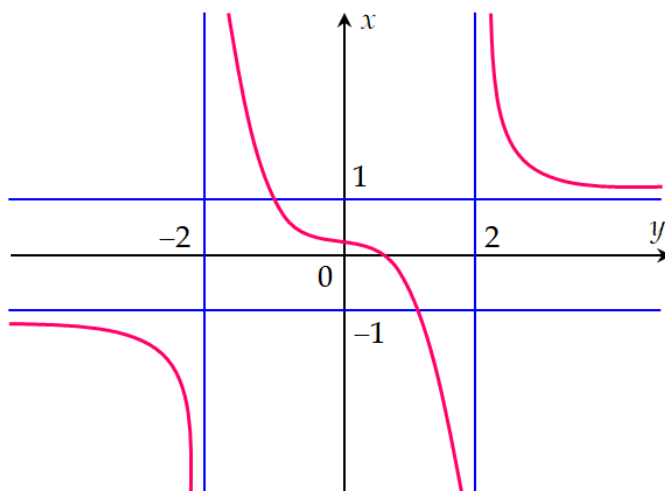


CHỦ ĐỀ 3**TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ ẨN****DẠNG 1****BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN VÀ HÀM SỐ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2}{3f(x)-2}$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{2}{3 \cdot (-1) - 2} = -\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{3 \cdot 1 - 2} = 2$$

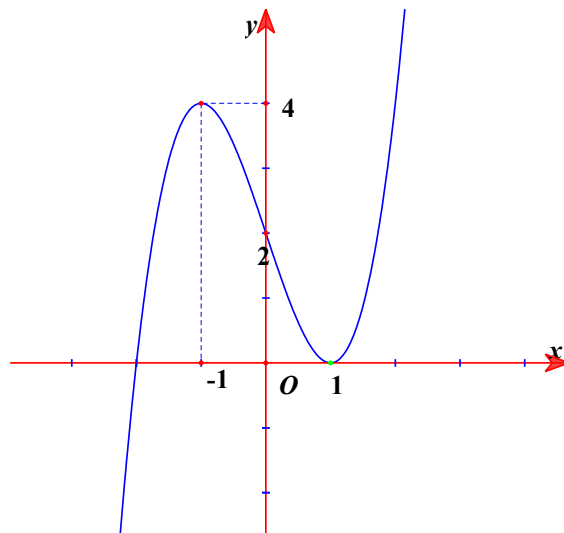
Suy ra đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang.

Xét phương trình $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: phương trình $f(x) = \frac{2}{3}$ có duy nhất một nghiệm.

Vậy hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

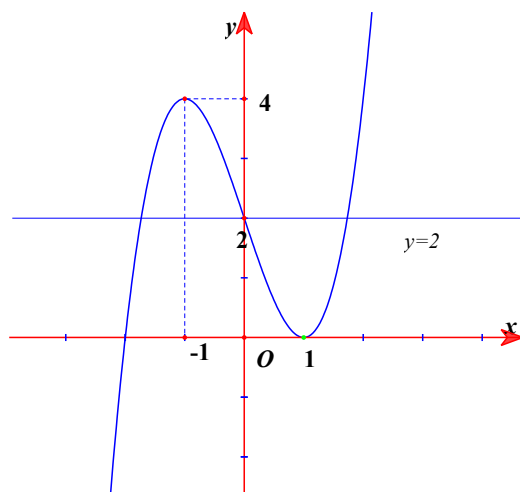
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Ta xét mẫu số: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:



+) Phương trình (1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép)

$$\Rightarrow f(x) = (x-a)(x-1)^2$$

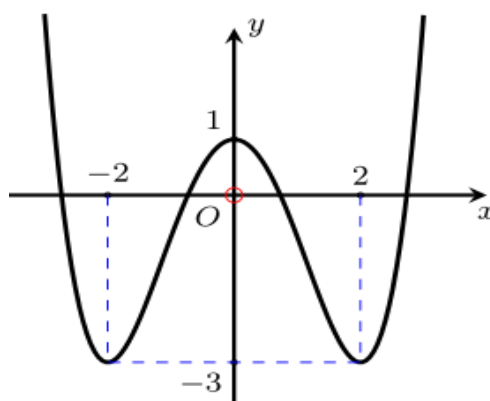
+) Phương trình (2) có nghiệm $x_3 = b \in (a; -1)$, $x_4 = 0$ và $x_5 = c > 1$

$$\Rightarrow f(x) - 2 = (x-b)x(x-c)$$

Do đó
$$g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f(x)[f(x)-2]} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-a)(x-1)^2 \cdot (x-b)x(x-c)} = \frac{x+1}{(x-a)(x-b)x(x-c)}$$

⇒ đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 3. Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A.

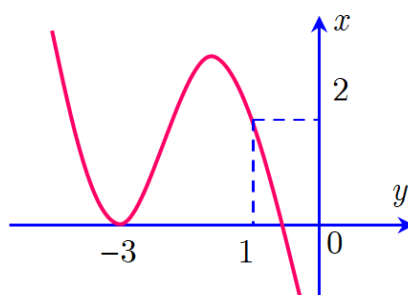
$$f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = x_1 < -2; x = x_2 > 2 \\ x = -2; x = 2 \end{cases}$$

Xét phương trình

Trong đó nghiệm $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$ đều có bội 2 và $x = x_1 (x_1 < -2)$, $x = x_2 (x_2 > 2)$ là nghiệm đơn (bội 1).

So sánh bội nghiệm ở mẫu và bội nghiệm ở tử thì thấy đồ thị có các TCD là $x = 0$; $x = 2$; $x = x_1$; $x = x_2$

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình bên.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[(f(x))^2 - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + x \geq 0 \\ [f(x)]^2 - 2f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq -1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}$$

Điều kiện:

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = -3$ (bội 2), và nghiệm $x = x_0$; $x_0 \in (-1; 0)$ nên: $f(x) = a(x+3)^2(x-x_0)$

Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x = -1$; $x = x_1$; $x_1 \in (-3; -1)$; $x = x_2$; ($x_2 < -3$). Nên $f(x) - 2 = a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)$.

$$g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[(f(x))^2 - 2f(x)]} = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x \cdot f(x)[f(x) - 2]}$$

Do đó:

$$= \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2+x}}{x \cdot a(x+3)^2 \cdot (x-x_0) \cdot a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\sqrt{x^2+x}}{a^2 x(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{a^2 \sqrt{x}(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = +\infty$ nên $x = 0$ là một đường tiệm cận

đứng của đồ thị $y = g(x)$

+) Các đường thẳng $x = -3$; $x = x_1$; $x = x_2$ đều là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$

Do đó đồ thị $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

+) Hàm số $y = g(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn và bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên đồ thị $y = f(x)$ có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 đường tiệm cận.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0 +	
$f(x)$	-2	$+\infty$	5	3

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{1}{f(x) - 5}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y = g(x)$ xác định khi $f(x)$ xác định và $f(x) \neq 5$ hay $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq a \ (a < 1) \\ x \neq b \ (b > 2) \end{cases}$.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) - 5] = 0, f(x) < 5 \text{ khi } x \rightarrow 1^+ \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) - 5] = 0, f(x) > 5 \text{ khi } x \rightarrow a^+ \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) - 5] = 0, f(x) > 5 \text{ khi } x \rightarrow b^+ \end{cases}$

nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng: $x = 1, x = a, x = b$.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{1}{7}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang:

$y = 0, y = -\frac{1}{7}$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 5.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{x^4 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D.

$$f^2(x) - 4f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a, a \in (-\infty; -1) \\ x = 1 \text{ (ng kép)} \\ x = -1 \text{ (ng kép)} \\ x = b, b \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Xét phương trình

$$\Rightarrow f^2(x) - 4f(x) = h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2, \quad h(x) \neq 0$$

$$y = g(x) = \frac{x^4 - 1}{f^2(x) - 4f(x)} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2}$$

Do đó

$$= \frac{x^2 + 1}{h(x)(x-a)(x-1)(x-b)(x+1)}$$

$$y = g(x) = \frac{x^4 - 1}{f^2(x) - 4f(x)} \text{ có 4 tiệm cận đứng.}$$

Câu 7. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có BBT như sau:

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	-3	2	$-\infty$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x) + 3f(x)}$ là :

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

Lời giải

Chọn C.

$$f^2(x) + 3f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = -3 \end{cases}$$

Xét PT trong đó:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = x_1 \in (1; 2) \text{ (ng kép)} \\ x = x_2 \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$f(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (ng kép)} \\ x = x_3 \in (-\infty; -3) \text{ (kết luận do } x \geq -3) \\ x = x_4 \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Kiểm tra các giới hạn ta thấy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x) + 3f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng là

$$x = 0; x = 1; x = x_1; x = x_2; x = x_4$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên R và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tổng

số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3}$ là:

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1

Lời giải

Chọn A.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \cdot f(x) + \frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} = -2 \Rightarrow y = -2 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \cdot f(x) + \frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} = 4 \Rightarrow y = 4 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2\sqrt{10} \cdot f(-3) + 1}{x+3} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2\sqrt{10} \cdot f(-3) + 1}{x+3} = \pm\infty$$

$\Rightarrow x = -3$ là tiệm cận đứng.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = 1$ và hàm số

$y = g(x) = \frac{5f(x) - 1}{[f^2(x) + 1](2x - 3)}$. Trong các khẳng định sau về đồ thị hàm số $y = g(x)$, khẳng định nào đúng:

- A. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tiệm cận ngang $y = 2$ và không có tiệm cận đứng.
- C. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tiệm cận ngang $y = 0$ và tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$.
- D. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tiệm cận ngang $y = 2$ và tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có :

$$+) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5f(x)-1}{[f^2(x)+1](2x-3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5f(x)-1}{2x-3} = 0$$

suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=g(x)$.

$$+) \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^+} \frac{5f(x)-1}{[f^2(x)+1](2x-3)} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^+} \frac{5f(x)-1}{2x-3} = +\infty$$

suy ra đường thẳng $x=\frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=1$ và $f(x)<1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = \frac{2f^3(x)+f^2(x)-2f(x)-1}{f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)-2}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số $g(x)$ có các đường tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=0$.
- B. Đồ thị hàm số $g(x)$ có các đường tiệm cận ngang là $y=-2$ và $y=0$.
- C. Đồ thị hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=2$.
- D. Đồ thị hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=-2$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f^3(x)+f^2(x)-2f(x)-1}{f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{1}{f(x)}-\frac{2}{f^2(x)}-\frac{1}{f^3(x)}}{1-\frac{4}{f(x)}+\frac{5}{f^2(x)}-\frac{2}{f^3(x)}} = 2$$

vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=-\infty$.

$\Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f^3(x)+f^2(x)-2f(x)-1}{f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2f(x)+1][f(x)+1][f(x)-1]}{[f(x)-1]^2[f(x)-2]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2f(x)+1][f(x)+1]}{[f(x)-1][f(x)-2]} = +\infty$$

vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=1$ và $f(x)<1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 11. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		-	-	0	+
y	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

Lời giải

Đáp án: hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có 4 đường tiệm cận .

Nhìn vào bảng biến thiên ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)-1} = -1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)-1} = 0$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = -1$; $y = 0$.

$$f(x)-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a; a < -1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)-1} = +\infty \quad . \quad \text{Vì } f(x) > 1 \text{ khi } x \rightarrow 0 \quad .$$

Tương tự , $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)-1} = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận đứng là hai đường thẳng $x=a$; $x=1$.

Vậy hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có 4 đường tiệm cận .

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	-5	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{f^2(x) + 2f(x) + 1}{f^2(x) - 9}$ có tổng số tất cả các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là

Lời giải

Đáp án: tổng số các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$ là 6.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{f(x)} + \frac{1}{f(x)}}{1 - \frac{9}{f^2(x)}} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{f(x)} + \frac{1}{f(x)}}{1 - \frac{9}{f^2(x)}} = 1$$

Ta có

và

Suy ra đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y = g(x)$.

$$y = g(x) = \frac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a < -1 \\ x = b > 4 \end{cases}$$

Dựa vào BBT ta có

Với $x > 0 \Rightarrow f(x) < 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)} = -\infty$ suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng.

Với $x > a \Rightarrow f(x) < 3$, $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)} = -\infty$ suy ra đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng.

Với $x > b \Rightarrow f(x) > 3$, $\lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = b$ là tiệm cận đứng.

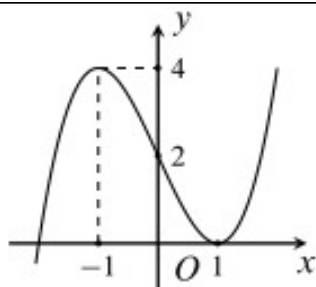
Dựa vào BBT ta có $f(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = c, 0 < c < 4 \\ x = d, d > 4 \end{cases}$ khi đó

Với $x > c \Rightarrow f(x) < -3$, $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = c$ là tiệm cận đứng.

Với $x > d \Rightarrow f(x) > -3$, $\lim_{x \rightarrow d^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow d^+} \frac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = d$ là tiệm cận đứng.

Vậy tổng số các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$ là 6.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $f(x)$ như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận **đứng**?

Lời giải

Đáp án: đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

$$f^2(x) - 4f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 4 \end{cases}$$

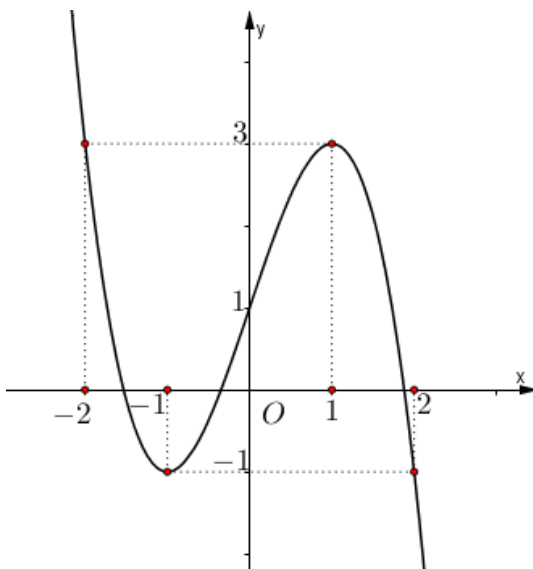
Xét

Xét $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1 \neq \pm 1$ và $x_2 = 1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại $x = 1$). Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Xét $f(x) = 4$ có 2 nghiệm $x_3 \neq \pm 1$ và $x_4 = -1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại $x = -1$). Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận **đứng**?

Lời giải

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$$

Đáp án: đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f^2(x) - f(x) \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hàm số xác định

$$\text{Xét } (x+1)[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f^2(x) - f(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

* Với $f(x) = 0$:

Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_3 < x_2 < 0 < x_1$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm $x = x_1$.

* Với $f(x) = 1$:

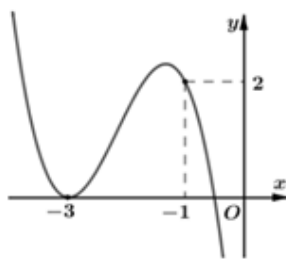
Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_6 < x_5 = 0 < x_4$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x) = 1$ có 2 nghiệm $x = x_5$ và $x = x_4$ và cả 2 nghiệm này đều khác x_1 .

Suy ra phương trình $(x+1)[f^2(x) - f(x)] = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$ có 3 tiệm cận đứng.

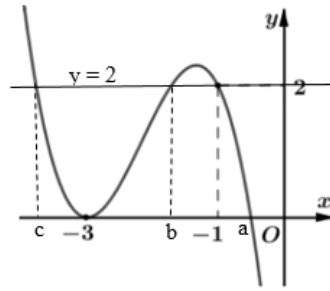
Câu 15. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đồ thị hàm $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

Đáp án: có 4 đường tiệm cận đứng.



Ta thấy phương trình bậc ba $f(x)=2$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1=c < -3$, $x_2=b$ với $-3 < b < -1$ và $x_3=-1$.

Và phương trình bậc ba $f(x)=0$ có nghiệm kép $x=-3$ và nghiệm đơn $x=a$ với $-1 < a < 0$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -(x+3)^2(x-a)=0 \quad \text{và} \quad f(x)=2 \Leftrightarrow -(x-c)(x-b)(x+1)=0$$

Ta có:

$$y = \frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]}$$

Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x} \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+1)\sqrt{x(x+1)}}{-x(x+3)(x-a) \cdot [f(x)-2]} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} y = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x \cdot f(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} y = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x \cdot f(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x \cdot f(x)(x-c)(x-b)} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]}$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$; $x=-3$; $x=c$; $x=b$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Phương

trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là bốn..

Đặt
$$h(x) = \frac{1}{2f(x) - 1}$$

*) Tiệm cận ngang:

Ta có:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x) - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x) - 1} = 0$$

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

*) Tiệm cận đứng:

Xét phương trình: $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < b < c$.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a$, $x = b$ và $x = c$.

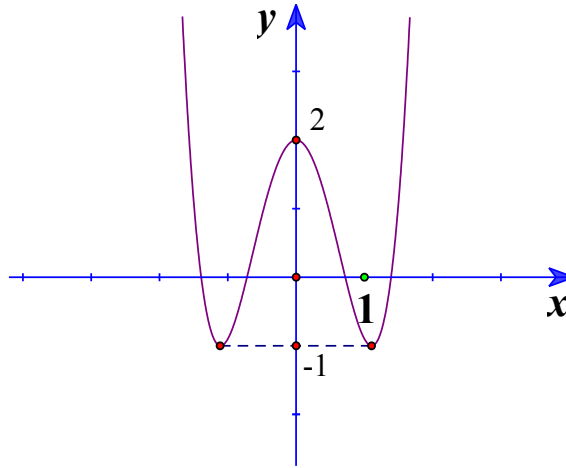
Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là bốn.

DẠNG 2

BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN VÀ HÀM SỐ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ CHỨA THAM SỐ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020x}{f(x)[f(x) - m]}$ có tổng số 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, do đó đồ thị hàm số $g(x)$ luôn có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1; -2 < x_1 < -1 \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (0; 1) \\ x = x_4 \in (1; 2) \end{cases}$$

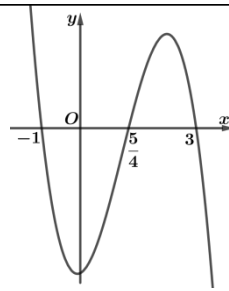
Phương trình

Ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt đều khác 0 nên $x = x_1, x = x_2, x = x_3, x = x_4$ là 4 tiệm cận đứng đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy để đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng thì phương trình

$f(x) = m$ phải có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác với 4 nghiệm $x_i (i = \overline{1, 4}) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \neq 0 \end{cases}$ mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$.

Câu 18. Cho hàm số $g(x) = \frac{2018}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 2.

A. 11.

B. 10.

C. 9.

D. 20.

Lời giải

Chọn B.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases} \text{ và } (m < 0).$$

Ta có $h'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Từ đồ thị ta có

$$h'(x) = 4m(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$$

Suy ra

$$h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx + C$$

Suy ra . Từ đề bài ta có $C = 0$.

$$h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx$$

Vậy

$$h(x) - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$$

Xét

$$f(x) = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 13x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}$$

Xét hàm số

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{35}{3}$	$\frac{7807}{768}$	-1	$+\infty$

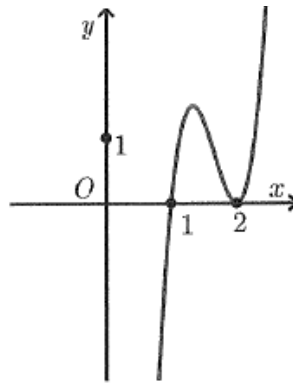
Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x) - m^2 - m = 0$ có 2 nghiệm

phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m < 0$ ta có $-\frac{35}{3} < m < -1$.

Do m nguyên nên $m \in [-11; -10; \dots; -2]$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của $m \in [-10; 1]$ để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{[f(x) - m][f(x) - 1]}$ có đúng bốn đường tiệm cận đứng là :

A. 9.

B. 12.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn C.

$$* x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$* (f(x) - m)(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (1; 2) \\ x = b \in (2; 3) \\ x = c \in (3; 4) \end{cases}$$

Nhìn vào đồ thị hàm số ta có $f(x) = 1$ có ba nghiệm phân biệt (có ba tiệm cận)

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng 4 tiệm cận đứng với $m \in [-10; 1]$ là $m \in [-10; 0]$

Do đó số giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 11 số.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	1	$+\infty$	3	$-\infty$

Số giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{1}{f(x) - m}$ có đúng 5 tiệm cận là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C.

Xét PT $f(x) - m = 0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm khi $1 < m < 3$ và $y = g(x)$ có tử số bằng 1 luôn khác 0 với mọi giá trị của m nên đồ thị $y = g(x)$ có nhiều nhất là 3 TCD

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{1-m}$ nên đồ thị $y = g(x)$ có 2 TCN nếu $m \neq 1$, 1 TCN nếu $m = 1$.

Vậy đồ thị $y = g(x)$ có đúng 5 TC khi $1 < m < 3$. Kết hợp $m \in \mathbb{Z}$ được $m = 2$.

Suy ra có 1 giá trị nguyên của m .

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	1	$+\infty$	6

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{f^2(x)}{f(x) - m}$ có đúng 3 tiệm cận đứng.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f^2(x)}{f(x) - m} = +\infty$ nên $\forall m$, đồ thị hàm số $y = g(x)$ luôn có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ thì phương trình $f(x) - m = 0$ tối đa 2 nghiệm. Vậy để đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng 3 tiệm cận đứng thì điều kiện cần là phương trình $f(x) = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2 $\Leftrightarrow 3 < m < 6$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow x_1} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f^2(x)}{f(x) - m} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_2} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f^2(x)}{f(x) - m} = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$

có 2 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$.

Vậy với $3 < m < 6$ thì đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng 3 tiệm cận đứng. Do m nguyên nên có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m = 4$ và $m = 5$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	2	$-\infty$	

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$ có đúng ba đường tiệm cận.

- A. $m > 2$. B. không tồn tại m . C. $m \leq 2$. D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$ là: $\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \neq m \end{cases}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$ luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$ có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

Suy ra phương trình $f(x) - m = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $(0; +\infty)$. Từ bảng biến thiên suy ra $m < 2$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Có bao nhiêu giá trị

nguyên của tham số m thuộc $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{\sqrt{2f(x) - f^2(x)} + m}$ có tiệm cận ngang nằm bên dưới đường thẳng $y = -1$.

- A. 4041. B. 2019. C. 1. D. 10.

Lời giải

Chọn C.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên khi $x \rightarrow +\infty$ thì $2f(x) - f^2(x) \rightarrow -\infty$ vì vậy $\sqrt{2f(x) - f^2(x)}$ không có nghĩa

nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

Trước hết $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2f(x) - f^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} [2f(x) - f^2(x)]} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)(\sqrt{x^2 + 3x} - x)}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1 \right)} = -\frac{3}{2}$$

Từ đó có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-3}{2m+2}$ nên đồ thị hàm số $g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{-3}{2m+2}$.

Để tiệm cận ngang tìm được ở trên nằm dưới đường thẳng $y = -1$ thì điều kiện cần và đủ là $\frac{-3}{2m+2} < -1$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2m+2} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 2m+2 \\ 2m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2}$$

Tức có duy nhất giá trị nguyên $m = 0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Tập hợp tất cả các giá trị

thực của tham số m để đồ thị hàm $g(x) = \frac{f(x)+1}{\sqrt{m \cdot f^2(x)+2}}$ có hai đường tiệm cận ngang là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ B. $(0; +\infty)$ C. $(-\infty; 0)$ D. $\{0\}$

Lời giải

Chọn B.

TH1: $m = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)+1}{\sqrt{2}} = \pm\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

TH2: $m < 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^2(x) = +\infty$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (m \cdot f^2(x) + 2) = -\infty$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$ không tồn tại.

TH3: $m > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+1}{\sqrt{m \cdot f^2(x)+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)}{|f(x)| \sqrt{m + \frac{2}{f^2(x)}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)}{\sqrt{m + \frac{2}{f^2(x)}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

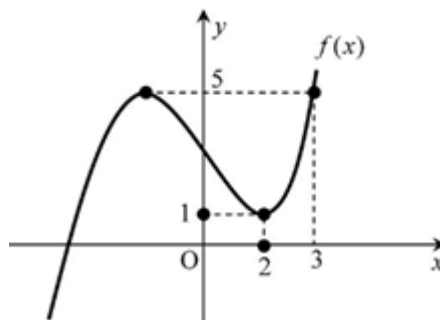
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)+1}{\sqrt{m \cdot f^2(x)+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)}{|f(x)| \sqrt{m + \frac{2}{f^2(x)}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{- \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)}{\sqrt{m + \frac{2}{f^2(x)}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = \frac{1}{\sqrt{m}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Tóm lại, tập hợp cần tìm là $(0; +\infty)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 25. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{m-x}}{f(x)-m}$ có tất cả 4 đường tiệm cận. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: tập S gồm 2 phần tử..

Với điều kiện $x \leq m$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{m-x}}{f(x)-m}$ có 4 đường tiệm cận thì đồ thị phải có 3 đường tiệm cận đứng, suy ra phương trình $f(x) - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x thỏa mãn $x \leq m$.

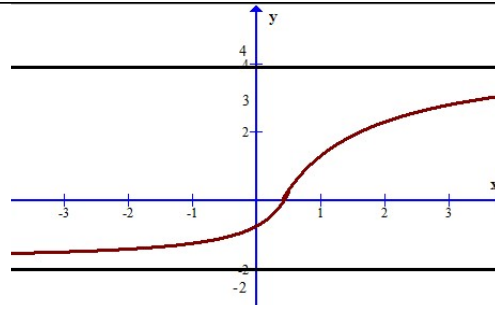
Từ đồ thị, phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm khi $1 < m < 5$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4\}$.

+ Trường hợp 1: Với $m = 2$: Từ đồ thị, phương trình $f(x) - 2 = 0$ có 3 nghiệm $x_1 < x_2 < 2 < x_3$, suy ra $m = 2$ không thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: Với $m \in \{3; 4\}$: Từ đồ thị, phương trình $f(x) - m = 0$ có 3 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3 < 3$, suy ra $m = 3$, $m = 4$ thỏa mãn.

Vậy tập S gồm 2 phần tử.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4|$ có đúng một tiệm cận ngang?

Lời giải

Đáp án: có 3 giá trị m là $0; 8; 35$.

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4|$ có đúng một tiệm cận ngang thì đồ thị hàm số $y = f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4$ có hai tiệm cận ngang đối xứng nhau qua trục hoành, khi đó từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta tịnh tiến xuống đúng 1 đơn vị. Vậy $\sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4 = -1$.

Giải $\sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} = 3$ ta đặt $u = \sqrt[3]{8-m}$ $v = \sqrt{m+1}$ ($v \geq 0$)

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^3 + v^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \quad (u \leq 3) \\ u^3 + u^2 - 6u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 2 \\ u = -3 \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ:

tìm được ba giá trị m là $0; 8; 35$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		1	2		-15		$+\infty$

Tìm số các giá trị nguyên âm của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2021}{f(x) - m}$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 3.

Lời giải

Đáp án: 14 giá trị với $m \in \{-14; -13; -12; -11; \dots; -2; -1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2021}{f(x) - m} = 0$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$ là $y = 0$.

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có hai đường tiệm cận đứng
 $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) - m = 0$ có số nghiệm là 2 $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = m$ có số nghiệm là 2.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(x) = m$ có số nghiệm là 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -15 < m < 1 \end{cases}$.

Mà tham số m là số nguyên âm. Vậy $m \in \{-14; -13; -12; -11; \dots; -2; -1\}$.

Câu 28. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	0	1	0

$$y = g(x) = \frac{1}{(f(x))^2 - m}$$

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận đứng.

Lời giải

Đáp án: $0 < m < 1$.

Xét phương trình $(f(x))^2 - m = 0 \Leftrightarrow (f(x))^2 = m$ (*)

TH1: nếu $m < 0$ thì phương trình (*) vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH2: nếu $m = 0$ thì phương trình (*) $\Leftrightarrow f(x) = 0$ vô nghiệm. Nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH3: nếu $m > 0$ thì phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{m} & (1) \\ f(x) = -\sqrt{m} & (2) \end{cases}$

Với (1): khi $0 < m < 1$ thì (1) có 2 nghiệm; $m = 1$ thì (1) có nghiệm duy nhất

Với (2): do $m > 0$ nên $-\sqrt{m} < 0 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{m}$ vô nghiệm.

Vậy để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng thì $0 < m < 1$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Có bao nhiêu số

nguyên dương m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(\sqrt{3x+1} - 2)f(x)}{(x^2 - 4x + m)\sqrt{f^2(x) + 1}}$ có đúng 2 đường tiệm cận.

Lời giải

Đáp án: có hai giá trị m là số nguyên dương $m \in \{3; 4\}$..

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$: $x \geq -\frac{1}{3}; x^2 - 4x + m \neq 0$

Vì $x \geq -\frac{1}{3}$ nên không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

Vì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow f(x) > 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot (\sqrt{3x+1} - 2)}{\sqrt{f^2(x)+1} \cdot (x^2 - 4x + m)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{f^2(x)}}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{m}{x^2}} = 1 \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Ta có
$$g(x) = \frac{(\sqrt{3x+1} - 2)f(x)}{(x^2 - 4x + m)\sqrt{f^2(x)+1}} = \frac{(3x-3)f(x)}{(x^2 - 4x + m)(\sqrt{3x+1} + 2)\sqrt{f^2(x)+1}}$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng hai tiệm cận khi và chỉ khi nó có đúng một tiệm cận đứng, tức là phương

trình $x^2 - 4x + m = 0$ có nghiệm kép $x_0, x_0 \geq -\frac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trong đó

$x_1 = 1, x_2 \neq 1, x_2 \geq -\frac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 trong đó $x_3 < -\frac{1}{3}, x_4 \geq -\frac{1}{3}, x_4 \neq 1$.

Xét bảng biến thiên của hàm số $h(x) = -x^2 + 4x$:

x	$-\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$-x^2 + 4x$	$-\frac{13}{9}$	3	4	$-\infty$

Ta có $x^2 - 4x + m = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 + 4x$ (1)

Từ bảng biến thiên suy ra
$$\begin{cases} m = 4 \\ m = 3 \\ m < -\frac{13}{9} \end{cases}$$
. Do m là số nguyên dương nên $m \in \{3; 4\}$.