

BẤT ĐẲNG THỨC

I. Các kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa: Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ ($a < b; a \geq b; a \leq b$) là một bất đẳng thức

Ta có
$$\begin{cases} A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \\ A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0 \end{cases}$$

2. Các tính chất

a. Tính chất bắc cầu:
$$\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$$

b. Cộng hai vế của bất đẳng thức với cùng một số: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Hệ quả 1: $a > b \Rightarrow a - c > b - c$

c. Cộng, trừ từng vế của bất đẳng thức cùng chiều được bất đẳng thức cùng chiều với bất đẳng thức đã cho

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d \quad (\text{lưu ý: không có tính chất trừ vế với vế})$$

d. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số

Ta có:
$$\begin{cases} a > b; c > 0 \Rightarrow a.c > b.c \\ a > b; c < 0 \Rightarrow a.c < b.c \end{cases} \Rightarrow \text{Hệ quả: } \begin{cases} a > b \Rightarrow -a < -b \\ a > b \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} (c > 0) \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} (c < 0) \end{cases} \end{cases}$$

e. Trừ từng vế của bất đẳng thức ngược chiều:
$$\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$$

f. Nhân từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm: $a > b \geq 0; c > d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$

g. Nâng lên lũy thừa bậc nguyên dương hai vế của bất đẳng thức:

- $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$

- $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ (n: lẻ)

- $|a| > |b| \Leftrightarrow a^n > b^n$ (n: chẵn)

h. Lấy căn

$$a > b > 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

Hệ quả: $a, b > 0$, có: $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2; a, b \geq 0 \Rightarrow a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$

i. Lấy nghịch đảo hai vế và đổi chiều bất đẳng thức nếu hai vế cùng dấu

$$- a > b > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$- a > b, ab > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

II. Các hằng đẳng thức

$$1. a^2 \geq 0; -a^2 \leq 0$$

$$2. |a| \geq 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$3. |a| \geq a \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$4. |a+b| \leq |a|+|b| \Leftrightarrow ab \geq 0$$

$$5. |a-b| \geq |a|-|b| \Leftrightarrow \begin{cases} ab > 0 \\ |a| \geq |b| \end{cases}$$

III. Các bổ đề hay sử dụng

$$1. a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$2. \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \text{ (cosi)}$$

$$3. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \text{ (} a, b > 0 \text{)}$$

$$4. \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ (} a, b > 0 \text{)}$$

$$5. (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \text{ (bunhiacopski)}$$

IV. Các dạng toán

Dạng 1: Dùng định nghĩa và các phép biến đổi tương đương

Cách giải: Để chứng minh: $A \geq B$ ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh $A - B \geq 0$

Bài 1:

Cho ba số a, b, c bất kỳ, chứng minh bất đẳng thức sau: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1)

Lời giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 2:

Cho ba số a, b, c bất kỳ, chứng minh rằng: $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ (1)

Lời giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(\dots) \geq 0 \Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ba)^2 \geq 0$$

(luôn đúng)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ab = bc; bc = ca; ca = ab \Leftrightarrow a = b = c$

Bài 3:

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e), \forall a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e) \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - ab + b^2 + \frac{a^2}{4} - ac + c^2 + \frac{a^2}{4} - ad + d^2 + \frac{a^2}{4} - ae + e^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Bài 4:

Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $0 < a \leq b \leq c$. **Chứng minh rằng:** $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$

Lời giải

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} &= \frac{1}{abc} (a^2c + ab^2 + bc^2 - b^2c - ba^2 - ac^2) = \frac{1}{abc} [(a^2c - b^2c) + (b^2a - ab^2) + (c^2b - ac^2)] \\ &= \frac{1}{abc} [c(a-b)(a+b) + ab(a-b) - c^2(a-b)] = \frac{1}{abc} (a-b)(b-c)(c-a) \geq 0 \text{ (do: } 0 < a \leq b \leq c) \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 5:

Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ với $a, b, c > 0$

Lời giải

$$\text{Xét hiệu } \Leftrightarrow \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} - 2\left(\frac{bc}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{ab}{abc}\right) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - c)^2 \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 6:

Chứng minh rằng nếu $a + b \geq 2$ **thì** $a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4$

Lời giải

$$\text{Xét hiệu: } a^4 + b^4 - a^3 - b^3 = a^3(a-1) + b^3(b-1) = a^3(a-1) - (a-1) + (a-1) + b^3(b-1) - (b-1) + (b-1)$$

$$= (a-1)(a^3-1) + (b-1)(b^3-1) + a+b-2 = (a-1)^2(a^2+a+1) + (b-1)^2(b^2+b+1) + a+b-2 \geq 0+0+0=0$$

(đpcm)

Bài 7:

Chúng minh rằng $\forall a, b, c$, ta luôn có $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c) &= a^4+b^4+c^4-a^2bc-b^2ac-c^2ab = \frac{1}{2}(2a^4+2b^4+2c^4-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab) \\ &= \frac{1}{2}[(a^4-2a^2b^2+b^4)+2a^2b^2+(a^4-2a^2c^2+c^4)+2a^2c^2+(b^4-2b^2c^2+c^4)+2b^2c^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab] \\ &= \frac{1}{2}[(a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2+(a^2b^2+b^2c^2-2ab^2c)+(b^2c^2+c^2a^2-2abc^2)+(a^2b^2+c^2a^2-2a^2bc)] \\ &= \frac{1}{2}[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ab-ac)^2] \geq 0 \forall a, b, c \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Dạng 2: Dùng các phép biến đổi tương đương

Cách giải: Ta biến đổi các bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với BĐT đúng hoặc BĐT đã được chứng minh là đúng

- Nếu $A < B \Leftrightarrow C < D$, với $C < D$ luôn đúng
- Sử dụng dạng tổng bình phương: $A \geq B \Leftrightarrow mX^2 + nY^2 + kZ^2 \geq 0$, với các số m, n, k không âm
- Dạng tích hai thừa số cùng dấu: $A \geq B \Leftrightarrow X.Y \geq 0$ hoặc $A \geq B \Leftrightarrow X^{2n}.Y \geq 0$

Bài 1: Cho a, b, c, d, e là các số thực. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

c) $a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc$

d) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2$

Lời giải

a) Ta có: $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow a^2 + \frac{b^2}{4} - ab \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (2a - b)^2 \geq 0$ (đpcm)

b) Ta có:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) \geq 2(ab + a + b) \Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

c) Ta có: $(a^2 - 4ab + 4b^2) + 4c^2 + (4ac - bc) \geq 0 \Leftrightarrow (a - 2b)^2 + 2(a - 2b).2c + (2c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 2b + 2c)^2 \geq 0$ (đpcm)

d) Ta có: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
 $\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ (đpcm)

Bài 2: Cho ba số $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $abc = 1$ và $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

a) Chứng minh rằng: $(a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0$

b) Chứng minh rằng luôn tồn tại 1 trong ba số a, b, c nhỏ hơn 1

Lời giải

a. Ta có $(a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0 \Leftrightarrow abc - ab - bc - ca + a + b + c > 0$

$$\Leftrightarrow abc + (a + b + c) - (ab + bc + ca) > 0 \Leftrightarrow 1 + (a + b + c) - (ab + bc + ca) > 0 \quad (1)$$

$$\text{và } a+b+c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow a+b+c > \frac{ab+bc+ca}{abc} \Leftrightarrow a+b+c > ab+bc+ca(2)$$

Từ (1)(2) ta có điều phải chứng minh

b) Giả sử tồn tại cả ba số a, b, c lớn hơn 1 $\Rightarrow abc > 1$ (mâu thuẫn với giả thiết)

Vậy luôn tồn tại 1 số nhỏ hơn 1.

Bài 3:

Chứng minh rằng: $(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(1)$

Lời giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow (a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) - (a^8 + b^8)(a^4 + b^4) \geq 0 \Leftrightarrow a^{12} + a^{10}b^2 + a^2b^{10} + b^{12} - a^{12} - a^8b - a^4b^8 - b^{12} \geq 0$
 $\Leftrightarrow (a^{10}b^2 - a^8b^4) + (a^2b^{10} - a^4b^8) \geq 0 \Leftrightarrow a^8b^2(a^2 - b^2) - a^2b^8(a^2 - b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 a^2b^2(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 0$
 (đpcm)

Bài 4:

Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 (a, b, c > 0)$

Lời giải

Ta có: $a+b < a+b+c \Rightarrow \frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$

Tương tự: $\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$.

Vậy $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1(*)$

Lại có: $a < a+b \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức ta được: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2(**) \Rightarrow$ đpcm

Bài 5: Tuyển sinh vào 10 ĐHSPTPHCM, năm học 2007 - 2008

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 > a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3$

Lời giải

Ta có: $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 > a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 \Leftrightarrow a^3b^2 - a^2b^3 + b^3c^2 - c^2a^3 + c^3a^2 - b^2c^3 > 0$

$\Leftrightarrow a^2b^2(a-b) + c^2(b^3 - a^3) + c^3(a^2 - b^2) > 0 \Leftrightarrow (a-b)[a^2b^2 - c^2(b^2 + ab + a^2) + c^3(a+b)] > 0$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) > 0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 6: Tuyển sinh vào 10 Thanh Hóa, năm học 2007 - 2008

Chứng minh rằng: $\frac{a}{a^2+1} + \frac{5(a^2+1)}{2a} \geq \frac{11}{2}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{5(a^2+1)}{2a} \geq \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{a^2+1} - \frac{1}{2} + \frac{5(a^2+1)}{2a} - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(a-1)^2}{2(a^2+1)} \cdot \frac{5a^2-a+5}{a(a^2+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{2} \cdot \frac{(a-1)^2+9(a^2+1)}{2a(a^2+1)} \text{ (nhân với 2), dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=1$$

Bài 7: Tuyển sinh vào 10 Thanh Hóa, năm học 2007 - 2008

Chứng minh rằng với mọi số thực $x, y \neq 0$ ta có: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ (1)

Lời giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-y)^2(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(2x^2-2xy+2y^2)}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x^2+y^2+(x-y)^2)}{x^2y^2} \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y \neq 0$.

Bài 8: Chuyên An Giang, năm học 2010 - 2011

Cho $a \geq 4, b \geq 4$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + ab \geq 6(a+b)$

Lời giải

Do $a \geq 4, b \geq 4 \Rightarrow a-4 \geq 0; b-4 \geq 0$

Đặt $x = a-4 (x \geq 0); y = b-4 (y \geq 0) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+4)^2 + (x+4)(y+4) \geq 6(x+y+8)$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy + 6(x+y) \geq 0 (x, y \geq 0)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow a = b = 4$.

Bài 9: Tuyển sinh vào 10 chuyên KHTN ĐHQGHN, năm học 2000 - 2001

Cho hai số thực $x, y \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 3$ (1)

Lời giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} - 1 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2y^2 - (x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^4+y^4-2x^2y^2}{x^2y^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 \cdot \left[\frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 \cdot \frac{(x^2+y^2)^2 - x^2y^2}{x^2y^2(x^2+y^2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 \cdot \frac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^2y^2(x^2+y^2)^2} \geq 0$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \pm y$

Bài 10: Dành cho lớp 9

Cho hai số thực a, b . Chứng minh rằng: $\frac{2a}{a+b} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} + \frac{a+b}{2}$ (1)

Lời giải

Ta có: $\frac{a+b}{2} - \frac{2a}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$; $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} = \frac{\frac{a^2+b^2}{2} - ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} = \frac{(a-b)^2}{2 \left[\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab} \right]}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} - \frac{1}{a+b} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \geq 0 (*)$$

- Ta có: $a+b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$; $a+b - \sqrt{2(a^2+b^2)} = \frac{-(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)}$

$$(*) \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} - \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} + a+b - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \cdot \frac{2(a^2+b^2) - 4ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(a-b)^4}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Chứng minh các bất đẳng thức sau với a, b là số thực bất kỳ

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$

b) $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

c) $(a + b)^2 \geq 4ab$

d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

e) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

f) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

g) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$

h) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ với $a, b, c > 0$

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2 + b^2 \geq 2ab (*) \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

b) Cộng hai vế của (*) với $a^2 + b^2$ ta thu được $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

c) Cộng hai vế của (*) với $2ab$ ta thu được $(a + b)^2 \geq 4ab$

d) Từ $a^2 + b^2 \geq 2ab$, tương tự ta cũng có: $b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ac$

Cộng ba vế của bất đẳng thức cùng chiều ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca) (**)$$

Cách khác:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca) \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

e) Nhân cả hai vế của (**) với 2 rồi cộng 2 vế với $a^2 + b^2 + c^2$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh

f) Cộng 2 vế (**) với $2(ab + bc + ca)$ ta thu được điều phải chứng minh

g) Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

h) Với mọi số thực dương a, b, c và số thực k thỏa mãn $0 \leq k \leq 1$, ta có:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (1-k)(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq k(a-b)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab + k(a-b)^2$$

Chia cả hai vế cho $b > 0$ ta thu được: $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a + k \frac{(a-b)^2}{b}$

Tương tự ta có thêm 2 bất đẳng thức nữa

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều ta thu được:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq 2a + 2b + 2c + k \left[\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \right]$$

Hay $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + k \left[\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \right] \geq a + b + c$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 2: Cho các số thực không âm a, b . Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

b) $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$

c) $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

d) $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq \frac{2}{1+ab}$ với $ab \geq 1$

f) $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{ab+1}$

g) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ với $a, b, x, y > 0$

h) $(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

i) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ với $a, b, c, x, y, z > 0$

j. $\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} + \frac{1}{c^3+1} \geq \frac{3}{1+abc}$ với $a, b, c \geq 1$

k. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a^3 + b^3 - ab(a+b) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)[a^2 - ab + b^2 - ab] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $4(a^3 + b^3) - (a+b)^3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left[4(a^2-ab+b^2)-(a+b)^2\right] \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)\left[3(a+b)\right]^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

c) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2 \Leftrightarrow a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2 \geq 0$$

$$\text{Hay } a^2y^2-2abxy+b^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ax+by)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$

d) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a^2+b^2+2}{(a^2+1)(b^2+1)} \geq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow (a^2+b^2+2)(1+ab) \geq 2(a^2+1)(b^2+1) \Leftrightarrow a^2+b^2+a^3b+ab^3+2ab+2 \geq$$

$$2a^2b^2+2a^2+2b^2+2 \Leftrightarrow a^3b-2a^2b^2+ab^3-(a^2-2ab+b^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^3b-2a^2b^2+ab^3-(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b)^2-(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ab-1)(a-b)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } ab \geq 1)$$

$$\text{f) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta có: } (a+1)^2 = \left(\sqrt{ab} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + 1 \cdot 1\right)^2 \leq (ab+1)\left(\frac{a}{b}+1\right) = \frac{(ab+1)(a+b)}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+1)^2} \geq \frac{b}{(a+b)(ab+1)}$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{a}{(a+b)(ab+1)}$. Cộng hai vế bất đẳng thức cùng chiều ta có:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{b}{(a+b)(ab+1)} + \frac{a}{(a+b)(ab+1)} = \frac{1}{ab+1}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$

g) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{bx^2+ay^2}{ab} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)(bx^2+ay^2) \geq ab(x+y)^2 \Leftrightarrow abx^2+aby^2+b^2x^2+a^2y^2 \geq abx^2+aby^2+2abxy$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2-2abxy+a^2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (bx-ay)^2 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$

h) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(x^2+y^2+z^2)+b^2(x^2+y^2+z^2)+c^2(x^2+y^2+z^2)$$

$$-(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2acxz) \geq 0 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} ay = bx \\ bz = cy \\ cx = az \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

i) Áp dụng bất đẳng thức cở câu g) liên tục 2 lần ta có:
$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} ay = bx \\ c(x+y) = z(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \\ \frac{a+b}{x+y} = \frac{c}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức ở câu h) ta có:

$$(x+y+z)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{y}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b} + \frac{z}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{c} \right)^2 \leq \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \right) (a+b+c)$$

Hay
$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c} \text{ (đpcm)}$$

***) Chú ý:** Các bất đẳng thức ở câu g, h, I còn có tên gọi là bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

j) Áp dụng bất đẳng thức ở câu d) liên tục 2 lần ta có:

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \geq \frac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \frac{2}{1+\sqrt{abc^4}} \geq \frac{4}{1+\sqrt{a^2b^3}\sqrt{abc^4}} = \frac{4}{1+abc}$$

Hay
$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

k) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2bc - b^2ac - c^2ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2b^2c^2 + (c^2 - a^2)^2 + 2a^2c^2 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ab - ac)^2 \geq 0 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ với $x = a^2; y = b^2; z = c^2$

Ta thu được:
$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab.bc + bc.ca + ca.ab = abc(a+b+c)$$

Bài 3: Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^3+b^3}{ab} + \frac{b^3+c^3}{bc} + \frac{c^3+a^3}{ac} \geq 2(a+b+c)$ với các số thực dương a, b, c

b) $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$ với $a, b \geq 1$

c) $\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 3$ với $a, b \neq 0$

d) $\frac{a^2b}{2a^3+b^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}$ với $a, b > 0$

e) Tìm hằng số k lớn nhất sao cho $\frac{k}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16+4k}{(a+b)^3}$ với $a, b > 0$

f) $\frac{2ab}{a+b} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} + \frac{a+b}{2}$ với $a, b > 0$

Lời giải

a) Trước hết ta cần chứng minh bất đẳng thức: $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$ với x, y là các số dương

Thật vậy $x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x^2 + y^2 - xy) \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a^3+b^3}{ab} + \frac{b^3+c^3}{bc} + \frac{c^3+a^3}{ca} \geq \frac{ab(a+b)}{ab} + \frac{bc(b+c)}{bc} + \frac{ca(c+a)}{ca} = 2(a+b+c)$$

b) Đặt $x = \sqrt{a-1}; y = \sqrt{b-1}$, khi đó $x \geq 0; y \geq 0$

bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $(x^2+1)y + (y^2+1)x \leq (x^2+1)(y^2+1)$

$$(x^2+1)(y^2+1) - 2(x^2+1)y + (x^2+1)(y^2+1) - 2(y^2+1)x \geq 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(y-1)^2 + (y^2+1)(x-1)^2 \geq 0$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1 \Leftrightarrow a = b = 2$

c) **Cách 1:** Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} - 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{(a^2+b^2)^2} \geq 0$$

$$\frac{-(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2} \geq 0 \Leftrightarrow (a^2-b^2)^2 \left[\frac{1}{a^2b^2} - \frac{1}{(a^2+b^2)^2} \right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a^2-b^2)^2 \left[(a^2+b^2)^2 - a^2b^2 \right]}{a^2b^2(a^2+b^2)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2 - b^2)^2 (a^4 + b^4 + a^2 b^2)}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)^2} \geq 0$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm b$

Cách 2: Bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2} \geq 5$

Đặt $t = \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right)^2$, khi đó ta được $0 < t \leq 1 \Rightarrow \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2} = 4 \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} \right)^2 = \frac{4}{t}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $t + \frac{4}{t} \geq 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Rightarrow (t-1)(t-4) \geq 0$ (đúng)

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm b$

d) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2 b}{2a^3 + b^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2 + 2ab}{2a^2 + b^2} \Leftrightarrow \frac{a^2 b}{2a^3 + b^3} - \frac{1}{3} \geq \frac{a^2 + 2ab}{2a^2 + b^2} - 1 \Leftrightarrow \frac{-(a-b)^2 (2a+b)}{3(2a^3 + b^3)} \geq \frac{-(a-b)^2}{2a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\frac{1}{2a^2 + b^2} - \frac{2a+b}{3(2a^3 + b^3)} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 [3(2a^3 + b^3) - (2a^2 + b^2)(2a+b)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 (2a^3 + 2b^3 - 2a^2 b - 2ab^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^4 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm b$

e) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{k}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16+4k}{(a+b)^3}$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{a^3 + b^3} - \frac{4k}{(a+b)^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{8}{(a+b)^3} + \frac{1}{b^3} - \frac{8}{(a+b)^3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{(a+b)^3} \left(\frac{7b^2 + 4ab + a^2}{b^3} - \frac{7a^2 + 4ab + b^2}{a^3} \right) - \frac{3k(a-b)^2(a+b)}{(a^3 + b^3)(a+b)^3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2 (a^4 + 5a^3 b + 12a^2 b^2 + 5ab^3 + b^4)}{a^3 b^3} - \frac{3k(a-b)^2}{a^2 - ab + b^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 [(a^4 + 5a^3 b + 12a^2 b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3 b^3] \geq 0 ((a-b)^2 \geq 0)$$

Nên bất đẳng thức đúng khi và chỉ khi $(a^4 + 5a^3 b + 12a^2 b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3 b^3 \geq 0$

Cho $a = b$ thì bất đẳng thức trên trở thành $24a^6 - 3ka^6 \geq 0 \Rightarrow k \leq 8$

Ta chứng minh $k=8$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức đã cho. Thật vậy, ta xét các trường hợp sau:

+ Với $k < 8$ thì $(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3b^3 > 0$

+ Với $k=8$ thì bất đẳng thức trên viết lại thành:

$(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 24a^3b^3 \geq 0$. Ta có: $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$; $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Nên $a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4 = a^4 + b^4 + 5ab(a^2 + b^2) + 12a^2b^2 \geq 24a^2b^2$

Và $a^2 - ab + b^2 \geq ab$. Do đó ta có: $(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) \geq 24a^3b^3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Vậy hằng số k lớn nhất là 8

f) bất đẳng thức cần chứng minh được biến đổi như sau

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} - \frac{1}{a+b} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0$$

$$\text{Thật vậy ta có: } a+b - \sqrt{2(a^2+b^2)} = -\frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)}; a+b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$

Do vậy bất đẳng thức trên tương đương với:

$$(a-b)^2 \left[\frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} - \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} + a+b - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \frac{2(a^2+b^2) - 4ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(a-b)^4}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Bài 4: Chứng minh các bất đẳng thức

a) $\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ với $a, b, c > 0; a+b+c=1$

b) $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq a+b+c$ với $a, b, c > 0$

$$c) \frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc} \text{ với } a, b, c > 0$$

$$d) 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 2 \geq \frac{33}{ab+bc+ca} \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } a+b+c=3$$

Lời giải

a) Quan sát bất đẳng thức ta có các nhận xét sau:

- Dự đoán đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

- Khi thay 1 bằng $a+b+c$ vào bất đẳng thức và chuyển vế thì được các nhóm

$$\sqrt{a+bc} - a - \sqrt{bc}; \sqrt{b+ca} - b - \sqrt{ca}; \sqrt{c+ab} - c - \sqrt{ab}$$

Do vai trò a, b, c như nhau nên ta dự đoán mỗi nhóm trên không âm. Để chứng minh dự đoán trên ta có thể bình phương làm mất căn bậc hai rồi đến biến đổi tương đương thành tổng các bình phương

- Để ý giả thiết $a+b+c=1$, khi đó ta có $\sqrt{a+bc} = \sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a + \sqrt{bc}$

Như vậy chỉ cần áp dụng tương tự cho hai trường hợp còn lại thì bất đẳng thức được chứng minh

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq a+b+c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \Leftrightarrow (\sqrt{a+bc} - a - \sqrt{bc}) + (\sqrt{b+ca} - b - \sqrt{ca}) + (\sqrt{c+ab} - c - \sqrt{ab}) \geq 0$$

Ta cần chứng minh: $\sqrt{a+bc} - c - \sqrt{bc} \geq 0; \sqrt{b+ca} - b - \sqrt{ca} \geq 0; \sqrt{c+ab} - c - \sqrt{ab} \geq 0$

Thật vậy ta có: $\sqrt{a+bc} - a - \sqrt{bc} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a+bc} \geq a + \sqrt{bc} \Leftrightarrow a+bc \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc$

$$\Leftrightarrow 1 \geq a + 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow a+b+c \geq a + 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0$$

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{b+ac} - b - \sqrt{ca} \geq 0; \sqrt{c+ab} - c - \sqrt{ab} \geq 0$

Đến đây bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Cách 2: Kết hợp với giả thiết $a+b+c=1$ ta có

$$\sqrt{a+bc} = \sqrt{(a+b)(a+c)}; \sqrt{b+ca} = \sqrt{(a+b)(b+c)}; \sqrt{c+ab} = \sqrt{(c+a)(b+c)}$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(a+b)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Mặt khác ta có:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a + \sqrt{bc} \Leftrightarrow a^2 + ab + bc + ca \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc \Leftrightarrow b + c \geq 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0$$

Chứng minh tương tự: $\sqrt{(b+c)(a+b)} \geq b + \sqrt{ca}$; $\sqrt{(c+a)(b+c)} \geq c + \sqrt{ab}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(a+b)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)} \geq a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

$$\text{Hay } \sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(a+b)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

b) Ta sẽ chứng minh $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a$ với a, b là các số thực dương

Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được:

$$5b^3 - a^3 \leq (2b - a)(ab + 3b^2) \Leftrightarrow 5b^3 - a^3 \leq 2ab^2 + 6b^3 - a^2b - 3ab^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, do đó bất đẳng thức trên được chứng minh. Chứng minh

$$\text{tương tự ta được: } \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} \leq 2c - b; \frac{5c^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq 2a - c$$

$$\text{Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: } \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^3} + \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq a + b + c$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Cách 3: Ta có:

$$\begin{aligned} a^3 - 5b^3 + 2b(ab + 3b^2) &= a^3 + b^3 + 2ab^2 = (a^3 + ab^2) + (b^3 + a^2b) + 2a^2b - (a^2b + ab^2) \\ &\geq 2a^2b + 2ab^2 + 2ab^2 - (a^2b + ab^2) = a(ab + 3b^2) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta có: } \frac{a^3 - 5b^3}{ab + 3b^2} + 2b \geq a \text{ hay ta được: } \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a$$

$$\text{Áp dụng tương tự ta có: } \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} \leq 2c - b; \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq 2a - c$$

$$\text{Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: } \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^3} + \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq a + b + c$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

c) Ta có: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\Rightarrow a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2\geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có: $a^3+b^3+abc\geq ab(a+b)+abc=ab(a+b+c)$

Suy ra: $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\frac{1}{ab(a+b+c)}$. Tương tự ta có:

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\leq\frac{1}{bc(a+b+c)}; \frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{ca(a+b+c)}$$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

d) Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(ab+bc+ca)+2(ab+bc+ca)\geq 33\Leftrightarrow 3\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+2(ab+bc+ca)\geq 15$$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$ ta có:

$$\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2\geq 3\left(\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}+\frac{ca}{b}\cdot\frac{ab}{c}\right)=3(a^2+b^2+c^2)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là: $3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+2(ab+bc+ca)\geq 15$ (*)

$$\text{Đặt } t=\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\Rightarrow t^2=3(a^2+b^2+c^2)=3(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca)=27-6(ab+bc+ca)$$

Ta có: $a, b, c > 0 \Rightarrow t^2 \leq 27 \Rightarrow t \leq 3\sqrt{3}$,

Lại có $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2=0\Rightarrow b+bc+ca\leq 3\Rightarrow t^2\geq 9\Rightarrow t\geq 3\Rightarrow 3\leq t\leq 3\sqrt{3}$

Có tiếp (*) $\Leftrightarrow 3t+9-\frac{t^2}{3}\geq 15\Leftrightarrow (t-3)(t-6)\leq 0$, bất đẳng thức này luôn đúng với mọi $3\leq t\leq 3\sqrt{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=3\Leftrightarrow a=b=c=1$

Dạng 3: Bất đẳng thức dạng nghịch đảo (Cô si cộng mẫu)

Ghi nhớ các công thức sau:

$$- \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

$$- \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

$$- \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n \forall a_1, \dots, a_n > 0$$

Bài 1:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{a+2b} + \frac{3}{b+2c} + \frac{3}{c+2a}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức dạng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (tự chứng minh đt) ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{a+2b}; \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{b+2c}; \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \geq \frac{9}{c+2a}$$

Cộng vế các bất đẳng thức trên ta được: $VT \geq VP$ (đpcm)

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 2:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $4\left(\frac{2}{a+b} + \frac{3}{c+a} + \frac{4}{b+c}\right) \leq \frac{5}{a} + \frac{6}{b} + \frac{7}{c}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức dạng:

$$\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow 2 \cdot \frac{4}{a+b} \leq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right); \frac{4}{c+a} \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \Rightarrow 3 \cdot \frac{4}{a+c} \leq 3\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right); \frac{4}{b+c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow 4 \cdot \frac{4}{b+c} \leq 4\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Cộng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$4\left(\frac{2}{a+b} + \frac{3}{c+a} + \frac{4}{b+c}\right) \leq \frac{5}{a} + \frac{6}{b} + \frac{7}{c} \text{ (đpcm)}$$

Bài 3:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+4b+4c} + \frac{b}{b+4c+4a} + \frac{c}{c+4a+4b} \geq \frac{1}{3}$ (1)

Lời giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \frac{3a}{a+4b+4c} + \frac{3b}{b+4c+4a} + \frac{3c}{c+4a+4b} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3a}{a+4b+4c} + 1 \right) + \left(\frac{3b}{b+4c+4a} + 1 \right) + (\dots) \geq 4$

$\Leftrightarrow 4(a+b+c) \left(\frac{1}{a+4b+4c} + \frac{1}{b+4c+4a} + \frac{1}{c+4a+4b} \right) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a+4b+4c} + \frac{1}{b+4c+4a} + \frac{1}{c+4a+4b} \geq \frac{1}{a+b+c} \quad (2)$

Áp dụng bất đẳng thức: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

Ta được: $VT(2) \geq \frac{9}{9(a+b+c)} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 4:

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm GTLN của $A = \frac{a}{1+2a} + \frac{b}{1+2b} + \frac{c}{1+2c}$

Lời giải

Cách 1: Ta có

$$2A = \frac{2a}{1+2a} + \frac{2b}{1+2b} + \frac{2c}{1+2c} = 1 - \frac{1}{1+2a} + 1 - \frac{1}{1+2b} + 1 - \frac{1}{1+2c} = 3 - B$$

$$B = \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} \geq \frac{9}{3+2(a+b+c)} = 1$$

$$2A = 3 - B \leq 2 \Rightarrow A \leq 1 \Leftrightarrow a = b = c$$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức:

$$\frac{9}{x+y+z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{9}{1+a+a} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{1+2a} \leq \frac{1}{9} \left(1 + \frac{2}{a} \right) \Rightarrow \frac{a}{1+2a} \leq \frac{a}{9} + \frac{2}{9}$$

Tương tự: $\frac{b}{1+2b} \leq \frac{b}{9} + \frac{2}{9}; \frac{c}{1+2c} \leq \frac{c}{9} + \frac{2}{9}$

Cộng ba vế của bất đẳng thức ta được: $A \leq \frac{a+b+c}{9} + \frac{6}{9} = 1$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 5:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{a+b+c}{4}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức: $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$$VT = ab \cdot \frac{1}{(a+c)+(b+c)} + bc \cdot \frac{1}{(b+a)+(c+a)} + ca \cdot \frac{1}{(b+c)+(b+a)} \leq \frac{1}{4} ab \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) + \frac{1}{4} bc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) + \frac{1}{4} ca \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{bc+ca}{a+b} + \frac{ab+bc}{b+c} + \frac{ab+bc}{a+c} \right) = \frac{a+b+c}{4}$$

Bài 6:

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $a+b+c=1$. Tìm GTNN của: $A = \frac{1}{abc} + \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{abc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{9}{ab+bc+ca}; \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2} = 9$$

$$\text{Lại có: } 3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{ab+bc+ca} \geq 3 \Rightarrow \frac{7}{ab+bc+ca} \geq 21$$

$$\text{Cộng theo vế ba bất đẳng thức: } A + \frac{9}{ab+cb+ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca} + 30 \Rightarrow A \geq 30$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Bài 7:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+b+2c} + \frac{4}{b+c+2a} + \frac{4}{c+a+2b}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4}{(a+c)(b+c)} \leq \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}; \frac{4}{a+b+2c} + \frac{4}{b+c+2a} + \frac{4}{c+a+2b} \leq \frac{2}{a+c} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+b} \quad (1)$$

Lại có:

$$\frac{4}{a+c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{c}; \frac{4}{b+c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; \frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{4}{a+c} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+b} \leq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{2}{a+c} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+b} \right) \leq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (2)$$

Từ (1)(2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 8:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{7}{a} + \frac{4}{b} + \frac{7}{c} \geq 9 \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{2}{b+2c} + \frac{3}{c+2a} \right)$

Lời giải

Ta có: $\frac{9}{a+b+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; \frac{9}{b+c+c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \Rightarrow 2. \frac{9}{b+c+c} \leq \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{2}{c}$

$$\frac{9}{a+c+c} \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \rightarrow 3. \frac{9}{c+a+a} \leq \frac{3}{c} + \frac{3}{a} + \frac{3}{a}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức ta được đpcm

Bài 8:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{2a+5b+5c} + \frac{b}{2b+5c+5a} + \frac{c}{2c+5a+5b} \geq \frac{1}{4}$ (1)

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 3VT \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3VT + 3 \geq \frac{15}{4} \Rightarrow 3VT + 3 = (5a + 5b + 5c) \left(\frac{1}{2a+5b+5c} + \frac{1}{2b+5c+5a} + \frac{1}{2c+5a+5b} \right) \\ &\geq 5(a+b+c) \cdot \frac{9}{12(a+b+c)} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Vậy $VT \geq \frac{1}{4}$ (đpcm),

Dạng 4: Dùng các bất đẳng thức phụ

Cách giải: Ghi nhớ một số công thức sau:

- $x^2 + y^2 \geq 2xy$
- $x^2 + y^2 \geq |xy|$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 0$
- $(x+y)^2 \geq 4xy; (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ (do: $(x-y)^2 \geq 0$)
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
- $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$
- $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$

Bài 1:

Cho hai số a, b thỏa mãn: $a+b=1$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2$

Từ: $a+b=1 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 1; (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Lại có: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad (2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -ab \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 - ab \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (đpcm)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 2:

Cho $a+b>1$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 > \frac{1}{8}$

Lời giải

Từ $a+b>1 \Rightarrow (a+b)^2 > 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 > 1; (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow (a^2 + b^2)^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \geq \frac{1}{4} \quad (1)$$

Có tiếp: $(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \Rightarrow a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \geq 0 \Rightarrow 2a^4 + 2b^4 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$ (đpcm)

Bài 3:

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$

Lời giải

Ta có: $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy (\Leftrightarrow x = y)$

Áp dụng: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 2 \frac{a}{c}; \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2 \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 2 \frac{b}{a}; \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = 2 \frac{c}{b}$

$\Leftrightarrow 2VT \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \Rightarrow VT \geq VP$ (đpcm)

Bài 4:

Cho $a, b, c, d > 0$ và $abcd = 1$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + d(c+a) \geq 10$

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab; c^2 + d^2 \geq 2cd \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ab + cd)$

Từ: $abcd = 1 \Rightarrow ab = \frac{1}{cd}; ac = \frac{1}{bd}; ad = \frac{1}{bc}; bc = \frac{1}{ad}; bd = \frac{1}{ac}; cd = \frac{1}{ab}; ad = \frac{1}{bc}$

Có: $2(ad + bc) = 2\left(ab + \frac{1}{ab}\right) \geq 2 \cdot 2 = 4 \left[\text{do: } \left(\frac{ab}{1} + \frac{1}{ab}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \right]$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$

Lại có:

$$ab + ac + bc + bd + cd + ad = (ad + bc) + (ac + bd) + (bc + ad) = \underbrace{\left(ab + \frac{1}{ab}\right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(ac + \frac{1}{ac}\right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(bc + \frac{1}{bc}\right)}_{\geq 2} = 6$$

$\Rightarrow VT \geq 10$

Bài 5:

Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng: $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$ (1)

Lời giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x + y)^2(y + z)^2(z + x)^2 \geq 64x^2y^2z^2$

Lại có:

$$(x+y)^2 \geq 4xy; (y+z)^2 \geq 4yz; (z+x)^2 \geq 4xz \Rightarrow (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq 64x^2y^2z^2 \text{ (đpcm)}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$

Bài 6:

Cho $a, b, c > 0; abc = 1$. Chứng minh rằng: $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

Lời giải

Ta có:

$$(a+1)^2 \geq 4a; (b+1)^2 \geq 4b; (c+1)^2 \geq 4c \Rightarrow [(a+1)(b+1)(c+1)]^2 \geq (8abc)^2 \Rightarrow (a+1)(b+1)(c+1) \geq 8abc$$

(đpcm)

Bài 7:

Cho $a, b, c, d > 0; abcd = 1$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \geq 6$

Lời giải

$$\text{Có: } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \geq 2ab + 2cd + ab + cd = 3(ab + cd)$$

$$\text{Lại có: } 3(ab + cd) = 3\left(ab + \frac{1}{ab}\right) \geq 3 \cdot 2 = 6 \text{ (đpcm)}$$

Bài 8: Cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } (x-y)^2 \geq 0 \forall x, y \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy; y^2 + z^2 \geq 2yz; x^2 + z^2 \geq 2xz \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

b) Theo chứng minh trên:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2(xy + yz + zx) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Rightarrow (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \Leftrightarrow 1 \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Bài 9:

Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $a + b + 2c \geq 4(1-a)(1-b)(1-c)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2$$

Áp dụng ta được:

$$0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow 1 - c \geq 0 \Rightarrow 4(1-a)(1-b) \leq (1-a+1-b)^2 = (1+c)^2 \Rightarrow VP \leq (1+c)^2(1-c) = (1-c^2)(1+c) \leq 1+c$$

$$\text{Mà: } 1 = a + b + c \Rightarrow VP \leq a + b + 2c \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

Bài 10:

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $abc = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \leq 1$

Lời giải

Ta có: $x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \geq 0 \forall x, y > 0$

Áp dụng ta có:

$$a^3 + b^3 + 1 \geq ab(a+b) + abc = ab(a+b+c) \Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+1} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{abc}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự: .

Cộng về các bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 11:

Cho $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{1+abc}$

Lời giải

Chứng minh:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad \forall x, y > 0; xy \geq 1 \Leftrightarrow (2+x^2+y^2)(1+xy) \geq 2(1+x^2)(1+y^2)$$

$$\Leftrightarrow 2xy + xy(x^2+y^2) \geq x^2+y^2+2x^2y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1) \geq 0 \text{ (do: } xy \geq 1)$$

$$\text{Áp dụng: } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \geq \frac{2}{1+abc}; \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{2}{1+bc}; \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} \geq \frac{2}{1+ac}$$

Cộng về các bất đẳng thức ta được điều phải chứng minh.

Bài 12:

Cho $x, y, z > 0; x+y+z=1$. Tìm GTNN của: $A = \frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y}$

Lại có: $a^3 + b^3 \geq (a+b)ab \forall a, b > 0$

Thật vậy $\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b)ab \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \forall a, b \geq 0$

Hoặc: $a^2 + b^2 - ab \geq ab \forall a, b \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b) \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

Áp dụng: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{x^3 + y^3}{xy} \geq x + y \forall x, y > 0; \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y} \geq y + z; \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{z} \geq x + z$

Cộng vế ba bất đẳng thức ta được: $A \geq 2(x + y + z) = 2 \Rightarrow A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$

Bài 13:

Cho $x, y, z > 0; x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTNN của: $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}$

Lời giải

Ta có: $A^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} + 2.$

Mà: $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Áp dụng: $\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} \geq 2y^2$

Tương tự ta có: $A^2 \geq 3 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \min A = \sqrt{3}$

Dạng 5: Dùng phương pháp phản chứng

Cách giải:

- Muốn chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ đúng, ta giả sử $A \geq B$ là sai, tức là $A < B$ là đúng
- Chứng minh $A < B$ là sai $\Rightarrow A \geq B$ là đúng

Bài 1:

Cho $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng: $a + b \leq 2$

Lời giải

Giả sử $a + b > 2$, bình phương hai vế ta được: $(a + b)^2 > 4 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 > 4(1)$

Mặt khác ta lại có: $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

Mà $2(a^2 + b^2) \leq 4$ (giả thiết) $\Rightarrow (a + b)^2 \leq 4$

Điều này mâu thuẫn với (1) nên $\Rightarrow a + b \leq 2$

Bài 2:

Với mọi số thực a, b, c , chứng tỏ rằng: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq b(a - c) + c(a - b)$

Lời giải

Giả sử: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 < b(a - c) + c(a - b) \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab + bc - ac + bc < 0$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab - ac + 2bc < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 < 0$ (vô lý)

Vậy điều giả sử là sai $\Rightarrow \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq b(a - c) + c(a - b)$

Bài 3:

Với mọi số thực $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh rằng: $a + b \leq 2$

Lời giải

Giả sử $a + b > 2 \Leftrightarrow (a + b)^3 > 8 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) > 8 \Leftrightarrow 3ab(a + b) > 6 \Leftrightarrow ab(a + b) > 2$

$\Leftrightarrow ab(a + b) > a^3 + b^3 \Leftrightarrow 0 > (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \Leftrightarrow 0 > (a + b)(a - b)^2$ (vô lý)

Bài 4:

Cho các số thực $a, b, c \in (0; 2)$. Chứng minh rằng có ít nhất 1 trong ba bất đẳng thức sau là sai

$$a(2-b) > 1; b(2-c) > 1; c(2-a) > 1$$

Lời giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức trên đều đúng, nhân chúng với nhau theo vế, ta được:

$$a(2-b).b(2-c).c(2-a) > 1 \Leftrightarrow a(2-a).b(2-b).c(2-c) > 1$$

Mặt khác, do $a \in (0; 2)$ nên a và $2-a > 0 \Rightarrow 0 < a.(2-a) = 1 - (a-1)^2 \leq 1$

Tương tự: $0 < b.(2-b) \leq 1; 0 < c(2-c) \leq 1$

Do đó: $a(2-a).b(2-b).c(2-c) \leq 1$ (mâu thuẫn). Vậy ta có đpcm

Bài 5: Chuyên Thái Bình, năm học 2007 - 2008

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$$

Lời giải

Giả sử $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó:

$$a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \geq (a + b + c)^2$$

Kết hợp với giả thiết: $0 > 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow (a + b + c)^2 < 0$ (mâu thuẫn)

Bài 6: Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa, năm học 2007 - 2008

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a + b + c > 0; ab + bc + ca > 0; abc > 0$. Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều dương

Lời giải

Giả sử ba số a, b, c có 1 số không dương. Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $a \leq 0$

Mà lại có: $abc > 0 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow a < 0$

Lại có: $a + b + c > 0 \Rightarrow b + c > 0 \Rightarrow a(b + c) < 0$

Từ giả thiết thứ hai: $ab + bc + ca > 0$, ta có: $a(b + c) + bc > 0 \rightarrow bc > 0$

Vì thế $abc < 0$ (mâu thuẫn với giả thiết) (đpcm)

Bài 7: Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa, năm học 2007 - 2008

Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một trong các số $9ab, 9bc, 9ca$.

Nhỏ hơn $(a+b+c)^2$

Lời giải

Giả sử: $9ab \geq (a+b+c)^2; 9bc \geq (a+b+c)^2; 9ca \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow 3(a+b+c)^2 \leq 9(ab+bc+ca)$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 3(ab+bc+ca)$$

$$a^2+b^2+c^2 \leq ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 0(1)$$

Theo đầu bài: a, b, c đôi một khác nhau nên: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0(2)$

Từ (1)(2) ta thấy mâu thuẫn nên đpcm.

Bài 8: Chuyên HCM, năm học 2006 - 2007

Cho hai số dương x, y thỏa mãn: $x^3 + y^3 = x - y$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 < 1$

Lời giải

Do x, y đều dương $\Rightarrow x, y > 0; x > y$

Giả sử: $x^2 + y^2 \geq 1 \Rightarrow x^3 + y^3 = x - y$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 \leq (x^2 + y^2)(x - y) \Leftrightarrow x^3 + y^3 \leq x^3 + x^2y - yx^2 - y^3 \Leftrightarrow xy^2 - yx^2 - 2y^3 \geq 0 \Leftrightarrow y(xy - x^2 - 2y^2) \geq 0(*)$$

$$\Leftrightarrow y \left[\underbrace{x(y-x)}_{<0} - 2y^2 \right] \geq 0 \text{ (vô lý), do } x > y \Rightarrow y - x < 0$$

Do đó (*) không thể xảy ra $\Rightarrow x^2 + y^2 < 1$ (đpcm)

Bài 9: Chuyên HCM, năm học 2006 - 2007

Cho cặp số $(x; y)$ thỏa mãn: $\begin{cases} -1 \leq x + y \leq 1(1) \\ -1 \leq x + y + xy \leq 1(2) \end{cases}$. Chứng minh rằng: $|x| \leq 2; |y| \leq 2$

Lời giải

Ta đi chứng minh: $|x| < 2$

Giả sử $|x| > 2$, khi đó $\Rightarrow -2 < x < 2$

$$+) |x| > 2, (1) \Rightarrow y \leq 1 - x < -1 \Rightarrow xy < -2$$

$$+) |x| < -2, (1) \Rightarrow y \geq -1 - x > 1 \Rightarrow xy < -2$$

Do đó nếu $|x| > 2 \Rightarrow xy < -2$. Mà $x + y \leq 1 \Rightarrow x + y + xy < -1$ (mâu thuẫn với 2) $\Rightarrow |x| \leq 2$

Ta đi chứng minh $|y| < 2$ (tương tự chứng minh $|x| < 2$)

Bài 10: Olympic Toán Ireland năm 1997

Cho cặp số $a, b, c \geq 0; a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$

Lời giải

+) Nếu 1 trong ba số bằng 0 thì bất đẳng thức được chứng minh

Ta xét: $a, b, c > 0$

Giả sử ngược lại: $a^2 + b^2 + c^2 < abc \Rightarrow abc > a^2 + b^2 + c^2 > a^2 \Rightarrow a < bc$

Tương tự ta có: $b < ac; c < ab \Rightarrow a + b + c < ab + bc + ca(1)$

Lại có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow abc > a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow abc > ab + bc + ca(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow abc > a + b + c$ (mâu thuẫn với giả thiết) nên điều giả sử là sai.

Bài 11:

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng có ít nhất hai trong

số các bất đẳng thức sau đúng: $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6; \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6; \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6$

Lời giải

Ta có: $a + b + c \geq abc \Leftrightarrow \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \geq 1$ (do: $abc > 0$)

Đặt $\frac{1}{a} = x; \frac{1}{b} = y; \frac{1}{c} = z \Rightarrow x, y, z > 0; xy + yz + xz \geq 1$

Ta phải chứng minh có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức sau đúng:

$2x + 3y + 6z \geq 6; 2y + 3z + 6x \geq 6; 2x + 3z + 6y \geq 6$

Giả sử có ít nhất 2 trong 3 bất đẳng thức sau là sai, chẳng hạn: $2x + 3y + 6z < 6; 2y + 3z + 6x < 6$

Cộng vế hai bất đẳng thức: $8x + 5y + 9z < 12$

Từ giả thiết:

$xy + yz + xz \geq 1 \Rightarrow x(y + z) \geq 1 - yz \Rightarrow x \geq \frac{1 - yz}{y + z} \Rightarrow 12 > 8 \cdot \frac{1 - yz}{y + z} + 5y + 9z \Rightarrow 12(y + z)$

$> 8(1 - yz) + (5y + 9z)(y + z)$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 6yz + 9z^2 - 12y - 12z + 8 < 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y(3z - 2) + 9z^2 - 12z + 4 + 4y^2 - 8y + 4 < 0$

$$\Leftrightarrow (y+3z-2)^2 + 4(y-1)^2 < 0 \text{ (vô lý).}$$

Bài 11:

Cho bốn số a, b, c, d thỏa mãn $ac \geq 2(b+d)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau sai: $a^2 < 4b; c^2 < 4d$

Lời giải

Giả sử hai bất đẳng thức trên đều đúng $\Rightarrow a^2 + c^2 < 4(b+d)$ (1)

Theo giả thiết: $ac \geq 2(b+d) \Leftrightarrow 2ac \geq 4(b+d)$ (2) $\Rightarrow a^2 + c^2 < 2ac \Leftrightarrow (a-c)^2 < 0$ (vô lý)

Nên điều giả sử là sai, vậy ta có điều phải chứng minh.

Dạng 6: Dùng bất đẳng thức trong tam giác

Cách giải:

- Nếu a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác thì: $a, b, c > 0$ và $|b-c| < a < |b+c|$; $|a-c| < b < |a+c|$
 $|a-b| < c < |a+b|$
- Gọi p là nửa chu vi của tam giác $\Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow \begin{cases} p-a > 0 \\ p-b > 0 \\ p-c > 0 \end{cases}$
- Gọi S là diện tích của tam giác $\Rightarrow S \leq ab; S \leq ac; S \leq bc$
- Nếu $\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$
- Tam giác $\triangle ABC$ có $A \leq 90^\circ \Rightarrow a^2 \leq b^2 + c^2$

Bài 1:

Cho a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng

- a) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$
- b) $abc > (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$
- c) $a^3 + b^3 + c^3 + 2abc < a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$

Lời giải

a) Ta có: a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác nên:

$$\left. \begin{aligned} 0 < a < b+c &\Rightarrow a^2 < a(b+c) \\ 0 < b < a+c &\Rightarrow b^2 < b(a+c) \\ 0 < c < a+b &\Rightarrow c^2 < c(a+b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} (a+b-c)(b+c-a) = b^2 - (c-a)^2 \leq b^2 \\ (c+a-b)(c+b-a) = c^2 - (a-b)^2 \leq c^2 \\ (a+b-c)(a+c-b) = a^2 - (b-c)^2 \leq a^2 \end{cases}$$

Nhân từng vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được: $a^2 b^2 c^2 \geq [(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]^2$

$$\Rightarrow abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

$$\text{c) Ta có: } a^3 + b^3 + c^3 + 2abc < a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 2abc - a^2b - a^2c - b^2a - b^2c - c^2a - c^2b < 0 \Leftrightarrow a^2(a-b) + b^2(b-a) - c(a-b)^2 - c(a+b-c) < 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) - c(a-b)^2 - c^2(a+b-c) < 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-c) - c^2(a+b-c) < 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a+b-c)}_{\geq 0} \underbrace{(a-b-c)}_{\leq 0} \underbrace{(a-b+c)}_{\geq 0} < 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Bài 2:

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2

a) Chứng minh rằng: $(1-a)(1-b)(1-c) > 0$

b) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$

Lời giải

a) Chu vi tam giác bằng 2 $\Rightarrow a+b+c=2$

Giả sử $a \geq b \geq c$, ta có: $a < b+c \Rightarrow 2a < a+b+c=2 \Rightarrow a < 1 \Rightarrow 1-a > 0$

Chứng minh tương tự ta có: $1-b > 0; 1-c > 0 \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) > 0$

b) Theo câu a, ta có: $(1-a)(1-b)(1-c) > 0$

$$\Leftrightarrow 1-c-b-a+bc+ba-abc > 0 \Leftrightarrow ab+bc+ca > abc+a+b+c-1 = abc+1 \Leftrightarrow ab+bc+ca > abc+1 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 4 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow 4 > a^2 + b^2 + c^2 + 2(abc+1) \Leftrightarrow 4 > a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 2 \Leftrightarrow 2 > a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \quad (\text{đpcm})$$

Bài 3:

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $(a+b+c)^2 < 9abc$, biết

$$a \leq b \leq c$$

Lời giải

Ta có: $a+b+c \leq 2b+c$ (do $a \leq b$)

Ta chứng minh:

$$(2b+c)^2 \leq 9abc \Leftrightarrow 4b^2 + 4bc + c^2 \leq 9bc \quad (1) \Leftrightarrow 4b^2 - 5bc + c^2 \leq 0 \Leftrightarrow 4b^2 - 4bc - bc + c^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4b(b-c) - c(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(b-c)}_{\leq 0} (4b-c) \leq 0 \quad (2)$$

$$\text{Có: } b \leq c \Rightarrow b-c \geq 0 \text{ và } 4b-c = b+b+b+b-c \geq \underbrace{2b+a+b-c}_{\geq 0}$$

Vậy (2) đúng ta có điều phải chứng minh.

Bài 4:

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác ($a \leq b \leq c$). Chứng minh rằng:

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) \leq 0$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } A &= a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) = (b^2 - c^2)(a^3 - b^3) + (a^2 - b^2)(c^3 - b^3) \\ &= (b - c)(b + c)(a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)(a + b)(c - b)(c^2 + bc + b^2) \\ &= (b - c)(a - b) \left[(b + c)ca^2 + ab + b^2 - (a + b)(c^2 + bc + b^2) \right] = (b - c)(a - b)(a^2b + a^2c - ac^2 - bc^2) \\ &= \underbrace{(b - c)}_{\leq 0} \underbrace{(a - b)}_{\leq 0} \underbrace{(a - c)}_{\leq 0} \underbrace{(ab + bc + ca)}_{> 0} \leq 0 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a, b, c$ có ít nhất hai số bằng nhau.

Dạng 7: Phương pháp làm trội, dùng tổng sai phân

Cơ sở của phương pháp:

Giả sử muốn chứng minh bất đẳng thức $A < B$ ta đi chứng minh $A < C$ rồi chứng minh $C < B$

*) Chú ý:

- Với ba số dương a, b, c (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

$$+ \text{ Nếu } \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

$$+ \text{ Nếu } \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$$

$$+ \text{ Nếu } \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d} (b, d > 0), \text{ dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow ad = bc$$

- Một số tổng sai phân hay dùng

$$+ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$+ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Bài 1:

Cho các số dương a, b, c, d, e . Chứng minh rằng:

$$a) 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

$$b) 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{a+b+d} < 2 \text{ (chuyên Hà Tây, năm 2005 – 2006)}$$

$$c) \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } a, b, c > 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}; \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

b) Ta có: $a, b, c > 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$

Tương tự: $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}; \frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{b+c}{a+b+c+d}$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$$

Cộng các vế cùng chiều ta được: $1 < M < 2 \Rightarrow M$ không là số tự nhiên.

c) Ta đi chứng minh: $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1}$

Do $a, b > 0$, ta có: $\frac{a}{a+1} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+1} < \frac{a+b}{a+b+1}; \frac{b}{b+1} < \frac{a+b}{a+b+1} \Rightarrow \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} < \frac{2(a+b)}{a+b+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1}$$

Đi chứng minh: $\frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$

Do $a, b < 0 \Rightarrow \frac{a}{a+1} > \frac{a}{a+b+1}; \frac{b}{b+1} > \frac{b}{a+b+1}$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} > \frac{a+b}{a+b+1} \Rightarrow \text{bài toán được chứng minh.}$$