

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Xác định phương trình mặt phẳng

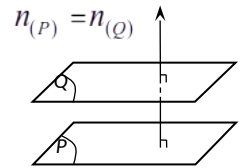
Dạng 1. Mặt

$$(P): \begin{cases} \square \text{ Qua } A(x_0; y_0; z_0) \\ \square \text{ VTPT: } n_{(P)} = (a; b; c) \end{cases} \Rightarrow (P): \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

Dạng 2. Viết phương trình (P) qua $A(x_0; y_0; z_0)$ và $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0$.

Phương pháp.

$$(P): \begin{cases} \square \text{ Qua } A(x_0; y_0; z_0) \\ \square \text{ VTPT: } n_{(P)} = n_{(Q)} = (a; b; c) \end{cases}$$

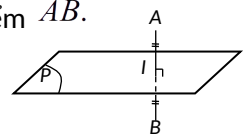


Dạng 3. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB.

Phương pháp.

$$(P): \begin{cases} \square \text{ Qua } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right) \\ \square \text{ VTPT: } n_{(P)} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

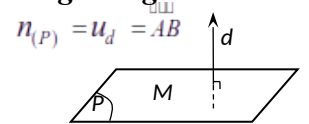
: là trung điểm AB.



Dạng 4. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với đường thẳng $d \equiv AB$.

Phương pháp.

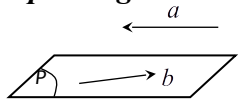
$$(P): \begin{cases} \square \text{ Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \square \text{ VTPT: } n_{(P)} = u_d = \overrightarrow{AB} \end{cases}$$



Dạng 5. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm M và có cặp vectơ chỉ phương a, b.

Phương pháp.

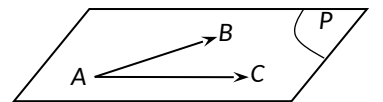
$$(P): \begin{cases} \square \text{ Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \square \text{ VTPT: } n_{(P)} = [a, b] \end{cases}$$



Dạng 6. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Phương pháp.

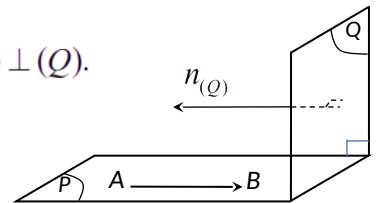
$$(P): \begin{cases} \square \text{ Qua } A, \text{ (hay B hay C)} \\ \square \text{ VTPT: } n_{(P)} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \end{cases}$$



Dạng 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và $(P) \perp (Q)$.

Phương pháp.

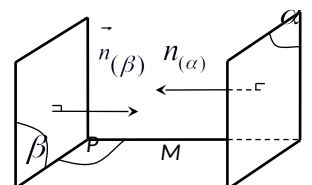
$$(P): \begin{cases} \square \text{ Qua } A, \text{ (hay B)} \\ \square \text{ VTPT: } n_{(P)} = [\overrightarrow{AB}, n_{(Q)}] \end{cases}$$



Dạng 8. Viết phương trình mp (P) qua M và vuông góc với hai mặt $(\alpha), (\beta)$.

Phương pháp.

$$(P): \begin{cases} \square \text{ Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \square \text{ VTPT: } n_{(P)} = [n_{(\alpha)}, n_{(\beta)}] \end{cases}$$



Dạng 9. Viết (P) đi qua M và giao tuyến d của hai mặt phẳng:

$$(Q): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{và} \quad (T): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Phương pháp: Khi đó mọi mặt phẳng chứa d đều có dạng:

$$(P): m(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + n(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \quad m^2 + n^2 \neq 0.$$

$\forall M \in (P) \Rightarrow$ mỗi liên hệ giữa m và n . Từ đó chọn $m \Rightarrow n$ sẽ tìm được (P) .

Dạng 10. Viết phương trình mặt phẳng đoạn chắn

Phương pháp: Nếu mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$,

$B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $(abc \neq 0)$ thì $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ gọi là mặt phẳng đoạn chắn.

Câu 1. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ đồng thời vuông góc với giá của vectơ $a = (1; -1; 2)$

Lời giải

(P) có dạng: $1.(x-3) - 1.(y+1) + 2.(z-4) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 12 = 0$.

Câu 2. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC

Lời giải

Do mặt phẳng vuông góc với BC nên $\overrightarrow{BC} = (1; -2; -5)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng.

Vì vậy phương trình mặt phẳng là: $1(x-2) - 2(y-1) - 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5z - 5 = 0$.

Câu 3. (Sở Bắc Giang 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(2;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là:

$$(x-1) - (y-1) - (z-2) = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 2 = 0.$$

Câu 4. (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-1;2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 2 = 0$

Lời giải

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-1;2)$ và song song với mặt phẳng (P) .

Do $(Q) \parallel (P)$ nên phương trình của (Q) có dạng $2x - y + 3z + d = 0$ ($d \neq 2$).

Do $A(2;-1;2) \in (Q)$ nên $2.2 - (-1) + 3.2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -11$ (nhận).

Vậy $(Q): 2x - y + 3z - 11 = 0$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng qua điểm $A(-1; 1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z - 1 = 0$

Lời giải

Có (P) song song $(\alpha): 2x - 2y + z - 1 = 0$ nên $(P): 2x - 2y + z + m = 0$, với $m \neq -1$.

Do (P) đi qua điểm $A(-1; 1; 2)$ nên $-2 - 2 + 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (nhận)

Vậy mặt phẳng cần tìm là $(P): 2x - 2y + z + 2 = 0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 4z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P)

Lời giải

Do mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2; 4)$.

Phương trình mặt phẳng $(Q): 3(x - 2) - 2(y + 1) + 4(z + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 2y + 4z + 4 = 0$.

Câu 7. (SGD Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(0; -1; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 0; 3)$

Lời giải

Vì $A \in Oy, B \in Ox, C \in Oz$ nên phương trình mặt phẳng (α) là $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$.

Câu 8. (Lômônôxốp - Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0)$, $N(0; 2; 0)$, $P(0; 0; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (MNP)

Lời giải

Mặt phẳng (MNP) có phương trình là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Câu 9. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 0; 7)$ và $C(0; 3; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 0; 7)$ và $C(0; 3; 0)$ là

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 1$$

Câu 10. (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 0; 1)$ và $B(-2; 2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . Khi đó (α) đi qua $I(1;1;2)$ và nhận $\vec{AB} = (-6; 2; 2)$ làm một VTPT.
 $\Rightarrow (\alpha): -6(x-1) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0 \Rightarrow (\alpha): 3x - y - z = 0$.

Câu 11. (Mã 101 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$ và $B(5;1;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

Lời giải

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm $I(3;2;-1)$, có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = \frac{1}{2} \vec{AB} = (2; -1; -1)$ có phương trình: $2(x-3) - 1(y-2) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z - 5 = 0$.

Câu 12. (Chuyên Sơn La 2019) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 2y - z = 0$

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (2; 2; 1)$, vector pháp tuyến mặt phẳng $(Q): \vec{n}_Q = (1; 2; -1)$.

Theo đề bài ta có vector pháp tuyến mặt phẳng $(P): \vec{n}_P = \vec{n}_Q \wedge \vec{AB} = (4; -3; -2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x - 3y - 2z + C = 0$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;0)$ nên: $-3 + C = 0 \Leftrightarrow C = 3$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4x - 3y - 2z + 3 = 0$.

Câu 13. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; -1; 2); B(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (1; 2; -1)$

Từ (P) suy ra vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$

Gọi vec tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q$

Vì (Q) chứa A, B nên $\vec{n}_Q \perp \vec{AB} \quad (1)$

Mặt khác $(Q) \perp (P)$ nên $\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P \quad (2)$

Từ (1), (2) ta được $\vec{n}_Q = [\vec{AB}, \vec{n}_P] = (3; -2; -1)$

(Q) đi qua $A(1; -1; 2)$ và có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (3; -2; -1)$ nên (Q) có phương trình là $3(x-1) - 2(y+1) - (z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z - 3 = 0$.

Câu 14. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β)

Lời giải

Gọi mặt phẳng phải tìm là (P) . Khi đó vec tơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n}_P = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; 1; -2)$. Phương trình của (P) là $2x + y - 2z = 0$.

Câu 15. (HSG Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 2); B(2; 1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P)

Lời giải

Mặt phẳng (P) có 1 vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$. Vec tơ $\vec{AB} = (1; 2; -1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vec tơ pháp tuyến của (Q) , do (Q) vuông góc với (P) nên $\vec{n}$ có giá vuông góc với $\vec{n}_P$, mặt khác vec tơ $\vec{AB}$ có giá nằm trong mặt phẳng (Q) nên $\vec{n}$ cũng vuông góc với $\vec{AB}$

Mà $\vec{n}_P$ và $\vec{AB}$ không cùng phương nên ta có thể chọn $\vec{n} = [\vec{n}_P, \vec{AB}] = (-3; 2; 1)$, mặt khác (Q) đi qua $A(1; -1; 2)$ nên phương trình của mặt phẳng (Q) là:

$$-3(x-1) + 2(y+1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z - 3 = 0$$

Câu 16. (Chuyên Lam Sơn 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng qua O , đồng thời vuông góc với cả (α) và (β)

Lời giải

Mặt phẳng (α) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (3; -2; 2)$.

Mặt phẳng (β) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (5; -4; 3)$.

Giả sử mặt phẳng (γ) có vector pháp tuyến là $\vec{n}$.

Do mặt phẳng (γ) vuông góc với cả (α) và (β) nên ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{n_1} \\ \vec{n} \perp \vec{n_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (2; 1; -2)$$

Mặt phẳng $(\mathcal{P})$ đi qua $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -2)$ có phương trình là:
 $2x + y - 2z = 0$

Câu 17. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 1 = 0$, $(Q): y = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A , vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải

$(P): 2x - y + 3z - 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n_{(P)}} = (2; -1; 3)$

$(Q): y = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n_{(Q)}} = (0; 1; 0)$

Do mặt phẳng (R) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có vectơ pháp tuyến
 $\vec{n_{(R)}} = [\vec{n_{(P)}}, \vec{n_{(Q)}}] \Rightarrow \vec{n_{(R)}} = (-3; 0; 2)$

Vậy phương trình mặt phẳng (R) là: $-3x + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2z - 1 = 0$.

Câu 18. (Đồng Tháp - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho M là trực tâm tam giác ABC .

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, khi đó phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có $\vec{BC} = (0; -b; c), \vec{CA} = (a; 0; -c)$ và $\vec{AM} = (3-a; 2; 1), \vec{BM} = (3; 2-b; 1)$

Vì M là trực tâm tam giác ABC nên ta có hệ

$$\begin{cases} \vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BM} \cdot \vec{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b + c = 0 \\ 3a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ c = 3a \end{cases}$$

Hơn nữa vì M thuộc (ABC) nên $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{a} + \frac{2}{\frac{3a}{2}} + \frac{1}{3a} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{14}{3}$.

Ta được $a = \frac{14}{3}, b = 7, c = 14$ hay $(ABC): \frac{x}{\frac{14}{3}} + \frac{y}{7} + \frac{z}{14} = 1$.

Ta chọn $(ABC): 3x + 2y + z - 14 = 0$.

Câu 19. (Sở Nam Định - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + 2y + 3z) = 0$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm (khác gốc tọa độ O) của mặt cầu (S) và các trục Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

Lời giải

Giả sử $A(a; 0; 0) \in Ox, B(0; b; 0) \in Oy, C(0; 0; c) \in Oz$. Theo giả thiết ta có $a, b, c \neq 0$.

Vì $A \in (S)$ nên ta có: $a^2 - 2a = 0 \xrightarrow{a \neq 0} a = 2$. Vậy $A(2; 0; 0)$.

Vì $B \in (S)$ nên ta có: $b^2 - 4b = 0 \xrightarrow{b \neq 0} b = 4$. Vậy $B(0; 4; 0)$.

Vì $C \in (S)$ nên ta có: $c^2 - 6c = 0 \xrightarrow{c \neq 0} c = 6$. Vậy $C(0; 0; 6)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$.

Câu 20. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho điểm $M(1; 2; 5)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải

Cách 1 :

Ta có tính chất hình học sau : tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc thì điểm M là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của điểm O lên mặt phẳng (ABC) .

Do đó mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 5)$ và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}(1; 2; 5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $(x - 1) + 2(y - 2) + 5(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 30 = 0$.

Cách 2:

Giả sử $A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c)$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Theo giả thiết ta có $M \in (P)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1$ (1).

Ta có $\overrightarrow{AM} = (1 - a; 2; 5); \overrightarrow{BC} = (0; -b; c); \overrightarrow{BM} = (1; 2 - b; 5); \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$

Mặt khác M là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 5c \\ a = 5c \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $a = 30; b = 15; c = 6$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{30} + \frac{y}{15} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 30 = 0$.

Câu 21. (Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là ba số thực dương thay đổi, thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2017$. Khi đó, mặt phẳng (ABC) luôn đi qua có một điểm có tọa độ cố định là điểm nào?

Lời giải

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Dựa vào điều kiện, chọn $M(m;m;m)$ cố định nằm trên (ABC) .

Ta có: $M \in (ABC) \Leftrightarrow m \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 \Leftrightarrow m \cdot 2017 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2017}$.

Vậy $\left(\frac{1}{2017}; \frac{1}{2017}; \frac{1}{2017} \right)$ là điểm cố định.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải

Gọi tọa độ các điểm $A(a;0;0) \in Ox$, $B(0;b;0) \in Oy$ và $C(0;0;c) \in Oz$.

M là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 3x_M = x_A + x_B + x_C \\ 3y_M = y_A + y_B + y_C \\ 3z_M = z_A + z_B + z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$$

Do đó phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Câu 23. Cho điểm $M(1;2;5)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải

Cách 1: Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mặt phẳng (P) đi qua M nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1 (*)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0), \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c), \overrightarrow{BM} = (1; 2-b; 5), \overrightarrow{CM} = (1; 2; 5-c)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} b = \frac{a}{2} \\ c = \frac{a}{5} \end{cases}$$

Do M là trọng tâm tam giác ABC nên

Thay vào (*) ta có $\frac{1}{a} + \frac{4}{a} + \frac{25}{a} = 1 \Rightarrow a = 30 \Rightarrow b = 15, c = 6$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{30} + \frac{y}{15} + \frac{z}{6} = 1 \Rightarrow x + 2y + 5z - 30 = 0$.

Câu 24. (Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -2; -2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 2; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

Lời giải

Ta có:

$$\vec{AB} = (0; 4; 2), \vec{AC} = (-3; 4; 3), n = [\vec{AB}; \vec{AC}] = (4; -6; 12)$$

Ta có $n = (4; -6; 12)$ cùng phương $n_1 = (2; -3; 6)$

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $C(0; 2; 1)$ và có một vector pháp tuyến $n_1 = (2; -3; 6)$ nên (ABC) có phương trình là:

$$2(x - 0) - 3(y - 2) + 6(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 6z = 0$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x - 3y + 6z = 0$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1; 2; 3)$, $B(4; 5; 6)$, $C(1; 0; 2)$.

Lời giải

Ta có: $\vec{AB} = (3; 3; 3), \vec{AC} = (0; -2; -1)$

Mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1; 2; 3)$, $B(4; 5; 6)$, $C(1; 0; 2)$ nhận $n = [\vec{AB}; \vec{AC}] = (3; 3; -6)$ làm vector pháp tuyến.

Nên phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1; 2; 3)$, $B(4; 5; 6)$, $C(1; 0; 2)$ có phương trình là $3x + 3y - 6z + 9 = 0$ hay $x + y - 2z + 3 = 0$

Dạng 2. Khoảng cách từ điểm đến mặt, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

□ Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng (P): $ax + by + cz + d = 0$ được xác định

bởi công thức:
$$d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng

⊥ Cho hai mặt phẳng song song $(P): ax + by + cz + d = 0$ và $(Q): ax + by + cz + d' = 0$ có cùng

$$d((Q), (P)) = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

véc tơ pháp tuyến, khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là

Viết phương trình $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0$ **và cách** $M(x_0; y_0; z_0)$ **khoảng** k .

Phương pháp:

⊥ $V_1 (P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): ax + by + cz + d' = 0$.

⊥ Sử dụng công thức khoảng cách $d_{[M, (P)]} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = k \Rightarrow d'$.

Viết phương trình mặt phẳng $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0$ **và** (P) **cách mặt phẳng** (Q) **một khoảng** k **cho trước.**

Phương pháp:

⊥ $V_1 (P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): ax + by + cz + d' = 0$.

⊥ Chọn một điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (Q)$ và sử dụng công thức:

$$d_{[(Q), (P)]} = d_{[M, (P)]} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = k \Rightarrow d'.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) **vuông góc với hai mặt phẳng** $(\alpha), (\beta)$, **đồng thời** (P) **cách điểm** $M(x_0; y_0; z_0)$ **một khoảng bằng** k **cho trước.**

Phương pháp:

⊥ Tìm $n_{(\alpha)}, n_{(\beta)}$. Từ đó suy ra $n_{(P)} = [n_{(\alpha)}, n_{(\beta)}] = (a; b; c)$.

⊥ Khi đó phương trình (P) có dạng $(P): ax + by + cz + d = 0$, (cần tìm d).

⊥ Ta có: $d_{[M, (P)]} = k \Leftrightarrow \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = k \Rightarrow d$.

Câu 26. (THPT Ba Đình 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

Lời giải

$$d \text{ từ } A \text{ đến } (P) \text{ là } d(A, (P)) = \frac{|3x_A + 4y_A + 2z_A + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{|3 - 8 + 6 + 4|}{\sqrt{29}}$$

Khoảng cách

$$\Rightarrow d(A, (P)) = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

Câu 27. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 4 = 0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1; 2; 1)$ đến mặt phẳng (P) .

Lời giải

Khoảng cách d từ điểm $M(1; 2; 1)$ đến mp (P) là $d = d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 1$.

Câu 28. (SGD Cần Thơ 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 5 = 0$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) .

Lời giải

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) : $d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{3}$.

Câu 29. (Cần Thơ - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(-1; 3; -2)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt (P) .

Lời giải

Ta có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là $d(A, (P)) = \frac{|(-1) - 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}$.

Câu 30. (Sở Kon Tum - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 4 = 0$. Tính khoảng cách từ điểm $M(3; 1; -2)$ đến mặt phẳng (P) .

Lời giải

Khoảng cách từ điểm $M(3; 1; -2)$ đến mặt phẳng (P) :

$$d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1$$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 8 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} (P) // (Q) \\ A(8; 0; 0) \in (P) \end{cases} \Rightarrow d((P); (Q)) = d(A; (Q)) = \frac{|8 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{4}{3}.$$

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 16 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} (P) // (Q) \\ A(16; 0; 0) \in (P) \end{cases} \Rightarrow d((P); (Q)) = d(A; (Q)) = \frac{|16 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 5.$$

Câu 33. (Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) với (Q) song song với (P) và khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Vì (Q) song song với (P) nên phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $(Q): x + 2y + 2z + c = 0$

Lấy $M \in (P) \Rightarrow M(0; 0; 5) \Rightarrow d(M, (Q)) = \frac{7}{3}$. Khi đó ta có

$$d(M, (Q)) = \frac{|2 \cdot 5 + c|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} 10 + c = 7 \\ 10 + c = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ c = -17 \end{cases}$$

Vậy ta có các mặt phẳng (Q) là

$$(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0; (Q): x + 2y + 2z - 17 = 0$$

Câu 34. (SGD Hưng Yên 2019) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x + y - z + 3 = 0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi mặt phẳng (α) cần tìm.

Vì $(\alpha) // (\beta)$ nên phương trình (α) có dạng: $x + y - z + c = 0$ với $c \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lấy điểm $I(-1; -1; 1) \in (\beta)$.

Vì khoảng cách từ (α) đến (β) bằng $\sqrt{3}$ nên ta có:

$$d(I, (\alpha)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|-1 - 1 - 1 + c|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|c - 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 6 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện } c \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{)}.$$

Vậy phương trình (α) là: $x + y - z + 6 = 0$; $x + y - z = 0$.

Câu 35. (THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0), B(0; -2; 3), C(1; 1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Giả sử $\vec{n} = (a; b; c)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Ta có $\vec{n} \perp \overline{AB} = (-1; -2; 3) \Rightarrow -a - 2b + 3c = 0 \Rightarrow a = -2b + 3c$.

$$(P): ax + by + cz - a = 0 \Rightarrow d(C; (P)) = \frac{|b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}|b + c| = 2\sqrt{b^2 + c^2 + (-2b + 3c)^2} \Leftrightarrow 17b^2 - 54bc + 37c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ b = \frac{37}{17}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 1 \\ c = 17, b = 37 \end{cases}$$

TH1: $b = c = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (P): x + y + z - 1 = 0$

TH2: $b = 37, c = 17 \Rightarrow a = -23 \Rightarrow (P): -23x + 37y + 17z + 23 = 0$

Câu 36. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-2019) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 1 = 0$, Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3.

Lời giải

+ Ta có: $(P): x + 2y - 2z - 1 = 0$, chọn $A(1; 0; 0) \in (P)$.

$$d(A; (Q)) = \frac{|1 + 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3.$$

+ Xét đáp án A, ta có

Dạng 3. Góc của 2 mặt phẳng

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn hoặc tù.

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad \text{với } 0^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

2. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

$$\cos((P), (Q)) = \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad \text{với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P): x - y + z - 3 = 0$ và $(Q): 2x + y - 2z - 3 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 1)$ và mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -2)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow ((P), (Q)) \approx 78,9^\circ$$

Ta có:

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x + y - z = 0$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_P = (2; -1; 2), \vec{n}_Q = (1; 1; -1)$ lần lượt là vector pháp tuyến của (P) và (Q) .

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| |\vec{n}_Q|} = \frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow ((P), (Q)) \approx 78,9^\circ$$

Do đó:

Câu 39. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) , biết (P_1) và (P_2) có hai vector pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}; 0; -1), \vec{n}_2 = (1; 0; -\sqrt{3})$.

Lời giải

$$\cos((P_1), (P_2)) = \frac{|\sqrt{3} \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta có:

Suy ra $((P_1), (P_2)) = 30^\circ$.

Câu 40. (Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019) Trong không gian $Oxyz$, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2; -1; -2)$. Tìm số đo góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(Q): x - y - 5 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_Q = (1; -1; 0)$.

Hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2; -1; -2) \Rightarrow (P)$ qua H và nhận $\vec{OH} = (2; -1; -2)$ làm vector pháp tuyến.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{OH}, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|2 + 1 + 0|}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Câu 41. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; 1; 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , tìm số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x + y - 11 = 0$.

Lời giải

Ta có H là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt phẳng (P) nên $\vec{OH} \perp (P)$. Do đó $\vec{OH} = (2; 1; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 0)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{OH} \cdot \vec{n}|}{|\vec{OH}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Ta có

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ là 45° .

Câu 42. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 0; 1), B(6; -2; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và tạo với mặt phẳng (Oyz) một

góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{2}{7}$

Lời giải

Giả sử (P) có VTPT $\vec{n}_1 = (a; b; c)$

(P) có VTCP $\vec{AB} = (3; -2; 0)$ suy ra $\vec{n}_1 \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{AB} = 0$
 $\Rightarrow 3a + b(-2) + 0 \cdot c = 0 \Rightarrow 3a - 2b = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}b$ (1)

(Oyz) có phương trình $x = 0$ nên có VTPT $\vec{n}_2 = (1; 0; 0)$

Mà $\cos \alpha = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{|a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2}{7}$

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 7|a| = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow 49a^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 45a^2 - 4b^2 - 4c^2 = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được $4b^2 - c^2 = 0$

$$4b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ a=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} = \left(\frac{2}{3}; 1; 2\right) \\ \vec{n} = \left(-\frac{2}{3}; -1; 2\right) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \vec{n} = (2; 3; 6) \\ \vec{n} = (2; 3; -6) \end{cases}$$

Chọn $c = 2$ ta có

Vậy $(P) \begin{cases} 2x + 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x + 3y - 6z = 0 \end{cases}$

Dạng 4. Vị trí tương đối hai mặt

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

$$\square (P) \overset{cắt}{(Q)} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

$$\square (P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

$$\square (P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

$$\square (P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Câu 43. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $b, c \neq 0$ và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Tìm mối liên hệ giữa b, c để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P)

Lời giải

- Phương trình $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow (ABC)$ có VTPT: $\vec{n} = \left(1; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$.
- Phương trình $(P): y - z + 1 = 0 \Rightarrow (P)$ có VTPT: $\vec{n}' = (0; 1; -1)$.
- $(ABC) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = c$.

Câu 44. Cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 3 = 0$ và $(Q): x - 4y + (m - 1)z + 1 = 0$ với m là tham số. Tìm giá trị của tham số m để mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) .

Lời giải

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) - 1 \cdot (m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = -6$$

Câu 45. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - y + nz - 3 = 0$ và $(\beta): 2x + my + 2z + 6 = 0$. Với giá trị nào của m, n thì (α) song song với (β) ?

Lời giải

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1}{m} = \frac{n}{2} \neq \frac{-3}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 1 \end{cases}$$

Câu 46. (SGD Bến Tre 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz - 2 = 0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

Lời giải

Ta có vec tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_1 = (1; 2; -1)$, vec tơ pháp tuyến của (β) là $\vec{n}_2 = (2; 4; -m)$

Hai mặt phẳng (α) và (β) song song khi $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-m}{-1} \neq \frac{-2}{-1}$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 47. Tìm các cặp mặt phẳng song song hoặc vuông góc trong các mặt phẳng sau:

$$(P): 2x + 3y - 2z + 7 = 0,$$

$$(Q): 3x - 2y - 11 = 0,$$

$$(R): 4x + 6y - 4z - 9 = 0,$$

$$(T): 7x + y - z + 1 = 0.$$

Lời giải

Các mặt phẳng $(P), (Q), (R), (T)$ có các vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (2; 3; -2), n_2 = (3; -2; 0), n_3 = (4; 6; -4), n_4 = (7; 1; -1)$.

Ta có $n_1 \cdot n_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 = 0$, suy ra $(P) \perp (Q)$.

Vì $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{-9}{7}$ nên $(P) \not\parallel (R)$.

Ta lại có $(P) \perp (Q)$ và $(P) \not\parallel (R)$, suy ra $(Q) \perp (R)$.

Ta có $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{1}$ suy ra n_1 và n_4 không cùng phương.

Mặt khác, $n_1 \cdot n_4 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 19 \neq 0$. Suy ra (P) và (T) cắt nhau nhưng không vuông góc. Tương tự, ta cũng có (Q) và (T) cắt nhau nhưng không vuông góc.

Câu 48. Tìm các cặp mặt phẳng song song hoặc vuông góc trong các mặt phẳng sau:

$$(P): x + y - z + 3 = 0, (Q): 2x + 2y - 2z + 99 = 0, (R): 3x + 3y + 6z + 7 = 0.$$

Lời giải

Các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ có các vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (1; 1; -1), n_2 = (2; 2; -2), n_3 = (3; 3; 6)$.

Ta có: $n_1 \cdot n_3 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 = 0$, suy ra $(P) \perp (R)$;

$\vec{n_1} = \frac{1}{2} \vec{n_2}$ và $3 \neq \frac{1}{2} \cdot 99$, suy ra $(P) \not\parallel (Q)$.

Vì $(P) \not\parallel (Q), (P) \perp (R)$ nên $(Q) \perp (R)$.

Câu 49. Cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 12 = 0, (Q): 4x + 2y + 4z - 6 = 0$.

a) Chứng minh $(P) \parallel (Q)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải

a) Xét hai mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 12 = 0, (Q): 4x + 2y + 4z - 6 = 0$, ta có $\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} \neq \frac{-6}{12}$, suy ra $(P) \parallel (Q)$.

b) Trên mặt phẳng (Q) , lấy điểm $M(0;1;1)$.

$$d((P), (Q)) = d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 12|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{15}{3} = 5$$

Ta có:

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 8 = 0$ và $(Q): 2x + 2y - z + 2 = 0$

a) Chứng minh rằng $(P) // (Q)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải

a) Ta có: $\frac{2}{2} = \frac{2}{2} = -\frac{1}{-1} \neq \frac{8}{2}$ nên $(P) // (Q)$.

b) Lấy $A(0;0;8)$ thuộc mặt phẳng (P) . Ta có:

$$d((P), (Q)) = d(A, (Q)) = \frac{|-8 + 2|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 2$$

Câu 51. Cho hai mặt phẳng $(P_1): x + 2y - 3z + 5 = 0$ và $(P_2): -4x - 8y + 12z + 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng $(P_1) // (P_2)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$.

Lời giải

a) Ta có $n_1 = (1; 2; -3), n_2 = (-4; -8; 12)$ lần lượt là vector pháp tuyến của các mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Do $n_2 = -4n_1, 3 \neq (-4) \cdot 5$ nên $(P_1) // (P_2)$.

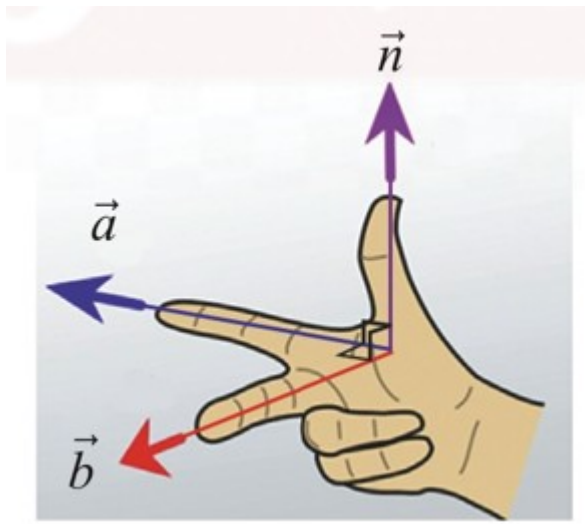
b) Chọn điểm $M_0\left(\frac{3}{4}; 0; 0\right) \in (P_2)$. Suy ra khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P_1) bằng:

$$d(M_0, (P_1)) = \frac{\left|\frac{3}{4} + 5\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{23\sqrt{14}}{56}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ bằng $\frac{23\sqrt{14}}{56}$.

Dạng 5. Ứng dụng

Câu 52. Cho biết hai vector $a = (2; 1; 1), b = (1; -2; 0)$ có giá lần lượt song song với ngón trỏ và ngón giữa của bàn tay trong Hình. Tìm vector n có giá song song với ngón cái. (Xem như ba ngón tay nói trên tạo thành ba đường thẳng đôi một vuông góc.)



Lời giải

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (2; 1; -5)$$

Câu 53. Một công trường xây dựng nhà cao tầng đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$. Hãy kiểm tra tính song song hoặc vuông góc giữa các mặt kính $(P), (Q), (R)$ (Hình) của một toà nhà, biết:

$$(P): 3x + y - z + 2 = 0;$$

$$(Q): 6x + 2y - 2z + 11 = 0;$$

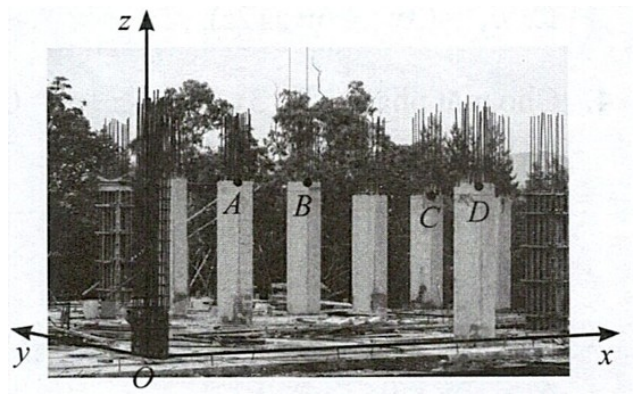
$$(R): x - 3y + 1 = 0$$



Lời giải

$$(P) // (Q); (P) \text{ vuông góc với } (R); (Q) \text{ vuông góc với } (R).$$

Câu 54. Hình minh hoạ một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2; 1; 3), B(4; 3; 3), C(6; 3; 2, 5), D(4; 0; 2, 8)$.



- a) Lập phương trình mặt phẳng (ABC) .
- b) Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng hay không?

Lời giải

a) Ta có: $\vec{AB} = (2; 2; 0)$, $\vec{AC} = (4; 2; -0,5)$ nên

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -0,5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1; 1; -4)$$

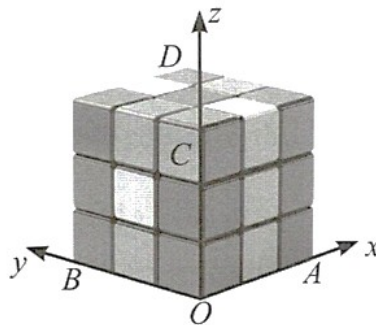
là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$(-1)(x-2) + 1(y-1) + (-4)(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - y + 4z - 13 = 0.$$

b) Vì $4 - 0 + 4 \cdot 2,8 - 13 = 2,2 \neq 0$ nên điểm $D(4; 0; 2,8)$ không thuộc mặt phẳng (ABC) . Vậy bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Câu 55. Một khối rubic được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ với $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 2)$, $D(3; 3; 3)$.



- a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .
- b) Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng không?

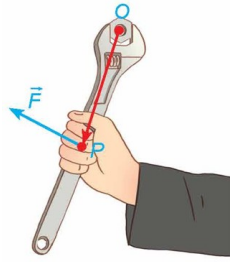
Lời giải

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ hay $2x + 2y + 3z - 6 = 0$

b) Thay tọa độ của điểm D vào phương trình mặt phẳng (ABC) , ta có:

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 6 = 15 \neq 0, \text{ suy ra } D \notin (ABC). \text{ Suy ra bốn điểm } A, B, C, D \text{ không đồng phẳng.}$$

Câu 56. Moment lực là một đại lượng Vật lí, thể hiện tác động gây ra sự quay quanh một điểm hoặc một trục của một vật thể. Trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo là mét, nếu tác động vào cán mở lết tại vị trí P một lực F để vặn con ốc ở vị trí O thì moment lực M được tính bởi công thức $\vec{M} = [\vec{OP}, \vec{F}]$.



a) Cho $\vec{OP} = (x; y; z), \vec{F} = (a; b; c)$. Tính M .

b) Giải thích vì sao, nếu giữ nguyên lực tác động F trong khi thay vị trí đặt lực từ P sang P' sao cho $\vec{OP}' = 2\vec{OP}$ thì moment lực sẽ tăng lên gấp đôi. Từ đó, ta có thể rút ra điều gì để đỡ tốn sức khi dùng mở lết vặn ốc?

Lời giải

a) Ta có $\vec{M} = [\vec{OP}, \vec{F}] = (cy - bz; az - cx; bx - ay)$.

b) Nếu $\vec{OP}' = 2\vec{OP} = (2x; 2y; 2z)$ thì $\vec{M}' = [\vec{OP}', \vec{F}] = (2cy - 2bz; 2az - 2cx; 2bx - 2ay) = 2\vec{M}$.

Từ kết quả trên ta thấy nếu vị trí đặt lực P càng xa vị trí ốc O thì moment lực càng lớn và do đó ta càng đỡ tốn sức khi vặn ốc.

Câu 57. Một vật thể chuyển động trong không gian $Oxyz$. Tại mỗi thời điểm t , vật thể ở vị trí $M(\cos t - \sin t; \cos t + \sin t; \cos t)$.

a) Xác định tọa độ của vị trí M_1, M_2, M_3 của vật tương ứng với các thời điểm $t=0, t=\frac{\pi}{2}, t=\pi$.

b) Chứng minh rằng M_1, M_2, M_3 không thẳng hàng và viết phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$.

c) Vị trí $M(\cos t - \sin t; \cos t + \sin t; \cos t)$ có luôn thuộc mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ hay không?

Lời giải

a) Với $t=0$ thì $M_1(\cos 0 - \sin 0; \cos 0 + \sin 0; \cos 0)$, hay $M_1(1; 1; 1)$.

Với $t=\frac{\pi}{2}$ thì $M_2\left(\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}; \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}; \cos \frac{\pi}{2}\right)$, hay $M_2(-1; 1; 0)$.

Với $t=\pi$ thì $M_3(\cos \pi - \sin \pi; \cos \pi + \sin \pi; \cos \pi)$, hay $M_3(-1; -1; -1)$.

b) Ta có $\vec{M_1M_2} = (-2; 0; -1)$ và $\vec{M_1M_3} = (-2; -2; -2) \Rightarrow [\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}] = (-2; -2; 4) \neq 0$.

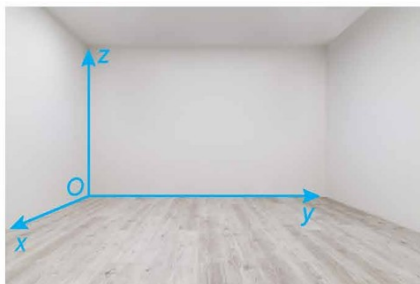
Do đó M_1, M_2, M_3 không thẳng hàng.

Phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ là: $x + y - 2z = 0$.

c) Ta có $(\cos t - \sin t) + 2(\cos t + \sin t) - 2\cos t = 0$ với mọi t .

Do đó điểm $M(\cos t - \sin t; \cos t + \sin t; \cos t)$ luôn thuộc mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ với mọi t .

Câu 58. Trong không gian Oxyz, sàn của một căn phòng có dạng hình tứ giác với bốn đỉnh $O(0;0;0), A(2;0;0), B(2;3;0); C(0;2\sqrt{2};0)$. Bốn bức tường của căn phòng đều vuông góc với sàn.



a) Viết phương trình bốn mặt phẳng tương ứng chứa bốn bức tường đó.

b) Trong bốn mặt phẳng tương ứng chứa bốn bức tường đó, hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

Lời giải

Sàn của căn phòng là hình tứ giác $OABC$ nằm trong mặt phẳng (Oxy) . Gọi $(P), (Q), (R), (S)$ tương ứng là các mặt phẳng chứa các bức tường ứng với các chân tường OA, AB, BC, CO .

a) Mặt phẳng chứa bức tường (P) có phương trình là $y=0$. Mặt phẳng chứa bức tường (Oyz) có phương trình là $x=0$. Mặt phẳng (Q) có phương trình là $x=2$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-2; 2\sqrt{3}-3; 0), k = (0; 0; 1)$.

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (R) là $[\overrightarrow{BC}, k] = (2\sqrt{3}-3; 2; 0)$.

Phương trình mặt phẳng (R) là:

$$(2\sqrt{3}-3)(x-2) + 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow (2\sqrt{3}-3)x + 2y - 4\sqrt{3} = 0$$

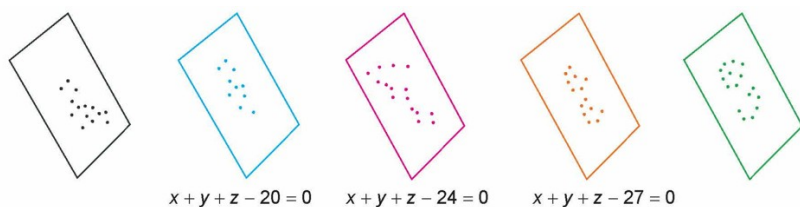
Phương trình mặt phẳng (S) là $x=0$.

b) Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (S) . Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) .

Câu 59. Trong một kì thi tuyển sinh có ba môn thi Toán, Văn, Tiếng Anh. Trong không gian Oxyz, người ta biểu diễn kết quả thi của mỗi thí sinh bởi điểm có hoành độ, tung độ, cao độ tương ứng là điểm Toán, Văn, Tiếng Anh của thí sinh đó.

a) Chứng minh rằng các điểm biểu diễn tương ứng với các thí sinh có tổng số điểm ba môn thi bằng 27 (nếu có) cùng thuộc mặt phẳng có phương trình $x+y+z-27=0$.

b) Chứng minh rằng tồn tại một số mặt phẳng đôi một song song với nhau sao cho hai điểm biểu diễn ứng với hai thí sinh có tổng số điểm thi bằng nhau thì cùng thuộc một mặt phẳng trong số các mặt phẳng đó.



Lời giải

a) Mỗi thí sinh có điểm thi Toán, Ngữ văn, Tiếng Anh tương ứng là x_0, y_0, z_0 mà có tổng số điểm ba môn đó bằng 27 thì đều có điểm biểu diễn $M(x_0; y_0; z_0)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình hay $x + y + z - 27 = 0$. Do đó các điểm biểu diễn các thí sinh có tổng điểm bằng 27 đều cùng thuộc mặt phẳng có phương trình $x + y + z - 27 = 0$.

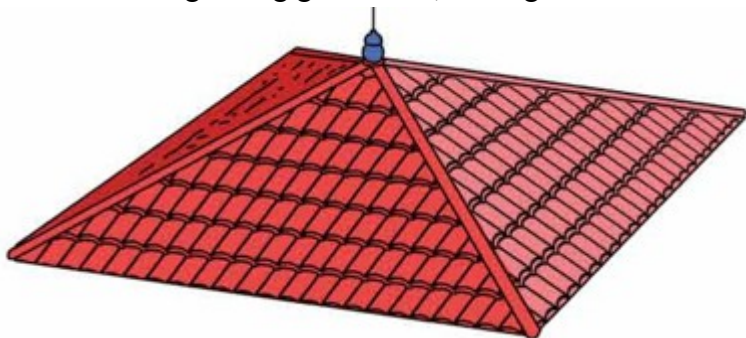
b) Tương tự câu a, các thí sinh có tổng số điểm ba môn bằng m thì đều có điểm biểu diễn kết quả cùng thuộc mặt phẳng $(\alpha_m): x + y + z - m = 0$. Các mặt phẳng như vậy cùng nhận vector pháp tuyến là $(1; 1; 1)$. Vì vậy ứng với các giá trị m khác nhau, các mặt phẳng (α_m) song song với nhau.

Câu 60. Bác An dự định làm bốn mái của ngôi nhà sao cho chúng là bốn mặt bên của một hình chóp đều và các mái nhà kề nhau thì vuông góc với nhau. Hỏi ý tưởng trên có thực hiện được không?

Lời giải

Gọi mái nhà là hình chóp $S.ABCD$. Nếu ý tưởng của bác An thực hiện được thì tích có hướng của hai vector pháp tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) đều là vector pháp tuyến của cả hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Do đó hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) song song hoặc trùng nhau, điều này vô lí. Vậy ý tưởng của bác An không thực hiện được.

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, một ngôi nhà có sàn nhà

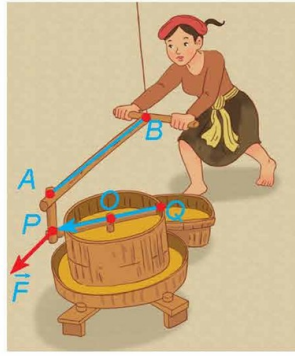


thuộc mặt phẳng Oxy , trần nhà tầng 1 thuộc mặt phẳng $z - 1 = 0$, mái nhà tầng 2 thuộc mặt phẳng $x + y + 50z - 100 = 0$. Hỏi trong ba mặt phẳng tương ứng chứa sàn nhà, trần tầng 1, mái tầng 2, hai mặt phẳng nào song song với nhau?

Lời giải

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$ song song với mặt phẳng có phương trình $z - 1 = 0$. Do đó mặt phẳng chứa sàn nhà và mặt phẳng chứa trần tầng 1 song song với nhau, hai mặt phẳng này không song song với mặt phẳng chứa mái nhà tầng 2.

Câu 62. Xét một cối xay lúa trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo là mét. Nếu tác động vào tai cối xay lúa (ở vị trí P) một lực F thì moment lực M được tính bởi công thức $M = \overrightarrow{OP} \times F$



Trong quá trình xay, các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang. Vector lực F có giá song song với AB . Giải thích vì sao giá của vector moment lực M có phương thẳng đứng?

Lời giải

Giá của moment lực M vuông góc với giá của vector $\overrightarrow{OP}$ và F . Mà OP và AB luôn nằm ngang và giá của F song song với AB nên giá của moment lực M luôn có phương thẳng đứng.

Câu 63. Trên một cánh đồng điện mặt trời, người ta đã thiết lập sẵn một hệ tọa độ $Oxyz$. Hai tấm pin năng lượng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng $(P): 2x + 2z + 1 = 0$ và $(P'): x + z + 7 = 0$.



- Tính góc giữa (P) và (P') .
- Tính góc hợp bởi (P) và (P') với mặt đất (Q) có phương trình $z = 0$.

Lời giải

- (P) và (P') có vector pháp tuyến lần lượt là $n = (2; 0; 2), n' = (1; 0; 1)$.

$$\cos((P), (P')) = |\cos(\vec{n}, \vec{n'})| = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = 1$$

Ta có

$$\text{Vậy } ((P), (P')) = 0^\circ$$

- (P) và (Q) có vector pháp tuyến lần lượt là $n = (2; 0; 2), m = (0; 0; 1)$.

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}, \vec{m})| = \frac{|2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ta có

Vậy $((P), (Q)) = 45^\circ$.

Vì (P) và (P') song song với nhau nên $((P'), (Q)) = 45^\circ$.