Hạ Vũ Anh

GÓC ĐỊNH HƯỚNG VÀ ÁP DỤNG

Vĩnh Yên tháng 7 năm 2007

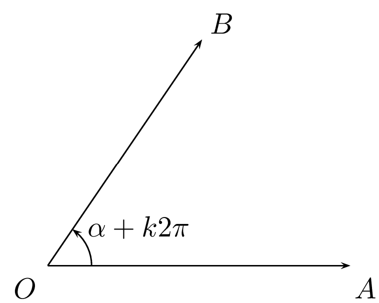
Góc định hướng và áp dụng

1. Góc định hướng

1.1 Góc giữa hai tia

Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$, đặt $\alpha = \angle AOB$. Khi đó góc (định hướng) giữa véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ và véc-tơ $\overrightarrow{OB}$, ký hiệu $\angle(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ hay $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$, là góc $\alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Khi đó, góc (định hướng) giữa véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và véc-tơ $\overrightarrow{b}$, ký hiệu $\angle(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b})$ hay $(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b})$, là góc $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$, trong đó



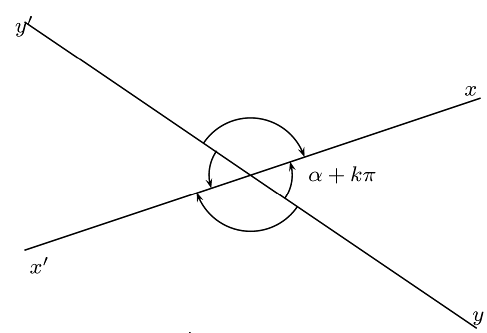
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$$

Cho góc $\angle xOy = \alpha$. Khi đó góc (định hướng) giữa tia Ox và tia Oy, ký hiệu $\angle(Ox;Oy)$ hay (Ox,Oy), là góc $\alpha + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Định lý 1 (Chalès). $(Ox;Oy) + (Oy;Oz) = (Ox;Oz) \pmod{2\pi}$

1.2 Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $x'Ox, y'Oy$ cắt nhau tại O. Đặt $\angle xOy = \angle x'Oy' = \alpha$, khi đó $\angle x'Oy = \angle xOy' = \pi - \alpha$. Vậy, góc (định hướng) giữa đường thẳng $x'Ox$ và đường thẳng $y'Oy$, ký hiệu $\angle(x'Ox;y'Oy)$ hay $(x'Ox;y'Oy)$, là góc $\alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



Nhận xét. Nếu $\alpha = \beta \pmod{2\pi}$ thì $\alpha = \beta \pmod{\pi}$. Điều ngược lại nói chung không đúng.

Định lý 2 (Chalès). $(a;b) + (b;c) = (a;c) \pmod{\pi}$

Từ đó, ta có được các kết quả sau

Định lý 3. *Bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường thẳng hay đường tròn iff* $(AB; AC) = (DB; DC) \pmod{\pi}$ *iff* $(AB; AD) = (CB; CD) \pmod{\pi}$

Định lý 4. *Cho $A, B, C \in (O)$. Khi đó*

$$(AB; AC) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) \pmod{\pi}$$

Định lý 5. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), $AB \cap CD = P, AC \cap BD = Q$. Khi đó*

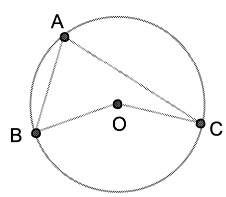
$$Sđ(PA; PD) = Sđ(PB; PC) = \frac{1}{2} \cdot \left(Sđ\ \overset{\curvearrowright}{BC} + Sđ\ \overset{\curvearrowright}{AD} \right) \pmod{\pi}$$

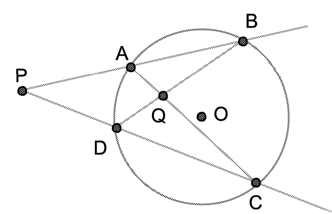
và

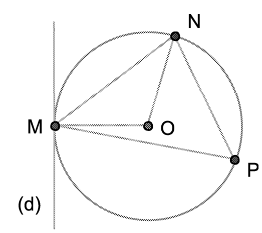
$$Sđ(QA; QD) = Sđ(QC; QB) = \frac{1}{2} \cdot \left(Sđ\ \overset{\curvearrowright}{CB} + Sđ\ \overset{\curvearrowright}{AD} \right) \pmod{\pi}$$

Định lý 6. *Cho đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn (O) tại M và $N, P \in (O), \neq M$. Khi đó*

$$Sđ(d; MN) = Sđ(PM; PN) \pmod{\pi}$$

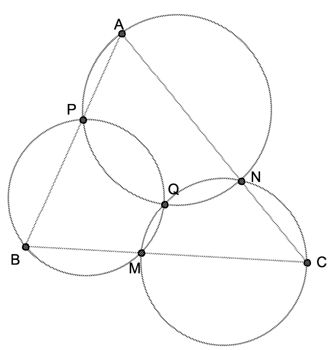


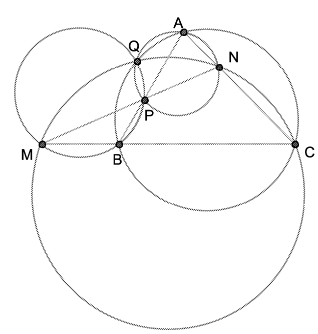




Định lý 7 (Miquel). *Các điểm M, N, P theo thứ tự nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Khi đó các đường tròn $(ANP), (BPM), (CMN)$ cùng đi qua một điểm.*

Hệ quả 1. *Một đường thẳng cắt các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC theo thứ tự tại M, N, P. Khi đó các đường tròn $(ABC), (ANP)$, (BPM), và (CMN) cùng đi qua một điểm.*





Định lý 8. *1.* $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}) = \pi + (\overrightarrow{a}; -\overrightarrow{b}) \pmod{2\pi}$

2. Nếu $Ox \upuparrows O'x'; Oy \upuparrows O'y'$ *thì* $(Ox; Oy) = (O'x'; O'y') \pmod{2\pi}$

3. Nếu $Ox \uparrow\downarrow O'x'; Oy \uparrow\downarrow O'y'$ *thì* $(Ox; Oy) = (O'x'; O'y') \pmod{2\pi}$

4. Nếu $a \parallel a', b \parallel b'$ *thì* $(a; b) = (a'; b') \pmod{\pi}$

5. Nếu $a \perp a', b \perp b'$ *thì* $(a; b) = (a'; b') \pmod{\pi}$

2. Một số áp dụng

1. Cho tam giác ABC với trực tâm H nội tiếp trong đường tròn tâm (O). Gọi A_1, A_2 theo thứ tự là điểm đối xứng với H qua BC và trung điểm BC. Các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 được xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng $A_i, B_i, C_i \in (O)$

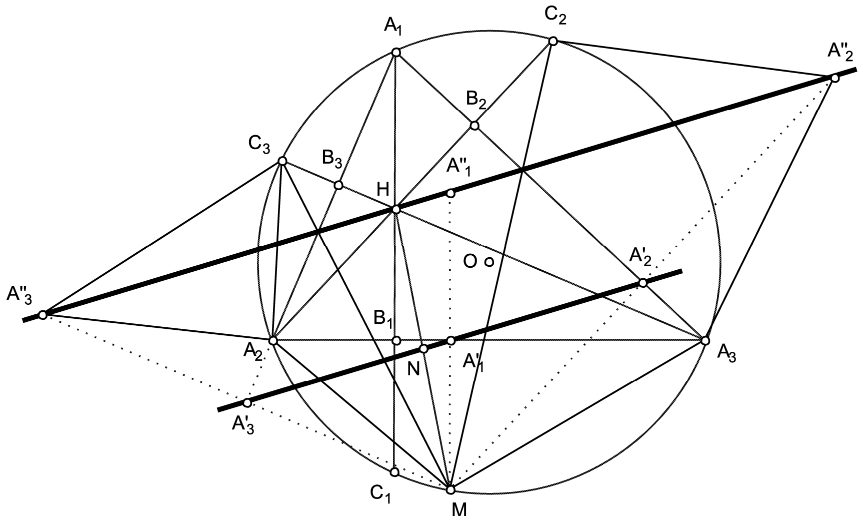
2. Cho hai đương tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Xét $M_i \in (O_i)$ sao cho $(\overrightarrow{O_1A}; \overrightarrow{O_1M_1}) = (\overrightarrow{O_2A}; \overrightarrow{O_2M_2}) \pmod{2\pi}$. Chứng minh rằng M_1, B, M_2 thẳng hàng

3. Cho tam giác $A_1A_2A_3$ với trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O). Với mỗi điểm $M \in (O)$, gọi A_i', A_i'' là hình chiếu, điểm đối xứng của M qua đường thẳng $A_{i+1}A_{i+2}$.

   (a) Chứng minh rằng các điểm A_i'' cùng nằm trên một đường thẳng đi qua H (Đường thẳng Steiner)

   (b) Chứng minh rằng các điểm A_i' cùng nằm trên một đường thẳng đi qua trung điểm HM (Đường thẳng Simson)

   Lời giải.



Để ý rằng, các điểm đối xứng với H qua các đường thẳng BC, CA, AB nằm trên đường tròn (O). Do đó

$$(HA_3''; HA_2) = (C_3A_2; C_3M) = (A_1A_2; A_1M) \pmod{\pi}$$

$$(HA_3; HA_2'') = (C_2M; C_2A_3) = (A_1M; A_1A_3) \pmod{\pi}$$

$$(HA_2; HA_3) = (HB_2; HB_3) = (A_1B_2; A_1B_3) = (A_1A_3; A_1A_2) \pmod{\pi}$$

Suy ra $(HA_3''; HA_2'') = 0 \pmod{\pi}$

Tương tự, cũng có $(HA_3''; HA_1'') \pmod{\pi}$

Từ đó, suy ra điều phải chứng minh.

4. Xét điểm D trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, không trùng với các đỉnh. Gọi s_a, s_b, s_c và s_d theo thứ tự là đường thẳng Simpson của A, B, C và D đối với tam giác BCA, CDA, DAB và ABC.

   (a) Chứng minh rằng s_a, s_b, s_c, s_d đồng quy tại một điểm P

   (b) Tìm quỹ tích của P khi D thay đổi trên đường tròn, nhưng không trùng với A, B, C

5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Xét một đường kính PQ của (O). Ký hiệu $s(P; ABC), s(Q; ABC)$ theo thứ tự là đường thẳng Simson của P, Q đối với tam giác ABC.

   (a) Chứng minh rằng $s(P; ABC) \perp s(Q; ABC)$

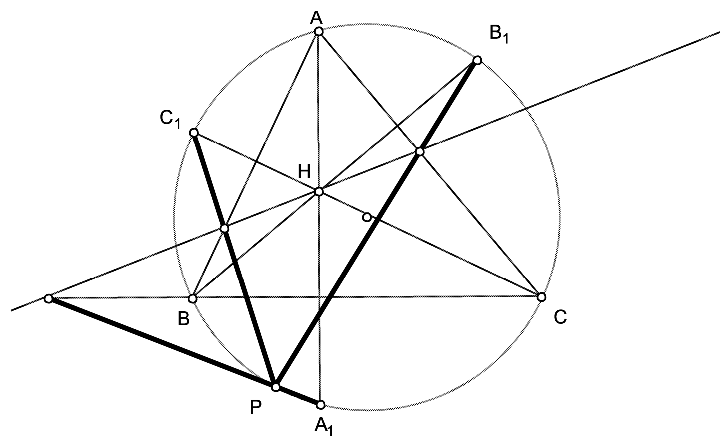
(b) Tìm quỹ tích giao điểm của $s(P;ABC), s(Q;ABC)$ khi P, Q thay đổi.

6. Cho lục giác lồi $ABCDEF$ nội tiếp trong đường tròn (O). Chứng minh rằng $s(A;BDF), s(B;ACE), s(D;ABF)$ và $s(E;ABC)$ đồng quy khi và chỉ khi $CDEF$ là một hình chữ nhật.

7. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H và ℓ là một đường thẳng tùy ý qua H. Gọi ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với ℓ qua các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

(Bulgarian 1999)

Lời giải.



Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là các điểm đối xứng với H qua các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó, dễ dàng chứng minh được $A_1, B_1, C_1 \in (ABC)$, ngoài ra

$$\begin{aligned}(\ell_a;\ell_b) &= (\ell_a;BC) + (BC;CA) + (CA;\ell_b) \pmod{\pi}\\ &= (BC;\ell) + (BC;CA) + (\ell;CA) \pmod{\pi}\\ &= 2(CB;CA) = (CA_1;CB_1) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Suy ra $\ell_a \cap \ell_b \in (ABC)$

Tương tự, cũng có $\ell_b \cap \ell_c, \ell_c \cap \ell_a \in (ABC)$

Từ đó, do một đường thẳng và một đường tròn cắt nhau tại nhiều nhất hai điểm, suy ra điều phải chứng minh.

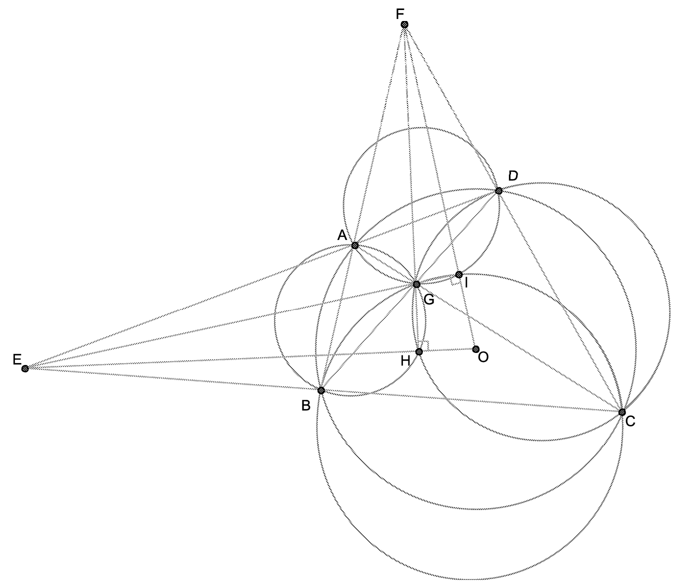
8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi $E = AD \cap BC, F = AB \cap CD, G = AC \cap BD$. Đường tròn (ADG) và đường tròn (CDG) cắt nhau

tại điểm thứ hai I, đường tròn (ABG) và đường tròn (CDG) cắt nhau tại điểm thứ hai H.

(a) Chứng minh rằng E, H, O thẳng hàng và F, I, O thẳng hàng.

(b) Chứng minh rằng $OI \perp EG$ và $OH \perp FG$. Từ đó suy ra O là trực tâm tam giác EFG

Lời giải.



1. Ta có

$$(IA; IB) = (IA; IG) + (IG; IB) = (DA; DG) + (CG; CB) = (OA; OB) \pmod{\pi}$$

Suy ra A, B, O, I đồng viên.
Tương tự, cũng có C, D, O, I đồng viên.

Vậy do $FA \cdot FB = FC \cdot FD$ nên F nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn $(ABO), (CDO)$. Suy ra F, I, O thẳng hàng.

Tương tự, cũng có E, H, O thẳng hàng.

2. $(IO; IG) = (IO; IC) + (IC; IG) = (DO; DC) + (BC; BG) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OC}) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Suy ra $OI \perp IG$
Tương tự, $OH \perp HG$. ĐPCM

9. Trong mặt phẳng cho trước hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ và một đường thẳng Δ cắt đường tròn (O_i) tại $A_i, B_i, i = 1, 2$. Chứng minh rằng giao điểm các tiếp

tuyến của (O_1) tại A_1, B_1 và các tiếp tuyến của (O_2) tại A_2, B_2 là bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn.

10. Cho tam giác ABC cân tại A. Xét một đường thẳng Δ quay quanh A, gọi D là điểm đối xứng với C qua Δ, các đường thẳng $BD.\Delta$ cắt nhau tại M. Tìm $\{M\}$

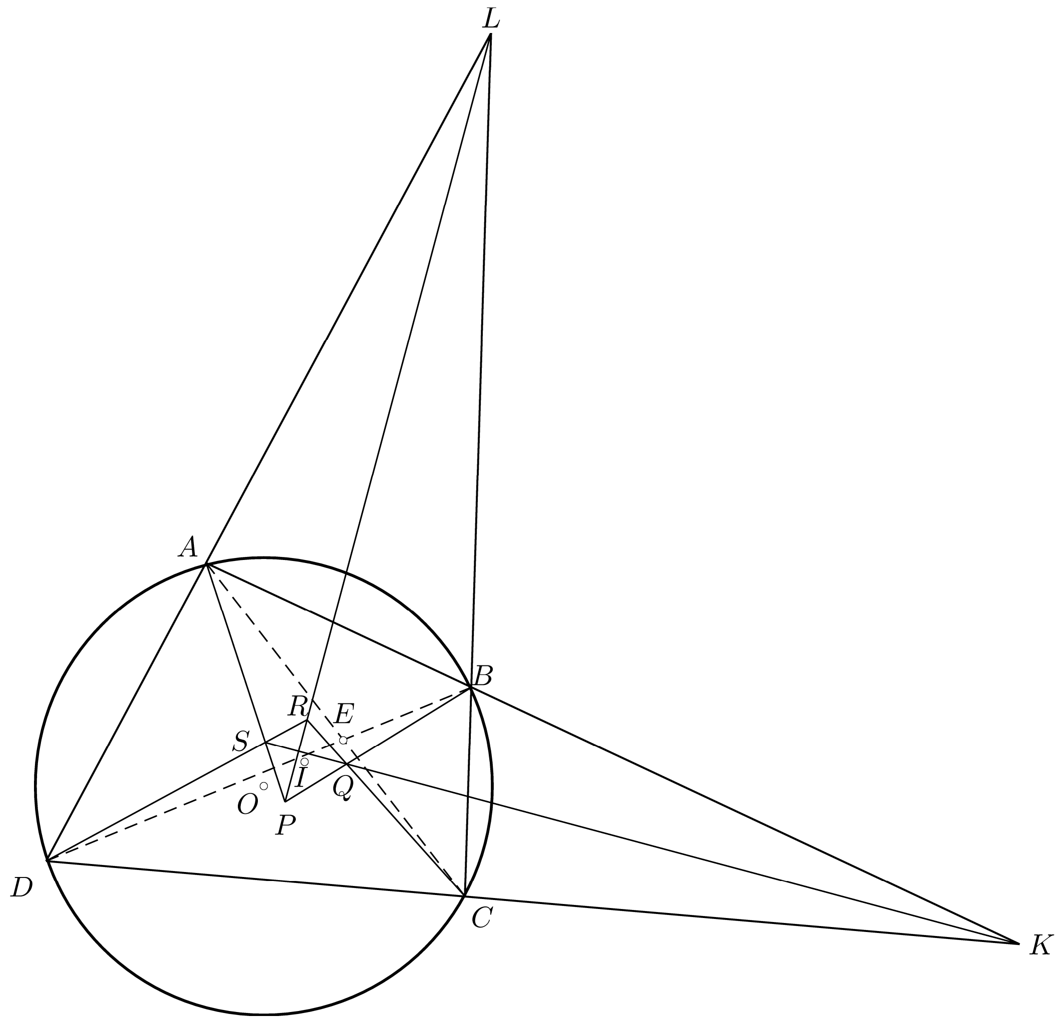
11. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), có hai đường chéo cắt nhau tại E. Phân giác của các góc $\angle DAB, \angle ABC$ cắt nhau tại P, của các góc $\angle ABC, \angle BCD$ cắt nhau tại Q, của các góc $\angle BCD, \angle CDA$ cắt nhau tại R, của các góc $\angle CDA, \angle DAB$ cắt nhau tại S.

    (a) Chứng minh rằng tứ giác $PQRS$ nội tiếp.

    (b) Chứng minh rằng O, E, I thẳng hàng (I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQRS$)

    (c) Chứng minh rằng $PR \perp QS$

    Lời giải.



a. Ký hiệu ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c và ℓ_d theo thứ tự là đường phân giác của các góc $\angle DAB, \angle ABC$, $\angle BCD$ và $\angle CDA$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\angle(PS;PQ) &\equiv \angle(\ell_a;\ell_b) \pmod \pi\\
&\equiv \angle(\ell_a;AB)+\angle(AB;\ell_b) \pmod \pi\\
&\equiv \frac{1}{2}\cdot\angle(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}\cdot\angle(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \pmod \pi\\
&\equiv \frac{1}{2}\cdot\Big(\pi+\angle(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})\Big)+\frac{1}{2}\cdot\Big(\pi+\angle(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})\Big) \pmod \pi\\
&\equiv \angle(CD;\ell_c)+\angle(\ell_d;CD) \pmod \pi\\
&\equiv \angle(\ell_d;\ell_c)\equiv\angle(RS;RQ) \pmod \pi
\end{aligned}$$

Do đó bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

b. Khi tứ giác $ABCD$ có một cặp cạnh (đối diện) song song, thì kết luận của bài toán là hiển nhiên. Vậy, ta chỉ cần xét trường hợp tứ giác $ABCD$ không có hai cạnh nào song song. Gọi $K=(AB)\cap(CD), L=(AD)\cap(BC)$.

Bổ đề. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và có $AC \cap BD = E, (AB) \cap (CD) = F, (DA) \cap (BC) = G$. Khi đó O là trực tâm tam giác PQR

(Đây là một kết quả cơ bản, các em học sinh hãy tự chứng minh (bằng ít nhất ba cách khác nhau))

Áp dụng bổ đề, ta được $OE \perp KL$ (1)

Từ giả thiết suy ra Q là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc $\angle BKC$ của $\triangle BKC$ và S là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ADK. Do đó Q, S nằm trên phân giác của góc $\angle BKC$ hay Q, S, K thẳng hàng. Tương tự, cũng được P, R, L thẳng hàng.
Ta có

$$\begin{aligned}
\angle(CR; CB) \equiv \angle(CR; CL) &\equiv \frac{1}{2} \cdot \angle(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CL}) \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \left[\angle(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{LD}) + \angle(\overrightarrow{LD}; \overrightarrow{CL})\right] \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \left[\angle(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DL}) + \angle(\overrightarrow{LD}; \overrightarrow{CL})\right] \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \left[\pi + \angle(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + \pi + \angle(\overrightarrow{LD}; \overrightarrow{LC})\right] \pmod{\pi} \\
&\equiv \angle(BL; BP) + \angle(LP; LC) \equiv \angle(PR; PB) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

Suy ra B, C, P, R cùng nằm trên một đường tròn, do đó $\overline{LB} \cdot \overline{LC} = \overline{LP} \cdot \overline{LR} \Rightarrow L$ nằm trên trục đẳng phương của (O) và $(PQRS)$. Tương tự cũng có K nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn này. Vậy (KL) là trục đẳng phương của (O) và đường tròn $(PQRS)$ suy ra $KL \perp OI$ (2)

Từ (1), (2) suy ra O, I, E thẳng hàng.

c. Theo chứng minh ở phần 2 thì

$$\angle(RP; RC) = \angle(BP; BQ) = \frac{1}{2} \cdot \angle(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \pmod{\pi} \tag{3}$$

Tương tự, cũng được

$$\angle(PR; PA) = \angle(DR; DA) = \frac{1}{2} \cdot \angle(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) \pmod{\pi} \tag{4}$$

Để ý rằng $\angle(RP; RC) = \angle(SP; SQ) \pmod{\pi}, \angle(PR; PA) = \angle(PR; PS) \pmod{\pi}$ (5)
và $\angle(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) + \angle(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) = \pi \pmod{2\pi}$ (6)

Từ (3),(4),(5),(6) suy ra $\angle(PR; PS) + \angle(SP; SQ) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Về cơ bản, đây chỉ là một bài toán hình học lớp 9, được ghép từ hai bài toán: bài thứ nhất được phát biểu trong lời giải trên dưới dạng bổ đề, bài toán thứ hai là "*Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $(AB) \cap (CD) = M, (AD) \cap (BC) = N$. Chứng minh rằng phân giác của các góc $\angle BMC$ và $\angle DNC$ vuông góc*". Tuy nhiên, nếu không dùng góc định hướng thì lời giải sẽ phụ thuộc vào hình vẽ. Một số học sinh lớp 11 còn lúng túng trong việc sử dụng khái niệm góc định hướng, và hầu hết các bài tham gia dự thi đều không để ý gì đến trường hợp tứ giác $ABCD$ có một cặp cạnh song song.

12. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi E, F, G theo thứ tự là giáo điểm của các cặp đường thẳng AB và CD, BC và DA, AC và BD. Các đường tròn $(DAE), (DCF)$ cắt nhau tại điểm thứ hai H. Phân giác của góc $\angle AHB$ cắt AB tại I, phân giác của góc $\angle DHC$ cắt CD tại J. Chứng minh rằng I, G, J thẳng hàng.

Lời giải 1. Từ giả thiết suy ra $(HD; HE) = (AD; AE) = (AD; AB) = (CD; CB) = (CD; CF) = (HD; HF) \pmod{\pi}$ do đó H, D, F thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề Mi-ken cho tam giác BEC, ta được các đường tròn $(BAF), (CFD)$ và (DEA) cùng đi qua một điểm (khác D). Do đó bốn đường tròn $(BAF), (CFD)$, $(DEA), (EAB)$ cùng đi qua H.

Vậy

$$(HA; HD) = (EA; ED) = (EB; EC) = (HB; HC) \pmod{\pi}$$

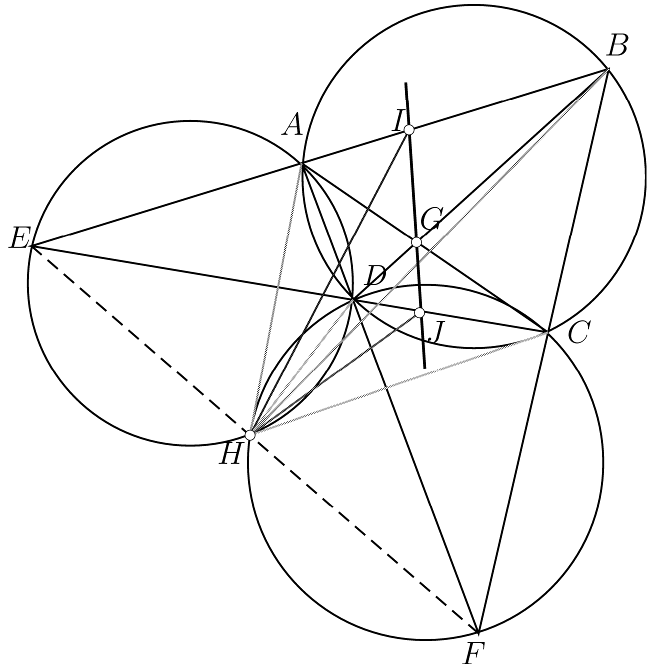
và

$$\begin{aligned}(CB; CH) &= (CB; CD) + (CD; CH) \pmod{\pi}\\ &= (AB; AD) + (FD; FH) \pmod{\pi}\\ &= (EA; EH) \pmod{\pi} = (DA; DH) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Suy ra $\triangle HCB \backsim \triangle HDA$. Vì vậy $\frac{HC}{HD} = \frac{HB}{HA} = \frac{BC}{DA}$

Từ đó $\frac{IB}{IA} = \frac{JC}{JD} = \frac{HC}{HD} = \frac{BC}{DA} = \frac{GC}{GD} = \frac{GB}{GA} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{IC}{ID} = \dfrac{GC}{GD} \\ \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{GB}{GA} \end{cases}$

Suy ra GI, GJ là phân giác của góc $\angle AGB, \angle CGD$ theo thứ tự đó và vì vậy, I, G, J thẳng hàng.



13. Cho $(O_1) \cap (O_2) = \{P; Q\}$. Xét $A_i, B_i \in (O_i)$ sao cho A_1, P, A_2 thẳng hàng và B_1, P, B_2 thẳng hàng. Gọi $C = A_1B_1 \cap A_2B_2$

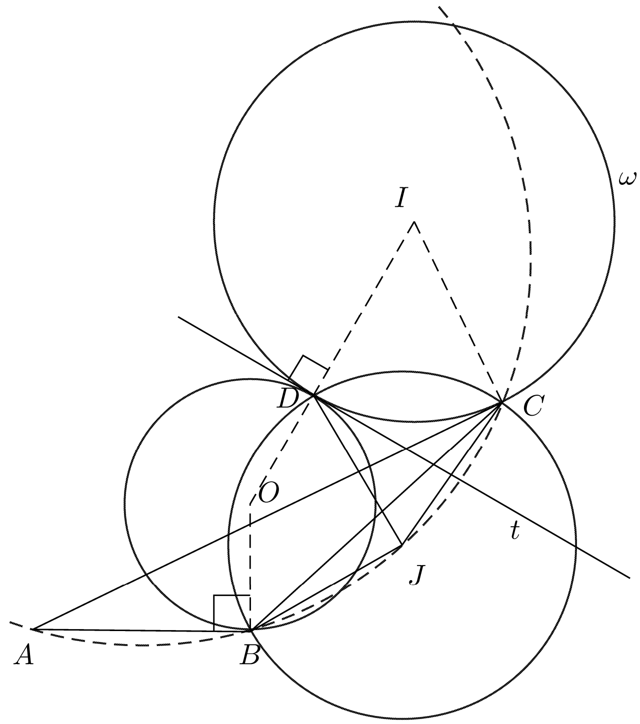
    (a) Chứng minh rằng A_1, A_2, C, Q đồng viên.

    (b) Gọi O là tâm của đường tròn (A_1A_2C). Chứng minh rằng O luôn chạy trên một đường tròn cố định.

14. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, AC của tam giác ABC. Một đường thẳng Δ quay quanh A, gọi P, Q là hình chiếu của B, C trên Δ và $PM \cap = QN = R$. Tìm $\{R\}$

15. Cho trước đường tròn (O) và hai điểm A, B sao cho AB tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Lấy điểm C không nằm trên (O) sao cho AC cắt (O) tại hai điểm phân biệt, dựng đường tròn (ω) tiếp xúc với AC tại C, tiếp xúc với (O) tại D sao cho B, D nằm về hai phía của đường thẳng AC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

    Lời giải.



Gọi I và J theo thứ tự là tâm các đường tròn (ω) và (BCD), t là tiếp tuyến chung tại D của (O) và(ω).
Từ giả thiết suy ra O, J nằm trên trung trực BD và I, J nằm trên trung trực CD. Suy ra $\text{Đ}_{OJ} : (BA) \mapsto (t)$ và $\text{Đ}_{IJ} : (DJ) \mapsto (CJ)$ và $(Dt) \mapsto (CA)$. Khi đó

$$(BA; BJ) \equiv (DJ, t) \pmod{\pi} \equiv (CA; CJ) \pmod{\pi}$$