**BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN**

**PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM**

**1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐÚNG**

Đường thẳng  được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

 

Từng trường hợp được minh họa trong hình dưới đây:



**2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG**

Đường thẳng  được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số  nếu  hoặc .

Đường thẳng  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  được minh hoạ như Hình 5 .



**3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN**

**Định nghĩa:** Đường thẳng , được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đ thị hàm số  nếu  hoặc .

**Nhận xét:** Giả sử đường thẳng  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số . Lấy điểm  thuộc đồ thị hàm số  và điểm  thuộc đường thẳng  có cùng hoành độ . Khi đó, độ dài  tiến tới 0 khi  (Hình 16a) hay khi  (Hình 16b).



**\*Chú ý:** Để xác định hệ số  của đường tiệm cận xiên  của đồ thị hàm số , ta có thể áp dụng công thức sau:

 hoặc 

(Khi  thì ta có tiệm cận ngang  ).

**PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG**

**Câu 1.** Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được  bộ phận mỗi ngày sau  ngày đào tạo. Xem  là một hàm số xác định trên , khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

**Lời giải**

Ta có 

Vậy một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá 50 bộ phận máy tính.

**Câu 2.** Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 20 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 30 lít/phút.

a) Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Làm tròn đến hàng phần trăm.

b) Sau  phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Tính theo .

c) Nếu cứ bơm liên tục thì nồng đ muối trong bể như thế nào?



**Lời giải**

a) Sau 20 phút, số gam muối trong bể là:  (gam).

Sau 20 phút, số lít nước trong bể là:  (lít).

Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể là:  (gam/lít).

b) Sau  phút, số gam muối trong bể là:  (gam).

Sau  phút, số lít nước trong bể là:  (lít).

Sau  phút, nồng độ muối trong bể là:  (gam/lít).

c) Xét hàm số  Với  có đơn vị là phút và .

Ta có: $\lim\_{t\to +\infty }f(t)=\lim\_{t\to +\infty }\frac{60t}{100+3t}=\lim\_{t\to +\infty }\frac{60}{\frac{100}{t}+3}=20$.

Nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  là .

Vậy nồng độ muối trong bể luôn nhỏ hơn và ngày càng gần 20 (gam/lít).

**Câu 3.** Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất  sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số . Gọi  là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất  sản phẩm , khi đó, hãy tính chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm.

**Lời giải**

Chi phí trung bình để sản xuất  sản phẩm là  (nghìn đồng).

Ta có $\lim\_{x\to +\infty }F(x)=\lim\_{x\to +\infty }\frac{60000+250x}{x}=\lim\_{x\to +\infty }\left(\frac{60000}{x}+250\right)=250$

Vậy chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm là không quá 250000 dồng.

**Câu 4.** Số dân của một thị trấn sau  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức  được tính bằng nghìn người (*Nguồn: Giải tich 12 nâng cao,  Việt Nam, 2020*). Khi đó, số dân tối đa của thị trấn không vượt quá bao nhiêu?

**Lời giải**

Ta có: .

Vậy số dân tối đa của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

**Câu 5.** Một công ty chuyên sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất  (sản phẩm) là:  (triệu đồng), khi đó  là chi phí sản xuất cho mỗi sản phẩm. Khi đó, chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá bao nhiêu?

**Lời giải**

Ta có: . Nên số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  là 2 . Vậy chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá 2 triệu đồng.

**Câu 6.** Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với  người thì số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức . Hãy tìm số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn?

![](data:application/octet-stream;base64...)

**Lời giải**

Ta có: , suy ra hàm số  là hàm số đồng biến trên .

Ta lại có: 

Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là .

Vậy số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn không vượt quá 1250 .

**Câu 7.** Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong  (tháng) được tính bởi công thức  với . Xem  là một hàm số xác định trên . Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

**Lời giải**

Ta có: .

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là .

Vậy số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn 600 sản phẩm.

**Câu 8.** Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton được cho bởi công thức . Trong đó  là lực hấp dẫn giữa 2 vật thể bất kì,  là hằng số hấp dẫn,  là khối lượng các vật,  là khoảng cách giữa chúng. Đồ thị của công thức này có tiệm cận đứng là , điều này có nghĩa là khi  dần về 0 thì lực hấp dẫn tiến đến bao nhiêu?

**Lời giải**

Ta có . Vậy điều này có nghĩa là khi  dần về 0 thì lực hấp dẫn tiến đến .

**Câu 9.** Một ứng dụng của hàm số trong vật lý là hệ số tương đối tính Lorentz được cho bởi công thức , với  là vận tốc tương đối giữa các hệ quy chiếu quán tính,  là tốc độ ánh sáng trong chân không. Hàm này được sử dụng trong thuyết tương đối đặc biệt của Einstein để mô tả các hiệu ứng tương đố tính có đồ thị trông như hình bên.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, hãy cho biết khi hệ số tương đối dần về  thì vận tốc gần bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Ta có:  nên  là tiệm cận đứng của đồ thị. Vậy khi hệ số tương đối dần về  thì vận tốc gần bằng .

**Câu 10.** Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30 000 USD. Sau thời gian  (năm), người ta xác định giá trị của xe ô tô đó là .

a) Sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng bao nhiêu (USD)?

b) Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó ngày càng bằng bao nhiêu?

![](data:application/octet-stream;base64...)

**Lời giải**

a) Ta có: .

Sau 15 năm thì . Nên .

Vậy sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng 4000 (USD).

b) Ta có: .

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  là .

Vậy khi thời gian tăng lên, giá trị của xe ô tô đó ngày càng giảm về và gần bằng 2000 USD.

**Câu 11.** Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ , giả sử thêm vào dung dịch  (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ .

a) Xác định hàm số .

b) Khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá bao nhiêu %.

**Lời giải**

a) Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ  có  (gam) muối tinh khiết. Khi thêm  (gam) muối tinh khiết vào 200 gam dung dịch muối nồng độ  thì có  (gam) muối tinh khiết. Khi đó, ta có hàm số là .
b) Ta có .

Vì  đồng biến trên khoảng  nên khi  tăng thì  tăng. Nghĩa là khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì dung dịch có nồng độ phần trăm càng tăng.

Vì  với mọi  nên  dẫn đến .

Nghĩa là nồng độ phần trăm không vượt quá  khi cho thêm nhiều gam muối tinh khiết vào.

**Câu 12.** Số dân của một thị trấn sau  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức  được tính bằng nghìn người) (*Nguồn: Giải tích 12 nâng cao,  Việt Nam, 2020*). Xem  là một hàm số xác định trên nửa khoảng .

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là bao nhiêu?

b) Dân số của thị trấn đó không thể vượt quá bao nhiều nghìn người?

**Lời giải**

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là  nghìn người.

b) Ta có  luôn nhận giá trị dương trên khoảng . Nên hàm số đồng biến trên .

Ta lại có: . Do đó đồ thị hàm số  có đường tiệm cận ngang là .

Vì vậy dân số của thị trấn đó không thể vượt quá 26 nghìn người.

**Câu 13.** Số lượng xe máy điện bán được của một cửa hàng bán xe máy điện trong địa bàn thành phố Vinh trong tháng thứ  được tính theo công thức , trong đó . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là bao nhiêu?

b) Muốn số lương xe bán ra trong tháng đạt mức từ 45 xe trở lên trong một tháng thì cần sau bao nhiêu tháng?

c) Khi  càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức bao nhiêu xe một tháng?

**Lời giải**

a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là  (xe).

b) Ta có:  để bán được từ 45 xe trở lên trong mỗi tháng thì phải từ tháng thứ tư trở đi.

c) Ta có:  Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  là đường thẳng .

Vì tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  là đường thẳng  nên khi  càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức  tháng.

**Câu 14.** Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi  là số cuốn sách sẽ in và  (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

![](data:application/octet-stream;base64...)

**Lời giải**

Tổng số tiền cần bỏ ra để in  cuốn sách là:  (nghìn đồng).

Chi phí trung bình của mỗi cuốn sách là .

Ta có .

Suy ra  là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số . Vậy chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể thấp hơn 50000 đồng.

**Câu 15.** Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 40 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất đư c một sản phẩm đồ chơi , công ty phải trả 6 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi  là số đồ chơi  mà công ty đã sản xuất và  (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất  dồ chơi . Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi  là . Xem  là hàm số theo  xác định trên nửa khoảng . Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi  thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

**Lời giải**

Một đồ chơi  công ty phải trả 6 USD nên  đồ chơi  công ty phải trả  (USD) . Khi đó tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất  đồ chơi  là: .

Ta có 

Suy ra  là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số . Vậy chi phí trung bình của mỗi đồ chơi  thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn 6 USD.

**Câu 16.** Giả sử dân số của một huyện sau  năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số  (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

**Lời giải**

Ta có .

Vậy dân số của huyện đó không vượt quá 20 ( nghìn người).

**Câu 17.** Để loại bỏ  chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, ngườ ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là  (triệu đồng), . Để đạt được gần như loại bỏ  chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là bao nhiêu ?

**Lời giải**

Ta có .

Suy ra, đường thẳng  là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số .

Vậy để đạt được gần như loại bỏ  chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là vô cùng lớn và gần như là không thể thực hiện được.

**Câu 18.** Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất  (sản phẩm) là  (nghìn đồng). Gọi  là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số , coi .

**Lời giải**

Chi phí để sản xuất trung bình một sản phẩm là

 (nghìn đồng).

Ta có .

Vậy đường thẳng  là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số .

**Câu 19.** Một bể chứa 6 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau  phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm . Hãy xác định hàm số , coi  và xác định nồng độ muối tối đa có trong bể.

**Lời giải**

Sau  phút khối lượng muối trong bể là  (gam).

Thể tích của bể sau  phút là  (lít).

Khi đó  lít .

.

Vậy nồng độ muối tối đa có trong bể là 25 (gam/lít).