**ĐỀ ĐỀ XUẤT DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ XIV**

**MÔN: TOÁN 10**

**Câu 1.** *(4,0 điểm)*

Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn



**Câu 2.** *(4,0 điểm)*

Cho các số thực , chứng minh rằng

.

**Câu 3.** *(4,0 điểm)*

Cho tam giác là tam giác nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn . Gọi  lần lượt là các điểm đối xứng với  qua  và  là trực tâm của tam giác .

a) Chứng minh  đồng quy tại  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác 

b) Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Chứng minh  và  đồng quy.

**Câu 4.** *(4,0 điểm)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  sao cho  là bình phương của một số nguyên.

**Câu 5.** *(4,0 điểm)*

Bạn An tô màu 2022 số nguyên dương đầu tiên bởi một trong hai màu đen hoặc trắng. Biết rằng bạn An tô hết tất cả các số và sử dụng đủ cả hai màu để tô, tổng của hai số được tô khác màu là một số được tô màu đen và tích của hai số khác màu là một số được tô màu trắng. Xác định tất cả các cách tô của bạn An.

**-------------------------------HẾT------------------------------**

**HƯỚNG DẪN CHẤM TOÁN 10**

**Câu 1.** *(4,0 điểm)*

Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1** | Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn | **4,0** |
|  | (1)  Ta thấy thỏa mãn. | 0,5 |
| Xét không đồng nhất bằng 0. Đặt  Trong (1) thay y bằng  ta có  (2) | 1.0 |
| Trong (1) thay y bằng  và kết hợp với (2) ta có  (3) | 0.5 |
| Ta sẽ chứng minh  nhận mọi giá trị trong .  Thật vậy vì  không đồng nhất bằng 0 nên tồn tại  sao cho  Trong (1) thay x bởi x0 ta có  Suy ra  (4) | 1.0 |
| Vì  nên vế phải của (4) nhận mọi giá trị trong  suy ra vế trái của (4) nhận mọi giá trị trong .  Do đó với mọi  luôn tồn tại  để | 0,5 |
| Thay vào (3) ta có .  Kết hợp với (2) suy ra . Suy ra , thử lại thỏa mãn.  Vậy . | 0,5 |

**Câu 2.** *(4,0 điểm)*

Cho các số thực , chứng minh rằng

.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **2** | Cho các số thực , chứng minh rằng  . | 4,0 |
|  | Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có  và  Suy ra . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi | 1,0 |
| Không mất tính tổng quát giả sử số  nằm giữa hai số  và . Ta chứng minh  luôn đúng. | 1,0 |
| Mặt khác  luôn đúng. | 1,0 |
| Suy ra    Đẳng thức xảy ra  hoặc  và các hoán vị. | 1,0 |

**Câu 3.** *(4,0 điểm)*

Cho tam giác là tam giác nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn . Gọi  lần lượt là các điểm đối xứng với  qua  và  là trực tâm của tam giác .

a) Chứng minh  đồng quy tại  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác 

b) Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Chứng minh  và  đồng quy.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **3** | Cho tam giác là tam giác nhọn, không cân nội tiếp đường tròn . Gọi  lần lượt là các điểm đối xứng với  qua  và  là trực tâm tam giác .  a) Chứng minh  đồng quy tại  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác .  b) Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Chứng minh  và  đồng quy. | ***4,0*** |
|  |  |
| a) Ta có  là điểm đối xứng của qua  nên tam giác  cân tại  và  là đường cao của tam giác  nên nó đẳng giác với , hay . | *1,0* |
| Từ đó ta có hai tam giác  và  đồng dạng thuận, do đó  và  cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn . Chứng minh tương tự ta có  giao với  trên .  Vậy  đồng quy tại  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác . | *1,0* |
| b) Tương tự phần a), ta có  và  đồng dạng nên .  Hơn nữa ta có  nội tiếp nên . Lại có  đẳng giác nên  do đó  hay . Theo Talet đảo . | *1,0* |
| Dễ thấy  là hình bình hành nên  đi qua trung điểm của  do đó theo bổ đề hình thang  đồng quy. Tuy nhiên  đối xứng nhau qua  nên điểm đồng quy phải nằm trên . | *1,0* |

**Câu 4.** *(4,0 điểm)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  sao cho  là bình phương của một số nguyên.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **4** | 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  sao cho  là bình phương của một số nguyên. | **4,0** |
|  | Giả sử  thì *a* là số lẻ và . Do  nên suy ra *m* phải là số chẵn.  Mặt khác, do  nên  cũng phải là số chẵn. | 1,0 |
| Đặt , thế thì .  Như vậy,  với .  Ta có:  ,  do vậy  và . | 1,0 |
| Vì  nên *r* lẻ. Khi đó:  . | 1,0 |
| Do hiệu của hai nhân tử bằng 2 và cả hai số đều không chia hết cho 3 nên , dẫn đến .  Vậy cặp  thỏa mãn yêu cầu bài toán. | 1,0 |

**Câu 5.** *(4,0 điểm)*

Bạn An tô màu 2022 số nguyên dương đầu tiên bởi một trong hai màu đen hoặc trắng. Biết rằng bạn An tô hết tất cả các số và sử dụng đủ cả hai màu để tô, tổng của hai số được tô khác màu là một số được tô màu đen và tích của hai số khác màu là một số được tô màu trắng. Xác định tất cả các cách tô của bạn An.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **5** | Bạn An tô màu 2022 số nguyên dương đầu tiên bởi một trong hai màu đen hoặc trắng. Biết rằng bạn An tô hết tất cả các số và sử dụng hết cả hai màu để tô, tổng của hai số được tô khác màu là một số được tô màu đen và tích của hai số khác màu là một số được tô màu trắng. Xác định tất cả các cách tô của bạn An. | **4,0** |
|  | Xét một cách tô thỏa mãn yêu cầu bài toán.  Giả sử  và  là hai số được tô màu trắng. Ta sẽ chứng minh tích  cũng được tô màu trắng | 1,0 |
| Giả sử  là một số nào đó được tô màu đen. Khi đó  là đen, tức là  là trắng và  trắng. Nếu  đen thì  đen, điều này mâu thuẫn. Do vậy phải có  trắng. | 1,0 |
| Giả sử  là số màu trắng nhỏ nhất. Từ chứng minh trên thì ta có tất cả các bội của cũng trắng.  Ta sẽ chứng minh chỉ có các số là bội của  mới được tô trắng. | 0,5 |
| Thật vậy với mọi số nguyên dương  được tô màu trắng thì  với . Nếu , khi đó  phải là màu đen (do cách chọn số ) | 1.0 |
| Nhưng ở trên, ta đã chứng minh  là trắng. Từ đó  là đen, mâu thuẫn. Vì vậy ta phải có , hay  là bội của .  Vậy tất cả các cách tô màu có thể có là: tô các số là bội của bởi màu trắng, còn lại là màu đen. | 0,5 |