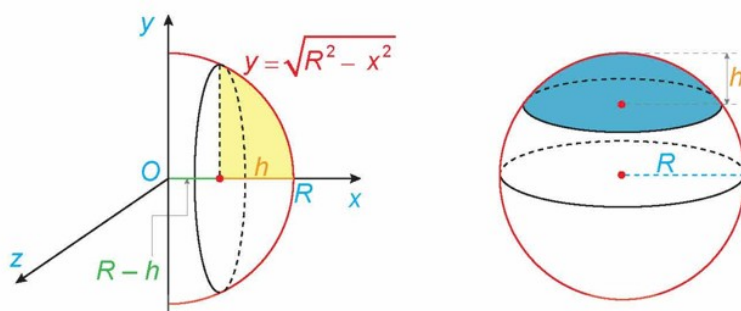
Xét phương trình

Xét hình (H) giới bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x + 3}$ ($-3 \leq x \leq -2$), $y = x + 3$ ($-2 \leq x \leq 1$), $y = 0$ và $x = 1$.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm chính bằng thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay quanh hình (H) quanh trục Ox . Do đó

$$V = \pi \int_{-3}^{-2} [\sqrt{x + 3}]^2 dx + \pi \int_{-2}^1 (x + 3)^2 dx = \frac{43\pi}{2}$$

Câu 19. Khối chòm cầu có bán kính R và chiều cao $h(0 < h \leq R)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = R - h, x = R$ xung quanh trục Ox . Tính thể tích của khối chòm cầu này.

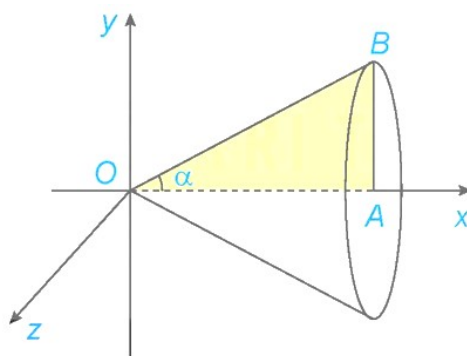


Lời giải

Thể tích khối chòm cầu là

$$V = \pi \int_{R-h}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{R-h}^R = \pi \left(Rh^2 - \frac{h^3}{3} \right).$$

Câu 20. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên trục Ox và $\angle AOB = \alpha \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \right)$. Gọi B là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox .



a) Tính thể tích V của B theo a và α .

b) Tìm α sao cho thể tích V lớn nhất.

Lời giải

a) Đường thẳng OB đi qua điểm O và điểm $B(a; a \tan \alpha)$, có phương trình là $y = x \tan \alpha$.

Thể tích của khối nón sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^a (x \tan \alpha)^2 dx = \pi \int_0^a x^2 \tan^2 \alpha dx = \pi \tan^2 \alpha \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{3} \pi a^3 \tan^2 \alpha$$

b) Xét hàm số $V(\alpha) = \frac{1}{3} \pi a^3 \tan^2 \alpha$, với $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

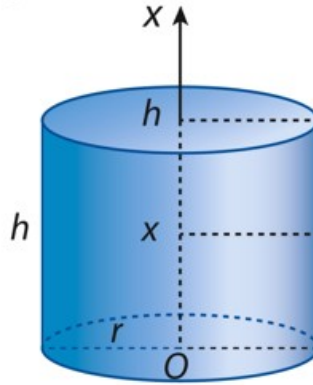
Ta có $V'(\alpha) = \frac{2}{3} \pi a^3 \tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} > 0, \forall \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right]$. Do đó hàm số V đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4} \right]$.

Vậy giá trị lớn nhất của V là $\max_{\left(0; \frac{\pi}{4}\right)} V = \frac{1}{3} \pi a^3$, đạt được khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Câu 21. Hãy sử dụng tích phân để chứng minh công thức tính thể tích khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy bằng r (khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ kể cả hình trụ đó).

Lời giải

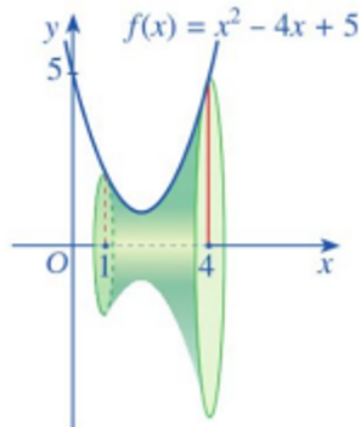
Chọn trục Ox trùng với trục của khối trụ, hai đáy nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x=0$ và $x=h$ (Hình).



Khi cắt khối trụ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x(0 \leq x \leq h)$ thì phần chung giữa mặt phẳng và khối trụ là một hình tròn bán kính r có diện tích $S(x) = \pi r^2$. Thể tích khối trụ là:

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \pi r^2 dx = (\pi r^2 x) \Big|_0^h = \pi r^2 h \text{ (đvtt)}.$$

Câu 22. Cho khối tròn xoay như Hình.



- Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như Hình?
- Tính thể tích khối tròn xoay đó.

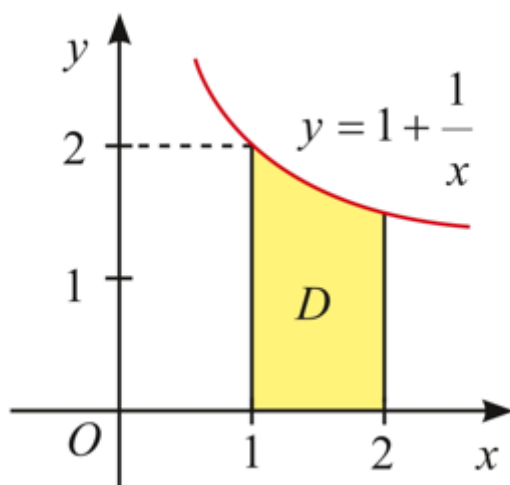
Lời giải

- Hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$, trục Ox , hai đường thẳng $x=1$ và $x=4$ để khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như Hình

$$V = \pi \int_1^4 f^2(x) dx = \pi \int_1^4 (x^2 - 4x + 5)^2 dx = \frac{78}{5}$$

b) Thể tích khối tròn xoay đó là:

Câu 23. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .

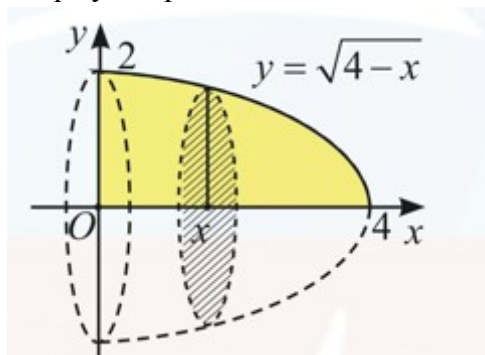


Lời giải

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \pi \left(x + 2 \ln |x| - \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 = \pi \left(\frac{3}{2} + 2 \ln 2\right)$$

Câu 24. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4-x}$ ($x \leq 4$), trục tung và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .



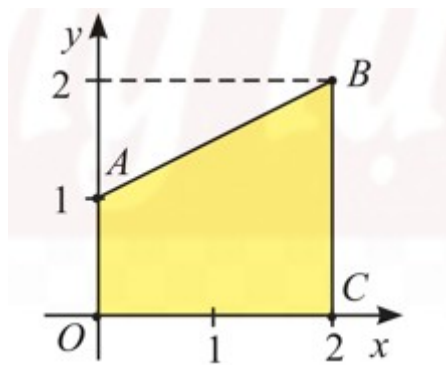
Lời giải

Ta nhận thấy rằng hình phẳng D được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4-x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ (trục tung), $x = 4$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{4-x})^2 dx = \pi \int_0^4 (4-x) dx = \pi \left(4x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^4 = 8\pi$$

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $OABC$ có $A(0;1)$, $B(2;2)$ và $C(2;0)$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang $OABC$ quanh trục Ox .



Lời giải

Hình thang $OABC$ được giới hạn bởi các đường thẳng AB, OC (trục hoành), OA (trục tung, $x=0$) và $BC(x=2)$. Phương trình đường thẳng AB là $y=f(x)=ax+b$. Do $A(0;1), B(2;2)$

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 1 \\ a \cdot 2 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

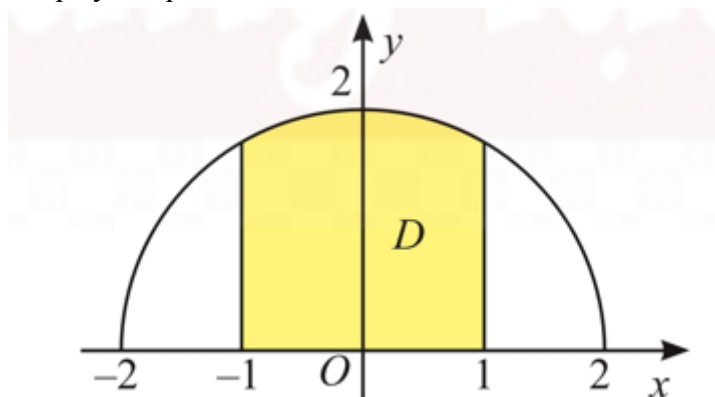
nên ta có hệ phương trình

Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = \frac{1}{2}x + 1$

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $OABC$ quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1 \right) dx = \pi \left(\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{14\pi}{3}$$

Câu 26. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ nửa đường tròn tâm O , bán kính $r=2$ nằm phía trên trục Ox . Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn, trục Ox và hai đường thẳng $x=-1, x=1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .



Lời giải

Phương trình đường tròn tâm O , bán kính $r=2$ là $x^2 + y^2 = 2^2 = 4$.

Do nửa đường tròn nằm phía trên trục Ox , nên ta có $y \geq 0$. Suy ra phương trình nửa đường tròn là $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Hình phẳng D được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1, x = 1$. Do đó, thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{4 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx = \pi \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \pi \left(\frac{11}{3} - \frac{-11}{3} \right) = \frac{22\pi}{3}$$

Dạng 2. Ứng dụng toán thực tế

Câu 27. Nghệ thuật làm gốm có lịch sử phát triển lâu đời và vẫn còn tồn tại cho đến ngày nay. Giả sử một bình gốm có mặt trong của bình là một mặt tròn xoay sinh ra khi cho phần đồ thị của hàm số

$y = \frac{1}{175}x^2 + \frac{3}{35}x + 5 (0 \leq x \leq 30)$ tính theo cm quay tròn quanh trục Ox trùng với trục hoành Ox . Hỏi để hoàn thành bình gốm đó ta cần sử dụng bao nhiêu cm^3 đất sét, biết rằng bình gốm đó có độ dày không đổi là $1cm$.

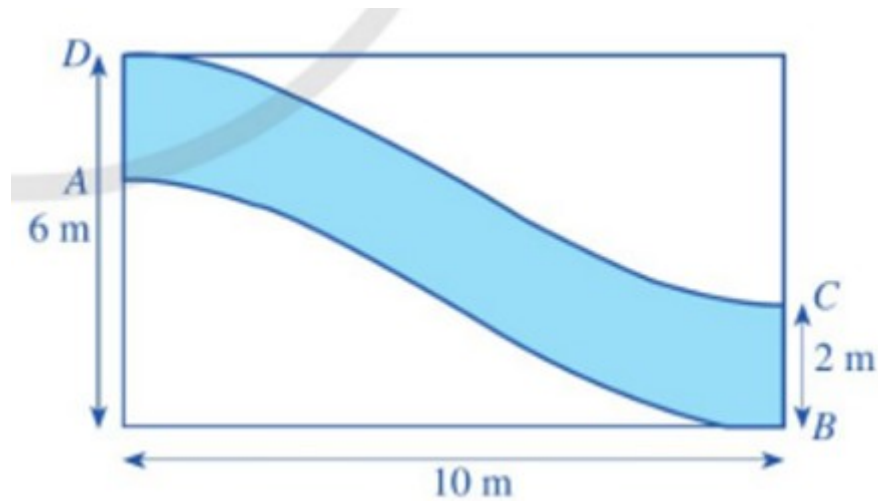
Lời giải

Mặt trong bình gốm sinh ra khi quay đồ thị $y = \frac{1}{175}x^2 + \frac{3}{35}x + 5, 0 \leq x \leq 30$ xung quanh trục Ox . Do bề dày bình gốm luôn là $1cm$ nên mặt ngoài bình gốm là một mặt tròn xoay sinh ra khi quay đồ thị $y = \frac{1}{175}x^2 + \frac{3}{35}x + 6, 0 \leq x \leq 30$ xung quanh trục Ox .

Số centimet khối đất sét cần sử dụng là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{30} \left(\frac{1}{175}x^2 + \frac{3}{35}x + 6 \right)^2 dx - \pi \int_0^{30} \left(\frac{1}{175}x^2 + \frac{3}{35}x + 5 \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{30} \left(\frac{2}{175}x^2 + \frac{6}{35}x + 11 \right) dx \\ &= \pi \left(\frac{2}{3 \cdot 175}x^3 + \frac{6}{35}x^2 + 11x \right) \Big|_0^{30} \\ &= \pi \left(\frac{2}{3 \cdot 175} \cdot 30^3 + \frac{6}{35} \cdot 30^2 + 11 \cdot 30 \right) = 510\pi (cm^3) \end{aligned}$$

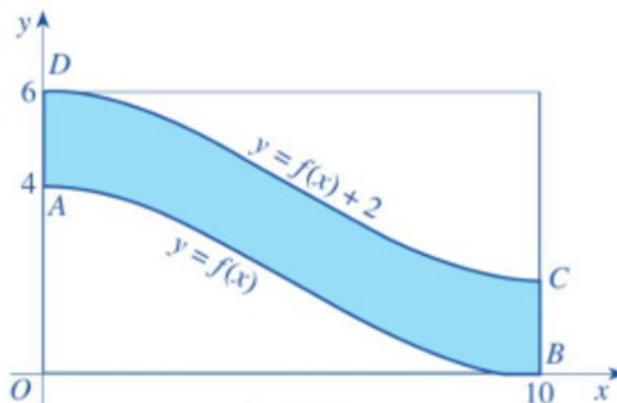
Câu 28. Cô Hạnh đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong Hình. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên $2m$.



Ngoài ra, cô Hạnh quyết định đổ lớp bê tông dày 15 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1080000 đồng. Tính số tiền cô Hạnh cần dùng để đổ bê tông con đường đó.

Lời giải

Xét hệ trục tọa độ Oxy như Hình (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).



Trong hệ trục tọa độ đó, đường cong AB được cho bởi đồ thị của hàm số liên tục $y = f(x), 0 \leq x \leq 10$. Suy ra, đường cong DC được cho bởi đồ thị của hàm số liên tục $y = f(x) + 2, 0 \leq x \leq 10$. Áp dụng công thức tính diện tích, ta có:

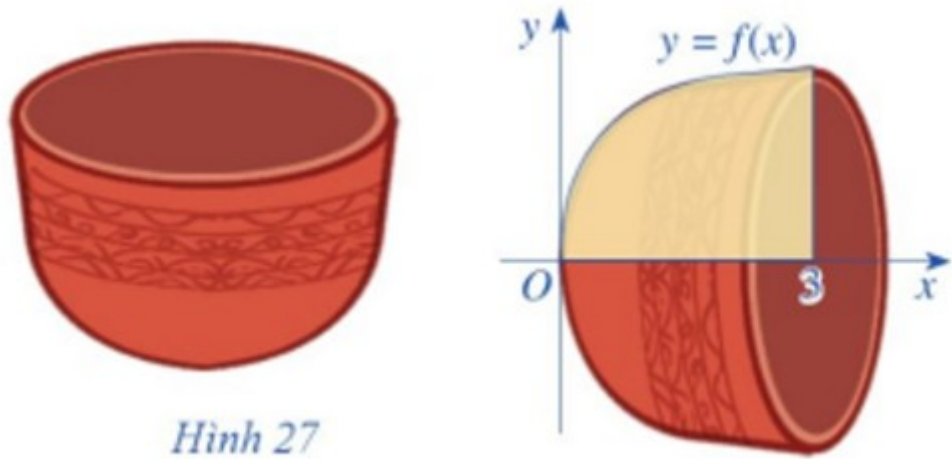
$$S = \int_0^{10} [f(x) + 2 - f(x)] dx = \int_0^{10} 2 dx = 2x \Big|_0^{10} = 20\text{ m}^2$$

Do đó, thể tích khối bê tông dùng để đổ con đường là: $20 \cdot 0,15 = 3(\text{m}^3)$.

Vậy số tiền cô Hạnh cần dùng để đổ bê tông con đường đó là:

$$1080000 \cdot 3 = 3240000 (\text{đồng})$$

Câu 29. Xét chiếc chén trong bộ ấm chén uống trà ở phần mở đầu, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = 0,14x^3 - 0,87x^2 + 1,92x + 0,85$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimét).



Hình 27

Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến hàng đơn vị của centimet khối).

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$f(x) = 0,14x^3 - 0,87x^2 + 1,92x + 0,85$ trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=3$ quay quanh trục Ox là:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 (0,14x^3 - 0,87x^2 + 1,92x + 0,85)^2 dx \\ &= \pi \int_0^3 (0,0196x^6 - 0,2436x^5 + 1,2945x^4 - 3,1028x^3 + 2,2074x^2 + 3,264x + 0,7225) dx \\ &= \pi (0,0028x^7 - 0,0406x^6 + 0,2589x^5 - 0,7757x^4 + 0,7358x^3 + 1,632x^2 + 0,7225x) \Big|_0^3 \\ &= 13,3293\pi \approx 42 (cm^3). \end{aligned}$$

Vậy thể tích của chiếc chén khoảng $42 cm^3$.

Câu 30. Sau khi đo kích thước của thùng rượu vang (Hình), bạn Quân xác định thùng rượu vang có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số



$y = -0,011x^2 - 0,071x + 40$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -35, x = 35$ quay quanh trục Ox .
 Tính thể tích thùng rượu vang đó, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimét.

Lời giải

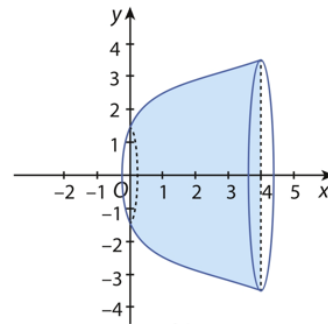
Thể tích thùng rượu đang đó là:

$$V = \pi \int_{-35}^{35} (-0,011x^2 - 0,071x + 40)^2 dx = \pi \left(-\frac{11x^3}{3000} - \frac{71x^2}{2000} + 40x \right) \Bigg|_{-35}^{35} \approx 7808,69 \text{ cm}^3$$

Câu 31. Hình b mô phỏng phần bên trong của một chậu cây có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay một phần của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x} + \frac{3}{2}$ với $0 \leq x \leq 4$ quanh trục hoành. Tính thể tích phần bên trong (dung tích) của chậu cây, biết đơn vị trên các trục Ox, Oy là decimét.



a)



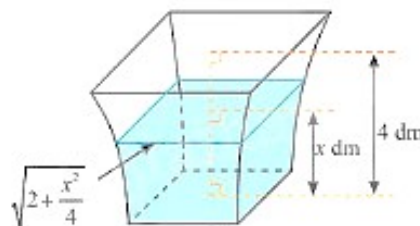
b)

Lời giải

Thể tích phần trong của chậu cây là:

$$\pi \int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{3}{2} \right)^2 dx = \pi \int_0^4 \left(x + 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{4} \right) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{4}x \right) \Bigg|_0^4 = 33\pi \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Câu 32. Một bình chứa nước có hình dạng như Hình.



Hình 11

Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao $x(\text{dm}) (0 \leq x \leq 4)$ thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2 + \frac{x^2}{4}}(\text{dm})$. Tính dung tích của bình.

Lời giải

Chọn trục Ox vuông góc với mặt đáy của bình sao cho đáy nhỏ, đáy to của bình vuông góc với Ox lần lượt tại $x = 0$ và $x = 4$

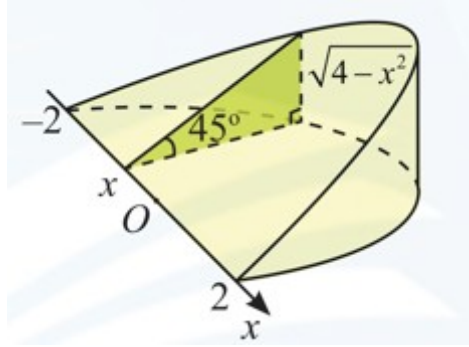
$$S(x) = \left(\sqrt{2 + \frac{x^2}{4}} \right)^2 = 2 + \frac{x^2}{4}$$

Diện tích mặt nước ở chiều cao x là

$$V = \int_0^4 S(x) dx = \int_0^4 \left(2 + \frac{x^2}{4} \right) dx = \left(2x + \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^4 = \frac{40}{3}$$

Dung tích của bình là

Câu 33. Khi cắt một vật thể hình chếc nêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-2 \leq x \leq 2$), mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-x^2}$ (dm). Tính thể tích của vật thể.



Lời giải

Vì mặt cắt là một tam giác vuông có một góc 45° , nên mặt cắt là tam giác vuông cân.

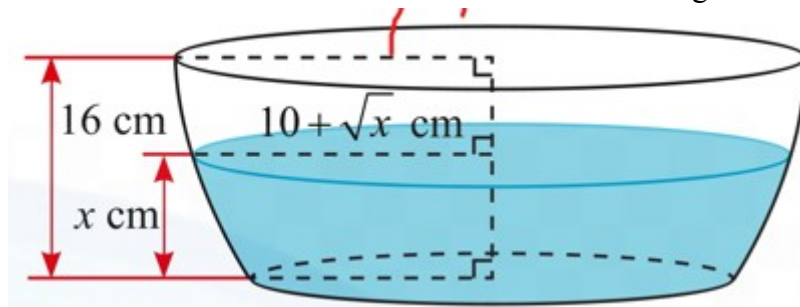
$$S(x) = \frac{(\sqrt{4-x^2})^2}{2} = \frac{4-x^2}{2}$$

Do đó diện tích mặt cắt là

Thể tích vật thể là:

$$V = \int_{-2}^2 \frac{4-x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4-x^2) dx = \frac{1}{2} \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{16}{3}$$

Câu 34. Nếu cắt chậu nước có hình dạng như Hình bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy x (cm) ($0 \leq x \leq 16$) thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $(10 + \sqrt{x})$ (cm). Tính dung tích của chậu



Lời giải

Chọn trục Ox sao cho O trùng với tâm của đáy, chiều dương của trục là chiều hướng lên trên.

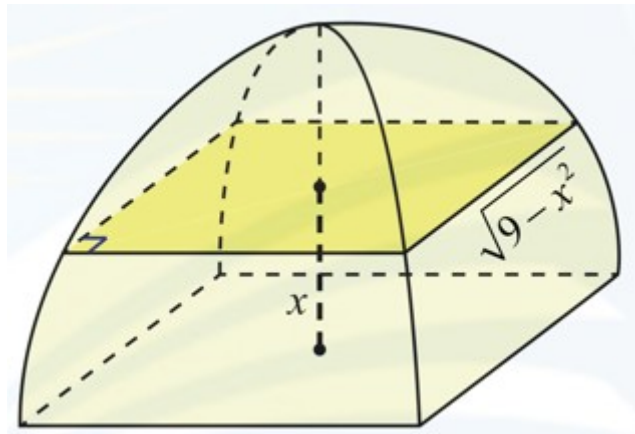
Khi cắt chậu nước bằng mặt phẳng song song với đáy và cách mặt đáy x , thì mặt phẳng đó cắt trục Ox tại điểm có hoành độ x . Mặt cắt là hình tròn có bán kính $(10 + \sqrt{x})$ (cm)

Như vậy, diện tích mặt cắt là $S(x) = \pi(10 + \sqrt{x})^2 = \pi(x + 100 + 20\sqrt{x})$.

Suy ra dung tích của chậu là

$$V = \int_0^{16} S(x) dx = \int_0^{16} \pi(x + 100 + 20\sqrt{x}) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + 100x + 20 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right) \Big|_0^{16} = \frac{7744}{3} \pi (cm^3)$$

Câu 35. Một chiếc lều mái vòm có hình dạng như Hình. Nếu cắt lều bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng $x(m) (0 \leq x \leq 3)$ thì được hình vuông có cạnh $\sqrt{9 - x^2} (m)$. Tính thể tích của lều.



Lời giải

Chọn trục Ox sao cho O trùng với tâm của đáy, chiều dương của trục là chiều hướng lên trên.

Nếu cắt lều bởi một mặt phẳng cách mặt đáy $x(m)$, thì mặt phẳng đó cắt trục Ox tại điểm có hoành độ x . Mặt cắt là hình vuông có cạnh $\sqrt{9 - x^2} (m)$.

Như vậy, diện tích mặt cắt là $S(x) = (\sqrt{9 - x^2})^2 = 9 - x^2$.

$$V = \int_0^3 S(x) dx = \int_0^3 (9 - x^2) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 18 (m^3)$$

Suy ra thể tích của lều là