Chuyên đề 9.

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT BẤT BIẾN ĐỂ GIẢI TOÁN SUY LUẬN LOGIC

A. Kiến thức cần nhớ

Bài toán suy luận logic thường phát biểu dưới dạng toán đố (có lời văn). Để làm được dạng toán này không nhất thiết cần nhiều kiến thức phức tạp mà thường đòi hỏi suy tư sáng tạo, nhận xét tinh tế.

Ta thường gặp bài toán cho trạng thái ban đầu cùng các thao tác thay đổi liên tục trạng thái đó và yêu cầu cần phải chỉ ra một điều gì đó về trạng thái cuối cùng của nó. Việc khảo sát toàn bộ sau tất cả các lần thay đổi như vậy rất phức tạp. Khi đó ta có thể trả lời câu hỏi mà bài toán yêu cầu nhờ tính toán một đại lượng nào đó đặc trưng cho trạng thái của bài và được đảm bảo qua tất cả các lần thay đổi. Đại lượng không đổi đó được gọi là bất biến của bài toán đã cho. Như vậy trong trạng thái cuối cùng của bài toán, giá trị của bất biến vẫn giữ nguyên như trạng thái ban đầu, tức là hệ thống không thể ở trong trạng thái với một giá trị khác với bất biến. Để tìm lời giải cho bài toán:

- Ta xác định đại lượng ở hai trạng thái: trạng thái ban đầu và trạng thái cuối cùng.
- Khảo sát sự thay đổi của nó qua một số lần thay đổi liên tiếp để phát hiện sự bất biến.

Các tính chất bất biến thường gặp là: xét tính chẵn lẻ, xét tính chia hết của một số nguyên, xét màu sắc của vật cần xét.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Trên bảng, người ta viết 2020 dấu (+) và 2021 dấu (-). Giả sử mỗi lần ta thực hiện thao tác: Hai dấu bất kì trên bảng bị xóa đi và thay bằng dấu (+) nếu chúng giống nhau, thay bằng dấu (-) nếu chúng khác nhau. Sau khi thực hiện nhiều lần đến khi trên bảng còn lại một dấu. Hỏi trên bảng còn lại dấu (+) hay dấu (-)?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Đọc xong đề bài, chúng ta nhận thấy:

- Lúc đầu có tất cả 4041 dấu cả dấu (+) và dấu (-).

- Mỗi lần thực hiện thao tác, xóa hai dấu và viết lại một dấu nên sau mỗi thao tác số dấu trên bảng giảm đi 1.

- Do vậy sau 4040 lần thực hiện thao tác, trên bảng chỉ còn 1 dấu.

- Bài toán không thể thực hiện hết được tất cả các thao tác trong mọi trường hợp, do vậy chúng ta thử một vài khả năng xảy ra để tìm yếu tố bất biến (không đổi) trong mọi thao tác. Thật vậy:

+ ***Trường hợp 1.*** Nếu xóa hai dấu (+) thì viết lại một dấu (+).

+ ***Trường hợp 2.*** Nếu xóa hai dấu (-) thì viết lại một dấu (+).

+ ***Trường hợp 3.*** Nếu xóa một dấu (+) và một dấu (-) thì viết lại một dấu (-).

- Ta nhận thấy trong ba trường hợp thì số dấu (+) có thể giữ nguyên, có thể tăng 1, có thể giảm 1. Còn số dấu (-) chỉ giữ nguyên hoặc giảm 2. Như vậy số dấu (-) trong mọi thao tác luôn luôn là số lẻ.

✓ *Trình bày lời giải*

Mỗi lần thực hiện thao tác: Hai dấu bất kì trên bảng bị xóa đi và thay bằng dấu (+) nên chúng giống nhau, thay bằng dấu (-) nếu chúng khác nhau thì số dấu (-) giữ nguyên hoặc giảm đi hai. Vì vậy tính chẵn lẻ của dấu (-) không thay đổi qua các thao tác. Ban đầu có 2021 dấu (-), tức là số dấu trừ là một số lẻ. Vì vậy ở cuối cùng còn lại một dấu (số lẻ dấu) thì phải là dấu (-).

✔ ***Nhận xét***: Ở ví dụ 1, tính bất biến là số các dấu (-) còn lại sau mỗi lần xóa luôn là một số lẻ.

Ví dụ 2: Cho dãy số 2, 4, 6, 8,…,200 (gồm 100 số nguyên dương chẵn đầu tiên). Sau khi thêm các dấu (+) hoặc dấu (-) vào giữa các số trên một cách tùy ý rồi thực hiện phép toán. Bạn Toán tính được kết quả là 34, bạn Học tính được là – 10. Hỏi bạn nào tính sai?

Giải

✔ *Tìm cách giải*. Nhận thấy dãy số gồm toàn số chẵn nên kết quả cũng là số chẵn, mà 34 và – 10 cũng là số chẵn nên không thể vận dụng tính chẵn lẻ được.

Chúng ta thử cách khác, viết toàn bộ dấu (+) thì kết quả là 10100. Để kết quả nhỏ hơn (34 hoặc – 10) thì chúng ta đổi dấu một vài dấu (+) thành dấu (-). Chúng ta thử đổi dấu (+) trước số 6 thì thấy kết quả giảm đi 12, tức là giảm đi 2.6. Quan sát tiếp một vài số nữa chúng ta thấy giảm đi 2 lần số bị đổi dấu. Tức là kết quả còn lại luôn luôn chia hết cho 4. Còn số 34 và – 10 đều không chia hết cho 4.

✔ *Trình bày lời giải*

Tổng $S = 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 200 = 10100$.

Khi thay số a bởi số - a thì tổng S giảm đi 2a, mà a là số chẵn nên S giảm đi bội của 4. Tổng S ban đầu là số chia hết cho 4, nên kết quả cuối cùng sau khi thay dấu (+) hoặc dấu (-) thì phải là một bội số của 4.

Hai số 34 và – 10 đều không phải là bội số của 4, nên cả hai bạn đều tính sai.

✔ ***Nhận xét.*** Ở ví dụ 2, tính bất biến là kết quả của tổng các số luôn là bội số của 4.

Ví dụ 3: Trong dãy số 13576193923… bắt đầu từ chữ số thứ năm, mỗi chứ số bằng chữ số hàng đơn vị của tổng bốn chữ số đứng ngay trước nó. Hỏi trong dãy này có chứa cụm chữ số 1234 và 6789 không?

Giải

✔ *Tìm cách giải.* Các chữ số trong dãy chỉ tồn tại hai trạng thái chẵn hoặc lẻ. Quan sát những lần xuất hiện chữ số chẵn hoặc chữ số lẻ trong dãy, chúng ta có lời giải sau:

✔ *Trình bày lời giải.*

Nhận thấy tổng của 4 chữ số lẻ là một số chẵn, tổng của 3 chữ số lẻ và một chữ số chẵn là một số lẻ.

Ta cần tìm quy luật chẵn lẻ (bất biến) của các chữ số trong dãy đã cho bằng cách:

Ta thay mỗi chữ số của dãy đã cho bằng số 0 nếu nó là số chẵn và bằng số 1 nếu nó là một số lẻ. Khi đó ta nhận được dãy số 111101111011110…, trong dãy này cứ sau bốn chữ số 1 có một chữ số 0 và cứ sau một chữ số 0 là bốn chữ số 1 (tính bất biến). Nhận thấy các dãy 1234 và 6789 ứng với các dãy bốn chữ số 1010 và 0101 nên không thể có mặt trong dãy số trên.

Ví dụ 4: Cho bàn cờ kích thước 10x10 ô vuông. Hỏi có thể dùng 49 hình chữ nhật kích thước 1x2 để ghép sao cho chỉ còn 2 ô ở hai góc đối diện của bảng được hay không?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Nhận xét, mỗi mảnh hình chữ nhật chỉ ghép được 2 ô liền nhau, nên chúng ta nghĩ tới việc tô màu hoặc đánh số chẵn lẻ.

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta ghi các số 1 và 2 vào bảng sao cho hai ô liền nhau được ghi hai số khác nhau (chẳng hạn như hình vẽ), sẽ có 50 ô số 1 và 50 ô số 2, hai số ghi ở hai góc đối diện sẽ cùng là số 1 hoặc cùng là số 2.

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1

Mỗi lần ghép một hình chữ nhật thì chiếm hai ô cùng hàng hoặc cùng cột liền nhau, tức là tô màu một ô ghi số 1; một ô ghi số 2. Như vậy sau mỗi lần ghép một hình chữ nhật thì số ô ghép t hình chữ nhật ghi số 1 bằng số ô chưa tô màu ghi số 2. Sau 49 lần ghép hình chữ nhật sẽ còn 2 ô: 1 ô ghi số 1, 1 ô ghi số 1. Hai ô này không thể ở hai góc đối của bảng được.

Ví dụ 5: Cho bảng ô vuông kích thước 2009 x 2010, trong mỗi ô lúc đầu đặt một viên sỏi. Gọi T là thao tác lấy 2 ô bất kì có sỏi và chuyển từ mỗi ô đó một viên sỏi đưa sang ô bên cạnh (là ô có chung cạnh với ô có chứa sỏi). Hỏi sau một số hữu hạn phép thực hiện các thao tác trên ta có thể đưa hết sỏi ở trên bảng về cùng một ô không?

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên TP Hải Phòng, năm học 2009 – 2010)

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Tương tự như ví dụ trên, chúng ta nhận thấy mỗi thao tác chỉ dịch chuyển hai viên sỏi ở hai ô sang ô bên cạnh. Do vậy chúng ta nghĩ tới việc tô màu như bàn cờ vua. Mỗi thao tác, một viên sỏi chuyển từ ô đen sang ô trắng hoặc ngược lại. Nếu tất cả các viên sỏi vào một ô đen (hoặc ô trắng) thì số sỏi ở ô đen là số chẵn và số sỏi ở ô trắng cũng là số chẵn. Vậy ta có lời giải sau:

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta tô màu các ô vuông của bảng bằng hai màu đen trắng như bàn cờ vua. Lúc đầu tổng số sỏi ở các ô đen bằng 1005 x 2009 là một số lẻ.

Sau mỗi phép thực hiện thao tác T, xảy ra những trường hợp sau:

- ***Trường hợp 1.*** Nếu lấy hai viên sỏi ở hai ô đen thì chuyển sang hai ô trắng $\Rightarrow$ số sỏi ở ô đen giảm 2.
- ***Trường hợp 2.*** Nếu lấy hai viên sỏi ở hai ô trắng thì chuyển sang hai ô đen $\Rightarrow$ số sỏi ở ô đen tăng 2.

- ***Trường hợp 3.*** Nếu lấy một viên sỏi ở ô đen và một viên sỏi ở ô trắng thì chuyển sang một ô trắng và một ô đen $\Rightarrow$ số sỏi ở ô đen không đổi.

Như vậy mọi trường hợp số sỏi ở ô đen chỉ tăng (hoặc giảm) 2 viên hoặc không đổi suy ra tổng số sỏi ở các ô đen luôn là số lẻ. Vậy không thể chuyển tất cả các viên sỏi trên bằng ô vuông về cùng một ô sau một số hữu hạn các phép thực hiện thao tác T.

Ví dụ 6: Một bảng ô vuông gồm 2019 hàng và 2020 cột. Ký hiệu ô ở hàng thứ m và cột thứ n là (m,n). Người ta tô màu các ô của bảng theo cách sau: Lần thứ nhất tô màu 3 ô (r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2) với $1 \le r \le 2017; 1 \le s \le 2019.$ Từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng 3 ô chưa được tô màu liền nhau cùng hàng hoặc cùng cột. Hỏi bằng cách này có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho không?

Giải

Ta ghi vào bảng các số tự nhiên theo cách sau: Từ trái sang phải, mỗi hàng ghi lần lượt các số tự nhiên từ 1 đến 2020. Như vậy, 3 ô liền nhau trong cùng một hàng ghi 3 số tự nhiên liên tiếp, 3 ô liền nhau trong cùng một cột sẽ ghi 3 số tự nhiên giống nhau.

Ở lần tô màu thứ nhất, tổng 3 số ghi ở 3 ô được tô màu là s + s + 1+ s + 1 = 3s + 2 $(1 \le s \le 2019)$ là một số chia cho 3 dư 2.

Từ lần tô màu thứ hai trở đi, mỗi lần tô tổng 3 ô ghi ở 3 ô được tô màu là một số chia hết cho 3 (vì 3 số tự nhiên liên tiếp hoặc 3 số tự nhiên giống nhau).

Do đó, sau mỗi lần tô màu theo quy luật trên thì các ô đã được tô có tổng các số ghi trên đó là số chia cho 3 dư 2.

Tổng số các số ghi trên bảng ban đầu là $2019.(1+2+3+...+2020) = 2019.2021.1010$ chia hết cho 3. Vì vậy sau mỗi lần tô màu thì các ô còn lại (chưa tô) có tổng các số ghi trên đó là một số chia cho 3 dư 1 (tính bất biến). Vì vậy bằng mọi cách đều không thể tô màu được tất cả các ô vuông của hàng.

Ví dụ 7: Trên mặt bàn có 2005 đồng xu kích thước như nhau, mỗi đồng xu có hai mặt: một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, tất cả các đồng xu đều ngửa mặt xanh lên trên. Thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi phải đổi mặt 4 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2006 lượt chơi, có thể nhận được tất cả 2005 đồng xu trên bàn đều ngửa mặt đỏ lên được không? Vì sao?

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội, năm học 2005 – 2006)

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Đọc xong đề bài, chúng ta nhận thấy:

- Bài toán không thể thực hiện hết được tất cả các thao tác trong mọi trường hợp, do vậy chúng ta thử một vài khả năng xảy ra để tìm yếu tố bất biến (không đổi) trong mọi thao tác. Thật vậy:

- ***Trường hợp 1.*** Nếu đổi 4 đồng xu mặt xanh thành 4 đồng xu mặt đỏ ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên giảm 4.
- ***Trường hợp 2.*** Nếu đổi 3 đồng xu mặt xanh, 1 đồng xu mặt đỏ thành 3 đồng xu mặt đỏ, 1 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên giảm 2.

- ***Trường hợp 3.*** Nếu đổi 2 đồng xu mặt xanh, 2 đồng xu mặt đỏ thành 2 đồng xu mặt đỏ, 2 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên không đổi.
- ***Trường hợp 4.*** Nếu đổi 1 đồng xu mặt xanh, 3 đồng xu mặt đỏ thành 1 đồng xu mặt đỏ, 3 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng 2.
- ***Trường hợp 5.*** Nếu đổi 4 đồng xu mặt đỏ thành 4 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng 4.

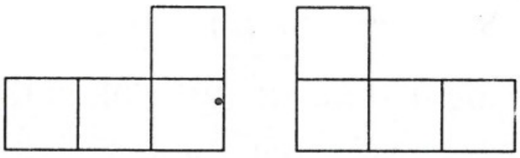
- Ta nhận thấy trong năm trường hợp thì đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng hoặc giảm đi số chẵn lần. Như vậy số đồng xu mặt xanh ngửa lên trong mọi thao tác luôn luôn là số lẻ và số đồng xu mặt đỏ ngửa lên luôn là số chẵn.

✓ *Trình bày lời giải*.

Không thể nhận được tất cả 2005 đồng xu trên bàn đều ngửa mặt đỏ lên trên.Vì thế mỗi lần thay đổi 4 đồng xu: có x đồng xu ngửa mặt xanh lên trên và có 4 – x đồng xu ngửa mặt đỏ lên. Do đó số đồng xu ngửa mặt đỏ lên đã thay đổi là $|4x-2|$, một số chẵn đồng xu. Nghĩa là số các đồng xu ngửa mặt xanh thành mặt đỏ không thay đổi tính chẵn lẻ. Ban đầu có 0 đồng xu ngửa mặt đỏ lên là một số chẵn thì không thể biến đổi thành số lẻ là 2005 đồng xu ngửa mặt đỏ lên.

✓ ***Nhận xét.*** Vì tính chất bất biến là tính chẵn lẻ nên ta thay số 2005 thành một số lẻ bất kỳ và số 4 thành một số chẵn bất kỳ thì bài toán không thay đổi kết quả.

Ví dụ 8: Có thể phủ kín bảng 20 x 13 ô vuông bằng các miếng lát có một trong hai dạng dưới (có thể xoay và sử dụng đồng thời cả hai dạng miếng lát) sao cho các miếng lát không chờm lên nhau không?



(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên TP Hải Phòng, năm học 2013 – 2014)

Giải

Tô màu các dòng của bảng ô vuông bằng hai màu đen trắng xen kẽ: dòng 1 đen, dòng 2 trắng, dòng 3 đen, dòng 4 trắng,…

Khi đó mỗi miếng lát sẽ luôn phủ đúng 3 ô đen 1 ô trắng hoặc 3 ô trắng 1 ô đen.

Trong bảng, số ô đen bằng số o trắng nên số miếng lát phủ 3 ô đen 1 ô trắng bằng số miếng lát phủ 3 ô trắng 1 ô đen, do đó phải có chẵn miếng lát.

Tuy nhiên trong bảng có 65 miếng lát, mâu thuẩn. Vậy không thể được phủ được bảng thỏa mãn.

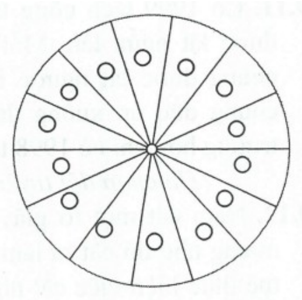
C. Bài tập vận dụng

9.1. Trên bảng ghi một dãy số gồm 2019 số 1 và 2020 số 2. Ta thực hiện xóa hai số bất kỳ và thay bằng hiệu của chúng. Quá trình cứ tiếp tục như vậy. Hỏi trên bảng có khi nào gồm toàn số 0 hay không?

9.2. Một tờ giấy được xé thành 4 mảnh, mỗi tờ giấy trong số tờ giấy nhỏ này lại được xe nhỏ thành 4 mảnh nhỏ nữa, …, tiếp tục như vậy có khi nào được 2019 mảnh giấy hay không? Vì sao?

9.3. Có 2019 tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả các tách trà đều được lật ngửa lên. Giả sử mỗi lần người ta làm cho 210 tách trong chúng được lật ngược lại. Hỏi sau một số lần như vậy có thể làm cho tất cả các tách đều úp xuống được không?

9.4. Một hình tròn được chia thành 14 hình quạt bằng nhau. Trong mỗi hình quạt đặt một viên bi. Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần lấy hai viên bi ở hai hình quạt khác nhau và chuyển mỗi viên sang hình quạt kề với hình quạt chứa nó nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số hữu hạn bước ta có thể chuyển được tất cả các viên bi vào cùng một hình quạt được không?



(Đề thi vào lớp 10 chuyên, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, năm học 1996 – 1997)

9.5. Ở sáu đỉnh của một lục giác lồi có ghi 6 số chẵn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Ta thay đổi các số như sau: mỗi lần chọn một cạnh bất kì rồi cộng mỗi số ở hai đỉnh cạnh đó với cùng một số nguyên. Hỏi sau các lần thay đổi như thế thì sáu số mới ở đỉnh lục giác có bằng nhau không? Vì sao?

9.6. Trên hòn đảo có một loài thằn lằn sinh sống, chúng có ba màu: xanh, đỏ, tím. Để lẩn trốn và săn mồi thì loài thằn lằn này biến đổi màu như sau: nếu hai con thằn lằn khác màu gặp nhau thì chúng đồng thời đổi màu sang màu thứ ba. Nếu hai còn thằn lằn cùng màu gặp nhau thì giữ nguyên màu. Có khi nào tất cả các con thằn lằn trở thành cùng màu không? Vì sao?

9.7. Trên bảng ghi các số từ 1 đến 2020. Thực hiện trò chơi sau: Mỗi lần thay đồng thời tất cả các số có ở trên bảng bởi tổng các chữ số của nó. Hỏi nếu sau một số lần ta nhận được 2020 số mà mỗi số chỉ gồm một chữ số thì có bao nhiêu số 1.

9.8. Có một bao đựng 150 hòn bi đen và 75 hòn bi trắng. Một người bốc từ bao ra mỗi lần hai hòn bi một cách ngẫu nhiên. Nếu anh ta bốc được một hòn đen và một hòn trắng, anh ta lại bỏ viên trắng vào bao, cất đi viên đen. Nếu anh ta bốc được 2 viên cùng màu, anh ta cất đi cả hai rồi bỏ lại vào bao một hòn đen (giả sử anh ta có nhiều hòn đen ở ngoài đủ để làm chuyện đó nếu cần). Quá trình lặp lại. Sau cùng còn đúng một viên bi trong bao, lý do tại sao? Viên bi đó màu gì?

9.9. Có thể lát kín một cái sân hình vuông cạnh 3,5m bằng những viên gạch hình chữ nhật kích thước 25cm x 100cm được hay không?

(Thi tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, tỉnh Hòa Bình, năm học 2013-2014)

9.10. Trong bảng ô vuông 10 x 10 . Có thể sắp đặt 25 miếng bìa hình chữ nhật kích thước 1x4 phủ kín toàn bộ bảng ô vuông hay không?

9.11. Có 1999 tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả các tách trà đều được lật ngửa lên. Mỗi một nước đi, ta làm cho đúng 100 tách trong chúng được lật ngược lại. Sau một số nước đi, có thể làm cho tất cả chúng đều úp xuống được không? Tại sao? Trả lời câu hỏi này trong trường hợp chỉ có 1998 tách.

(Thi chọn đội tuyển Hồng Koong tham gia IMO, năm học 2000, vòng 1)

9.12. Nam cắt một tờ giấy ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng, rồi lấy một số miếng nhỏ đó cắt ra làm 4 hoặc 8 miếng nhỏ hơn và Nam cứ tiếp tục thực hiện việc cắt như thế nhiều lần. Hỏi với việc cắt như vậy, Nam có thể cắt được 2016 miếng lớn nhỏ hay không? Vì sao?

(Thi tuyển sinh lớn 10, THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh,năm học 2016-2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

9.1 Ban đầu có 2019 số 1 (số 1 là số lẻ)

- Nếu xóa hai số giống nhau, thay bằng hiệu của chúng thì số 1 giữ nguyên hoặc giảm đi 2 số nên số số 1 sau lần xóa vẫn là số lẻ.

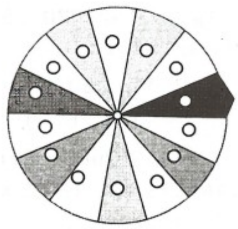
- Nếu xóa hai số khác nhau (1 và 0) thay bằng hiệu của 2 số thì số 1 không đổi.

Như vậy sau mỗi lần xóa hai số bất kì thay bằng hiệu của chúng thì số số 1 vẫn là số lẻ nên không thể trên bảng còn toàn số 0 được.

9.2 Số mảnh giấy sau mỗi lần xé tăng thêm 3. Vậy ở lần xé thứ n thì số mảnh giấy là 3n + 1. Mà 2019 : 3 dư 0. Suy ra không được.

9.3 Mỗi lần lật ngửa 210 tách: giả sử x tách ngửa và 210 – x tách úp. Do đó mỗi lần thực hiện lật ngửa thì số tách ngửa thay đổi đi $|210-2x|$, mọt số chẵn. Ban đầu có 0 tách úp xuống là một số chẵn thì không thể biến đổi thành số lẻ 2019 tách úp xuống được.

9.4 Ta tô màu như hình vẽ. Có 7 viên bi ở hình quạt đen và 7 viên bi ở hình quạt trắng.



Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần lấy hai viên bi ở hai hình quạt khác nhau và chuyển mỗi viên sang hình quạt kề với hình quạt chứa nó nhưng theo hai chiều ngược nhau:

- Nếu lấy hai viên ở hai hình quạt khác màu, thì vẫn chuyển vào hai hình quạt khác màu. Do vậy số viên bi ở mỗi màu hình quạt là không đổi.

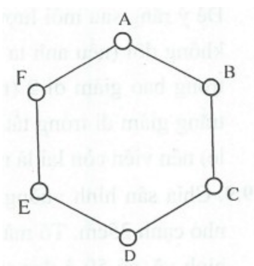
- Nếu lấy hai viên ở hai hình quạt màu trắng thì chuyển sang 2 hình quạt màu đen, suy ra số bi ở hình quạt màu đen tăng 2.

- Nếu lấy hai viên ở hình quạt màu đen thì chuyển sang 2 hình quạt màu trắng, suy ra số bi ở hình quạt màu đen giảm 2.

Do vậy sau mỗi lần thực hiện thì tổng số bi ở hình quạt màu đen vẫn là số lẻ nên không thể thực hiện được.

9.5 Kí hiệu các đỉnh theo chiều kim đồng hồ bởi các chữ cái A, B, C, D, E, F (như hình vẽ). Giả sử các số chẵn liên tiếp được ghi tương ứng với đỉnh này là a, b, c, d, e, f.

Đặt $S=(b+d+f)-(a+c+e)$



Nhận thấy hai số ghi hai đỉnh thuộc cùng một cạnh gồm một số trong các số b, d, f và một số trong các số a, c, e. Do đó khi cộng hai số này với cùng một số nguyên thì S không thay đổi.

Ban đầu a, b, c, d, e, f là các số chẵn liên tiếp nên S = 6. Vì vậy dù có thực hiện bao nhiêu lần công việc cộng với cùng một số nguyên thì S vẫn bằng 6, tức là S khác 0, chứng tỏ không thể làm cho 6 số ở 6 đỉnh bằng nhau được.

9.6 Ta chứng minh rằng sau mỗi lần gặp nhau thì số dư cho 3 có đầy đủ 3 số dư là 0, 1, 2.

Nếu hai con khác màu gặp nhau thì đổi sang màu thứ 3 nên số dư chia cho 3 của các màu giảm 1, giảm 2 và tăng 2 nên có ba số dư là 1, 2, 0 vẫn đầy đủ.

Mặt khác, nếu tất cả đều về 1 màu thì số dư sẽ là 0, 0, 0. Điều này vô lý nên không thể có trường hợp tất cả các tắc kè có cùng màu.

9.7 *Định hướng:* Xét số dư chia cho 9 dư 1.

Ta biết rằng một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 9. Do đó nếu thay đồng thời các số có ở trên bảng bởi các chữ số của nó thì số các số chia cho 9 dư 1 vẫn không đổi.

Muốn biết sau một số lần ta nhận được 2020 số mà mỗi số chỉ có một chữ số có bao nhiêu số 1, chúng ta chỉ cần tìm xe từ 1 đến 2020 có bao nhiêu số chia cho 9 dư 1.

Các số chia cho 9 dư 1 là: 1; 10; 19; 28; 37; …; 2017.

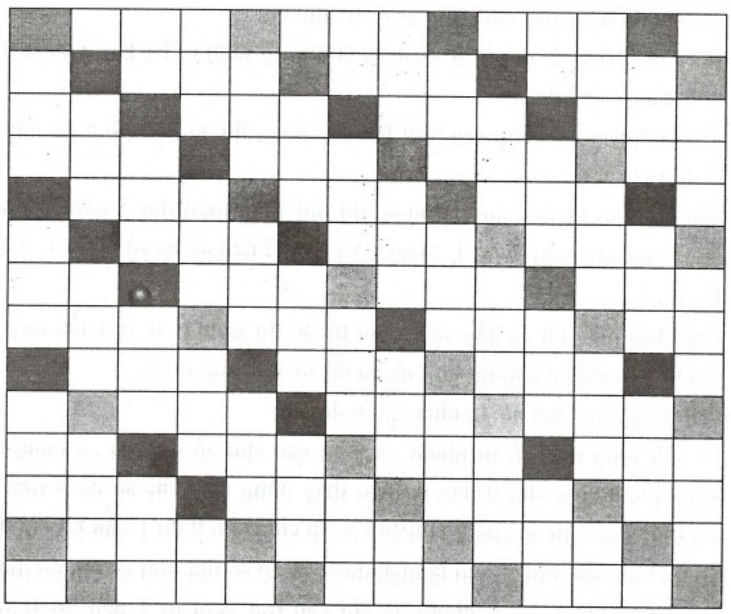
Số các số là: $(2017-1):9+1=225$ (số)

Vậy trên bảng có 225 số 1.

9.8 Cứ mỗi lần rút ra hai viên là một lần bỏ lại một viên, do đó sau mỗi lần rút thì số bi trong bao giảm đi 1. Lúc đầu có 225 hòn bi, nên sau 224 lần bốc sẽ giảm đi 224 hòn bi và cuối cùng phải còn lại một viên trong bao.

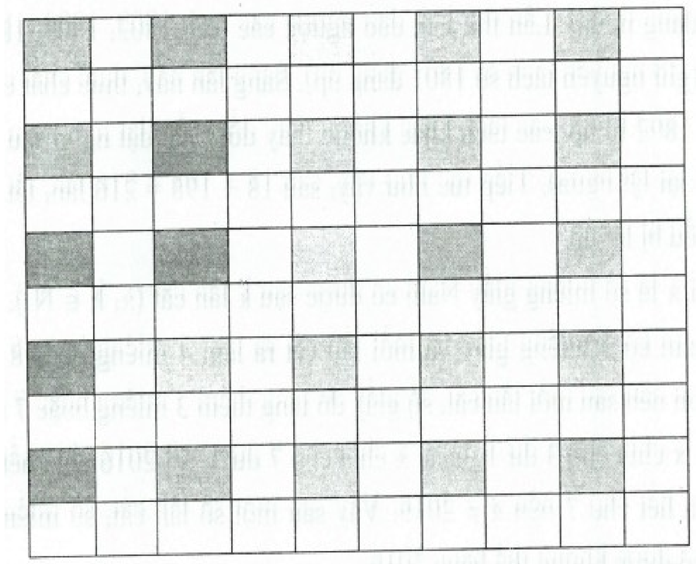
Để ý rằng sau mỗi lượt bốc ra rồi bỏ lại, thì hoặc là số bi trắng trong bao không đổi (nếu anh ta bốc được ít nhất một hòn đen) hoặc là số bi trắng trong bao giảm đi trong tất cả các lần là một số chẵn. Vì có 75 viên trắng (số lẻ) nên viên còn lại là màu trắng.

9.9 Chia sân hình vuông cạnh 3,5m thành 14 x 14 = 196 hình vuông nhỏ cạnh 25cm. Tô màu đen vào các hình vuông nhỏ của hình vuông như hình vẽ, có 50 ô đen và 146 ô trắng. Mỗi viên gạch 25cm x 100cm được lát lên 1 ô đen và 3 ô trắng.



Giả sử lát kín được sân thì số ô trắng phải gấp 3 lần số ô đen. Nhưng $146 \neq 50$ x 3 nên không thể lát kín được.

9.10 Ta tô bảng vuông bằng màu đen và trắng sau cho như hình vẽ. Ta nhận được 25 o đen và 75 ô trắng.



Ta chú ý đặt những hình chữ nhật trùng với các ô vuông thì mỗi hình chữ nhật sẽ phủ lên 2 ô vuông đen hoặc 0 ô vuông đen nào. Từ đó suy ra 25 hình chữ nhật trên bảng vuông, chúng sẽ phủ kín số chẵn ô vuông đen. Mà trên bảng có 25 ô đen không phải là số chẵn, nên không phủ kín được.

9.11 Nếu có 1999 chiếc tách (số tách là số lẻ), tất cả đều được đặt ngửa (trạng thái ngửa) thì ta không thể quay úp xuống tất cả (trạng thái úp) được.

Thật vậy, theo quy tắc chơi, tại mỗi thời điểm, giả sử có k tách đặt ngửa được làm úp xuống thì có 100-k chiếc, vậy số tách úp bị thay đổi đi một số chẵn (100-k) – k = 100 – 2k (nếu k>50 thì số tách úp giảm đi, nếu k<50 thì số tách úp tăng lên, nếu k = 50 thì số tách úp không thay đổi). Nghĩa là tính chẵn lẻ của số tách úp không thay đổi (bất biến!). Nhưng lúc đầu số tách úp ở trạng thái chẵn (bằng 0). Vì vậy không thể làm cho số tách úp bằng 1999 (trở về trạng thái lẻ) được.

Nếu số tách là 1998 thì có thể úp tất cả các tách. Một thuật toán như sau: Đánh số các tách theo thứ tự: 1, 2, 3,…, 1998. Lần lượt úp 100 tách đầu tiên, sau 18 lần úp được 1800 tách chuyển từ trạng thái ngửa sang úp. Tiếp theo úp 100 tách số 1801, 1803, 1804, …, 1901 (để nguyên tách số 1802 đang ngửa). Lần thứ hai, đảo ngược tách 1802, 1803, 1804,…, 1901 (giữ nguyên tách số 1801 đang úp). Sang lần này, thực chất chỉ tách 1801, 1802 bị úp, các tách khác không thay đổi (vẫn đặt ngửa sau khi lật úp rồi lại lật ngửa). Tiếp tục như vậy, sau 18 + 198 = 216 lần, tất cả các tách đều bị lật úp.

9.12 Gọi x là số miếng giấy Nam có được sau k lần cắt $(x,k\in N^*)$. Vì lúc đầu Nam có 1 miếng giấy và mỗi lần cắt ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng nhỏ hơn nên sau mỗi lần cắt, số giấy đó tăng thêm 3 miếng hoặc 7 miếng. Do đó x chia cho 3 dư 1, hoặc x chia cho 7 dư 1. Vì 2016 chia hết cho 3 và chia hết cho 7 nên $x\neq 2016$. Vậy sau một số lần cắt, số miếng giấy Nam có được không thể bằng 2016.