

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) . Quy ước chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.

Số đo của góc lượng giác có tia đầu Ou , tia cuối Ov được kí hiệu là $sđ(Ou, Ov)$.

2. Đơn vị đo góc và độ dài cung tròn

Để đo góc, ta dùng đơn vị độ và đơn vị radian.

Quan hệ giữa độ và radian:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{rad}; 1 \text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì độ dài $l = R\alpha$.

Trên đường tròn lượng giác, ta biểu diễn một góc lượng giác có số đo bằng α (độ hoặc radian) bằng cách chọn tia đầu là tia OA và tia cuối là tia OM , với điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sđ(OA, OM) = \alpha$. Điểm M được gọi là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α .

Các giá trị $\cos \alpha, \sin \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của α . $\sin \alpha$ xác định với mọi giá trị của α ; $\cos \alpha$ xác định với mọi giá trị của α ; $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

a) Các công thức lượng giác cơ bản

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; & 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right); & \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right). \end{aligned}$$

b) Giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt

Góc đối nhau (α và $-\alpha$):

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$):

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$):

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

Góc hơn kém nhau (α và $\pi + \alpha$):

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. a) Đổi từ độ sang radian các số đo sau: $30^\circ; 80^\circ 30'$.

b) Đổi từ radian sang độ các số đo sau: $\frac{5\pi}{8}; 3,75$.

Giải

$$\text{a) Ta có: } 30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}; \quad 80^\circ 30' = \left(80 + \frac{30}{60}\right) \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{161\pi}{360}.$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{5\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 112,5^\circ;$$

$$3,75 = 3,75 \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{675}{\pi}\right)^\circ \approx 214,9^\circ.$$

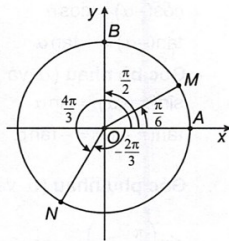
Ví dụ 2. a) Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{\pi}{6}$.

b) Xác định điểm B trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{\pi}{2}$.

c) Xác định điểm N trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{-2\pi}{3}$.

Giải

Để xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác α , ta thực hiện như sau: Chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung tròn. Xác định điểm cuối M của cung tròn theo chiều ngược chiều kim đồng hồ nếu α dương, hay theo chiều kim đồng hồ nếu α âm, sao cho góc $\widehat{AOM} = \alpha$.



Hình 1.1

Điểm M, N và B được xác định trong Hình 1.1.

Ví dụ 3. Cho góc lượng giác có số đo bằng $\frac{4\pi}{3}$.

- Xác định điểm N trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.
- Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

Giải

a) Điểm N trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{4\pi}{3}$ được xác định như trong Hình 1.1.

b) Từ đường tròn lượng giác và định nghĩa của các giá trị lượng giác, ta có

$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}; \cot \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 4. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết $\sin \alpha = \frac{2}{7}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Giải. Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$. Mặt khác, từ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{49}} = -\frac{\sqrt{45}}{7} = -\frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{7}}{-\frac{3\sqrt{5}}{7}} = -\frac{2}{3\sqrt{5}} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{\frac{2}{3\sqrt{5}}} = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Do đó,

và

.

Chú ý. Khi tính giá trị của một góc lượng giác thuộc một miền cho trước, cần xét dấu của giá trị lượng giác trong miền đã cho. Sau đó, sử dụng các công thức lượng giác cơ bản để tính các giá trị lượng giác còn lại.

Ví dụ 5. Bằng cách sử dụng giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt, hãy tính:

a) $\cos \frac{-15\pi}{4}$

b) $\cot(-675^\circ)$;

c) $\sin \frac{11\pi}{3}$

Giải. Ta có:

a) $\cos \frac{-15\pi}{4} = \cos \frac{15\pi}{4} = \cos \left(3\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = -\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cot(-675^\circ) = \cot(45^\circ - 720^\circ) = \cot 45^\circ = 1$

c) $\sin \frac{11\pi}{3} = \sin \left(3\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin \left(\pi - \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. BÀI TẬP

Câu 1. Hoàn thành bảng sau:

Số đo độ	20°	?	150°	500°	?	?
Số đo radian	?	$\frac{11\pi}{2}$?	?	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{15}$

Lời giải

Hoàn thành bảng sau:

Số đo độ	20°	990°	150°	500°	-150°	84°
Số đo radian	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{25\pi}{9}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{15}$

Câu 2. Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm Q biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $-\frac{5\pi}{7}$

c) 270° ;

d) -415° .

Lời giải

HD: Vẽ đường tròn lượng giác và tìm điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

Câu 3. Một đường tròn có bán kính $20m$. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là:

a) $\frac{2\pi}{7}$

b) 36° .

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } I = R\alpha = 20 \cdot \frac{2\pi}{7} = \frac{40\pi}{7} (m)$$

$$b) \text{ Ta có } I = R \cdot \frac{\pi a}{180} = 20 \cdot \frac{\pi 36}{180} = 4\pi (m)$$

Câu 4. Cho $\cos x = -\frac{5}{13}$ ($90^\circ < x < 180^\circ$). Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x .

Lời giải

$$1.4. \text{ Từ đẳng thức } \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ suy ra } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}.$$

$$\text{Mặt khác } 90^\circ < x < 180^\circ \text{ nên } \sin x > 0. \text{ Do đó } \sin x = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\text{Từ đó tính được } \tan x = \frac{12}{13} : \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{5}; \cot x = -\frac{5}{12}.$$

Câu 5. Cho $\sin a + \cos a = m$. Hãy tính theo m .

$$a) \sin a \cos a;$$

$$b) \sin^3 a + \cos^3 a;$$

$$c) \sin^4 a + \cos^4 a.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } \sin a + \cos a = m \text{ nên } (\sin a + \cos a)^2 = m^2 \text{ hay } 1 + 2\sin a \cos a = m^2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sin a \cos a = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

$$b) \sin^3 a + \cos^3 a = (\sin a + \cos a)^3 - 3\sin a \cos a (\sin a + \cos a)$$

$$= m^3 - 3m \frac{m^2 - 1}{2} = \frac{3m - m^3}{2}.$$

$$c) \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a$$

$$= 1 - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - \frac{(m^2 - 1)^2}{2}.$$

Câu 6. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1;$$

$$b) \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x;$$

$$c) (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } VT &= \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 = VP \end{aligned}$$

b) Ta có

$$VT = \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x = VP.$$

c)

$$\begin{aligned} VT &= (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 = VP \end{aligned}$$

Câu 7. Rút gọn biểu thức $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \\ &= \cos^4 x - \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x + 3\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2 \end{aligned}$$

Câu 8. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 860mm .

Lời giải

a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{12}{6} = 2$ vòng, tức là quay được một góc $4\pi(\text{rad})$ hay 720° .

b) Trong 1 phút, quãng đường mà người đi xe đã đi được là:

$$I = 430 \cdot 4\pi \cdot 60 = 103200\pi(\text{mm}).$$

Câu 9. Kim giờ dài 6cm và kim phút dài 11cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

Lời giải

Một giờ, kim phút quét được một góc lượng giác 2π ; kim giờ quét được một góc $\frac{\pi}{6}$. Hiệu vận

tốc giữa kim phút và kim giờ là $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Vào lúc 4 giờ hai kim tạo với nhau một góc là $\frac{2\pi}{3}$.

Khoảng thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) : \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{11}$ (giờ)

Vậy sau $\frac{1}{11}$ (giờ) hai kim sẽ vuông góc với nhau.

Tổng quãng đường hai đầu mút kim đi được là $I = R \cdot \alpha = 6 \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{\pi}{6} + 11 \cdot \frac{1}{11} \cdot 2\pi = \frac{23\pi}{11} (cm)$.