**ĐỀ THI OLYMPIC HUYỆN**

**MÔN TOÁN LỚP 8**

**Năm học 2015-2016**

(Thời gian làm bài : 120 phút)

**Bài 1.** Phân tích thành nhân tử: $x^4 - 6x^2 - 7x - 6$

**Bài 2.** Cho $x, y, z$ là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$x^4 + y^4 + z^4$ biết $x + y + z = 2$

**Bài 3.** Cho $x, y, a, b$ là những số thực thỏa mãn:

$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b}$ và $x^2 + y^2 = 1$

Chứng minh: $\frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{2}{(a+b)^{1003}}$

**Bài 4.** Cho $a, b, c$ là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{bc+a^2} + \frac{b+c}{ac+b^2} + \frac{c+a}{ab+c^2} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

**Bài 5.** Cho tam giác vuông cân $ABC(AB = AC)$. Trên cạnh $AB$ lấy điểm $M$ sao cho $BM = 2MA$, trên nửa mặt phẳng bờ $AB$ không chứa điểm $C$ vẽ đường thẳng $Bx$ vuông góc với $AB$, trên $Bx$ lấy điểm $N$ sao cho $BN = \frac{1}{2}AB$. Đường thẳng $MC$ cắt $NA$ tại $E$, đường thẳng $BE$ cắt đường thẳng $AC$ tại $F$.

a) Chứng minh $AF = AM$.

b) Gọi $H$ là trung điểm của $FC$. Chứng minh $EH = BM$

**ĐÁP ÁN**

**Bài 1.**

$$x^4 - 6x^2 - 7x - 6$$
$$= x^4 + 2x^3 - 2x^3 - 4x^2 - 2x^2 - 4x - 3x - 6$$
$$= x^3(x+2) - 2x^2(x+2) - 2x(x+2) - 3(x+2)$$
$$= (x+2)(x^3 - 2x^2 - 2x - 3)$$
$$= (x+2)(x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x + x - 3)$$
$$= (x+2)\left[x^2(x-3) + x(x-3) + (x-3)\right]$$
$$= (x+2)(x-3)(x^2 + x + 1)$$

**Bài 2.**

Áp dụng công thức Bunhiacopski ta có:

$$(x+y+z)^4 \le \left[(x+y+z)^2\right]^2 \le \left[3(x+y+z)^2\right]^2$$
$$\le 9(x^2+y^2+z^2)^2 \le 27(x^4+y^4+z^4)$$
$$\Rightarrow 16 \le 27(x^4+y^4+z^4) \Rightarrow x^4+y^4+z^4 \ge \frac{16}{27}$$

Vậy GTNN của $x^4+y^4+z^4$ là $\frac{16}{27} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$

**Bài 3.**

Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{(x^2+y^2)^2}{a+b} \Leftrightarrow (bx^4 + ay^4)(a+b) = ab(x^2+y^2)^2$$
$$\Leftrightarrow b^2x^4 + a^2y^4 - 2abx^2y^2 = 0 \Leftrightarrow (bx^2 - ay^2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow bx^2 - ay^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2+y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^{2006}}{a^{1003}} = \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{1}{(a+b)^{1003}} \Leftrightarrow \frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{2}{(a+b)^{1003}} \quad (dpcm)$$

**Bài 4.**

Ký hiệu vế trái là $A,$ vế phải là $B,$ xét hiệu $A-B$

$$\frac{a+b}{bc+a^2}-\frac{1}{a}+\frac{b+c}{ac+b^2}-\frac{1}{b}+\frac{c+a}{ab+c^2}-\frac{1}{c}$$
$$=\frac{a^2+ab-bc-a^2}{a\left(bc+a^2\right)}+\frac{b^2+bc-ac-b^2}{b\left(ac+b^2\right)}+\frac{c^2+ac-ab-c^2}{c\left(ab+c^2\right)}$$
$$=\frac{b(a-c)}{a\left(bc+a^2\right)}+\frac{c(b-a)}{b\left(ac+b^2\right)}+\frac{a(c-b)}{c\left(ab+c^2\right)}$$

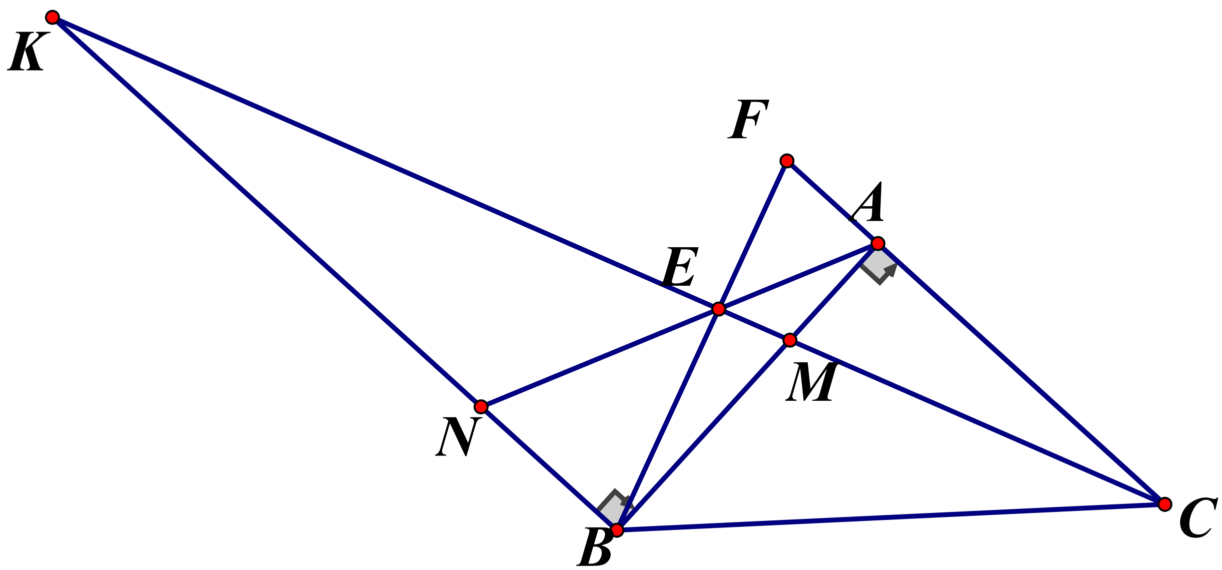
Do $a,b,c$ bình đẳng nên giả sử $a\geq b\geq c,$ khi đó $b(a-c)\geq 0, c(b-a)\leq 0$, $a(c-b)\leq 0$

$$a^3\geq b^3\geq c^3\Rightarrow abc+a^3\geq abc+b^3\geq abc+c^3\Rightarrow \frac{b(a-c)}{a\left(bc+a^2\right)}\leq\frac{b(a-c)}{b\left(ac+b^2\right)}$$

$$\Rightarrow A-B\leq\frac{b(a-c)}{b\left(ac+b^2\right)}+\frac{c(b-a)}{b\left(ac+b^2\right)}+\frac{a(c-b)}{c\left(ab+c^2\right)}=\frac{ab-ac}{b\left(ac+b^2\right)}+\frac{ac-ab}{c\left(ab+c^2\right)}$$
$$=\frac{a(b-c)}{b\left(ac+b^2\right)}-\frac{a(b-c)}{c\left(ab+c^2\right)}$$

Mà $\frac{1}{b\left(ac+b^2\right)}\leq\frac{1}{c\left(ab+c^2\right)}$ nên $A-B\leq 0$ đpcm

**Bài 5.**




a) Đường thẳng $EC$ cắt đường thẳng BN tại K.

Ta có: $AC \perp AB(gt), KB \perp AB(gt) \Rightarrow FC//KB$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{AF}{NB}=\dfrac{AE}{EN}\\ \dfrac{AC}{NK}=\dfrac{AE}{EN}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{AF}{NB}=\frac{AC}{NK} \Rightarrow \frac{AF}{AB}=\frac{AC}{NK} \Rightarrow AF=\frac{AB^2}{2NK} \quad (1)$$

$$\frac{AC}{BK}=\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AC}{KN+NB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{KN+\dfrac{AB}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2AB}{2KN+AB}=\frac{1}{2} \Rightarrow 4AB=2KN+AB \Rightarrow KN=\frac{3}{2}AB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AF=\dfrac{AB^2}{3AB}=\dfrac{AB}{3} \Rightarrow AF=AM$ (Đpcm)

b) Từ chứng minh trên suy ra $\Delta AFB=\Delta AMC \Rightarrow \widehat{ABF}=\widehat{ACM}$

Mà $\widehat{ABF}+\widehat{AFB}=90^0 \Rightarrow \widehat{ACM}+\widehat{AFB}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{FEC}=90^0 \Rightarrow EH=\dfrac{FC}{2}=FH$

Mà $FH = FA + AH = \frac{AC}{3} + \frac{AC}{3} = \frac{2AC}{3} = BM \Rightarrow EH = BM\,(dfcm)$