ĐOÀN TRÍ DŨNG – BÙI THẾ VIỆT
Hiệu đính: NGUYỄN KHẮC MINH
(Cục khảo thí và kiểm định chất lượng Bộ GD&ĐT)

Phương pháp sử dụng
MÁY TÍNH CASIO
Trong giải toán
PHƯƠNG TRÌNH
BẤT PHƯƠNG TRÌNH
HỆ PHƯƠNG TRÌNH

- *Dành cho học sinh lớp 10, 11, 12 luyện thi THPTQG*
- *Phân tích, bình luận chi tiết, giải nhiều cách*
- *Tài liệu tham khảo cho quý thầy, cô giáo*
- *Bồi dưỡng học sinh giỏi*

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

LỜI NÓI ĐẦU

Bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vốn dĩ luôn được coi là con át chủ bài trong chương trình giảng dạy Trung học phổ thông nói chung cũng như đánh giá năng lực học sinh trong mỗi kỳ thi Trung học phổ thông Quốc Gia nói riêng.

Các bài tập thuộc dạng toán này đòi hỏi học sinh cần tư duy theo nhiều hướng khác nhau, sử dụng các phương pháp khác nhau để có thể tìm được mấu chốt vấn đề, một trong số đó là phương pháp sử dụng máy tính Casio.

Trên cơ sở các kỹ năng xử lý máy tính Casio sẵn có, tác giả cuốn sách đã nghiên cứu và tìm ra những phương pháp xử lý mới, độc đáo từ đó đúc kết thành 2 phần chính trong cuốn sách này:

- Phần 1: Phân loại các kỹ thuật giải bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình được chia thành 13 chủ đề cụ thể.
- Phần 2: Tổng hợp các bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình hay và khó được định hướng tư duy về cách tiếp cận bài toán ngay từ lúc mới bắt đầu.

Hy vọng cuốn sách này sẽ là cẩm nang giúp các em học sinh Trung học phổ thông có thể có thêm một hướng tiếp cận mới với bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình từ đó nâng cao khả năng tư duy và xử lý nhanh nhạy các tình huống tương tự.

Cảm ơn thầy Nguyễn Khắc Minh (Cục Khảo thí và Kiểm định chất lượng, Bộ Giáo dục và Đào tạo), thầy Nguyễn Tấn Siêng, thầy Huỳnh Đức Khánh, thầy Hồ Kim Trọng cùng các em học sinh và các cộng sự đã giúp tác giả hoàn thiện cuốn sách này!

Nhóm tác giả

Đoàn Trí Dũng – Bùi Thế Việt

PHẦN 1: CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN

GIỚI THIỆU CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG MÁY TÍNH CASIO

CHỦ ĐỀ 1: NÂNG LŨY THỪA VÀ ĐỊNH LÝ VIET ĐẢO

I. Đặt vấn đề.

- Khi gặp một bài toán chứa căn thức hay còn gọi là phương trình vô tỷ, một trong các vấn đề đầu tiên có thể suy nghĩ tới đó là phương pháp nâng lũy thừa của biểu thức. Nếu như phương trình có nghiệm nguyên hoặc nghiệm hữu tỷ, việc phân tích nhân tử sẽ trở nên không quá khó khăn. Nhưng nếu phương trình có chứa nghiệm vô tỷ thì liệu rằng ta có nên nâng lũy thừa hay không?
- Chủ đề 1 sẽ cung cấp cho các em một kỹ thuật xử lý các bài toán có chứa nghiệm vô tỷ để các em có một công cụ tốt và không ngần ngại khi phải nâng lũy thừa loại bỏ căn thức.

II. Kiến thức cơ bản.

- Nếu một đa thức $P(x)$ có các nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì đa thức $P(x)$ chia hết cho $x^2 - Sx + P$ trong đó $S = x_1 + x_2, P = x_1x_2$.
- Nếu $P(x)$ chia cho $x^2 - Sx + P$ được kết quả là đa thức $Q(x)$ thì $P(x) = (x^2 - Sx + P)Q(x)$.
- Để tính gần đúng một nghiệm gần đúng của phương trình $x^4 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$ ta sử dụng máy tính cầm tay CASIO theo các bước sau:

- o Truy cập MODE 1, ta bấm máy tính: $X^4 - 3X^2 + 5X - 2 = 0$.
- o Bấm SHIFT + CALC. Máy tính hỏi giá trị của X, ta có thể nhập giá trị tùy ý cho biến X, chẳng hạn X = 0 (Bấm 0 rồi bấm nút "=").
- o Máy tính hiển thị kết quả $X \approx 0,57827771$

- Các hằng đẳng thức cần nhớ:
  - $\left(a\pm b\right)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
  - $\left(a\pm b\right)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
  - $\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)$
  - $\left(a+b+c\right)^3=a^3+b^3+c^3+3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$

III. Các dạng toán cơ bản.

- $A=\sqrt{B}\Leftrightarrow\begin{cases}A^2=B\\A\ge 0\end{cases}$
- $\sqrt{A}=\sqrt{B}\Leftrightarrow\begin{cases}A\ge 0\left(B\ge 0\right)\\A=B\end{cases}$
- $A=B\sqrt{C}\Leftrightarrow\begin{cases}A.B\ge 0\\A^2=B^2C\end{cases}$
- $A\sqrt{B}=C\sqrt{D}\Leftrightarrow\begin{cases}A.C\ge 0\\B\ge 0\left(D\ge 0\right)\\A^2B=C^2D\end{cases}$

IV. Sử dụng CASIO để nâng lũy thừa nhanh và hiệu quả.

Ví dụ 1: $x^2+x+3=\left(x+1\right)\sqrt{x-1}$

Bình phương hai vế của phương trình ta có: $\left(x^2+x+3\right)^2=\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)$

Thay x = 100 vào hai vế:

$$\begin{cases}\left(x^2+x+3\right)^2=102070609=1-02-07-06-09=x^4+2x^3+7x^2+6x+9\\\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)=1009899=1-00-98-99=x^3+98x+99\end{cases}$$

Chú ý rằng hệ số của x trong vế phải không thể lớn như 98 và 99, do đó thay $98=100-2=x-2$ và $99=100-1=x-1$.

Ta có:

$$\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)=x^3+98x+99=x^3+\left(x-2\right)x+\left(x-1\right)=x^3+x^2-x-1.$$

Do đó ta được:

$$\left(x^2+x+3\right)^2=\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)\Rightarrow x^4+2x^3+7x^2+6x+9=x^3+x^2-x-1$$

Ví dụ 2: $2x^2-x-3=(x+2)\sqrt{x-2}$

Về cơ bản cách làm của ví dụ 2 giống như trong ví dụ 1, tuy nhiên học sinh có thể bình phương nhanh hơn như sau:

$2x^2-x-3=(x+2)\sqrt{x-2}\Rightarrow(2x^2-x-3)^2-(x+2)^2(x-2)=0$ (*).

Thay x = 100 vào (*) ta được:

$$(2x^2-x-3)^2-(x+2)^2(x-2)=394871017=3-94-87-10-17$$

Do đó $(2x^2-x-3)^2-(x+2)^2(x-2)=3x^4+94x^3+87x^2+10x+17$

$$\Rightarrow(2x^2-x-3)^2-(x+2)^2(x-2)=3x^4+(x-6)x^3+(x-13)x^2+10x+17$$

$$\Rightarrow(2x^2-x-3)^2-(x+2)^2(x-2)=4x^4-5x^3-13x^2+10x+17$$

Vậy ta có thể viết lại bài toán ban đầu như sau:

$$2x^2-x-3=(x+2)\sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow(2x^2-x-3)^2-(x+2)^2(x-2)=0$$

$$\Rightarrow 4x^4-5x^3-13x^2+10x+17=0$$

Ví dụ 3: $x^3-x^2+x+3=\sqrt{x^3-3x+2}$

Do CASIO không thể hiện được đầy đủ một số có 12 chữ số trở lên nên không thể áp dụng cách thay x = 100 ngay lập tức như ví dụ 1 và ví dụ 2. Tuy nhiên, ta có thể tận dụng được CASIO để bình phương hai vế như sau:

$$x^3-x^2+x+3=\sqrt{x^3-3x+2}\Rightarrow\left[(x^3-x^2)+(x+3)\right]^2=x^3-3x+2$$

$$\Leftrightarrow(x^3-x^2)^2+2(x^3-x^2)(x+3)+(x+3)^2-(x^3-3x+2)=0\ (*)$$

Thay x = 100 vào $2(x^3-x^2)(x+3)+(x+3)^2-(x^3-3x+2)$ ta có:

$$2(x^3-x^2)(x+3)+(x+3)^2-(x^3-3x+2)=202950907=2-02-95-09-07$$

$$\Rightarrow 2(x^3-x^2)(x+3)+(x+3)^2-(x^3-3x+2)=2x^4+2x^3+(x-5)x^2+9x+7$$

$$\Rightarrow 2\left(x^3-x^2\right)(x+3)+(x+3)^2-\left(x^3-3x+2\right)=2x^4+3x^3-5x^2+9x+7$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \left(x^6-2x^5+x^4\right)+2x^4+3x^3-5x^2+9x+7=0$

$$\Leftrightarrow x^6-2x^5+3x^4+3x^3-5x^2+9x+7=0$$

V. Sử dụng CASIO thực hiện chia đa thức chia hết nhanh và hiệu quả.

Ví dụ 1: Thực hiện phép chia đa thức x^4+3x^3-x-3 cho x^2+2x-3

Thay $x=100$ vào biểu thức $\dfrac{x^4+3x^3-x-3}{x^2+2x-3}$ ta được:

$$\frac{x^4+3x^3-x-3}{x^2+2x-3}=10101=1-01-01=x^2+x+1$$

Khi đó: $x^4+3x^3-x-3=\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+x+1\right)$

Ví dụ 2: Thực hiện phép chia đa thức $x^5-2x^4-6x^3-2x^2+23x+7$ cho x^2-3x-1

Thay $x=100$ vào biểu thức $\dfrac{x^5-2x^4-6x^3-2x^2+23x+7}{x^2-3x-1}$ ta được:

$$\frac{x^5-2x^4-6x^3-2x^2+23x+7}{x^2-3x-1}=1009793=1-00-97-93$$

$$\Rightarrow \frac{x^5-2x^4-6x^3-2x^2+23x+7}{x^2-3x-1}=x^3+(x-3)x+(x-7)=x^3+x^2-2x-7$$

$$\Rightarrow x^5-2x^4-6x^3-2x^2+23x+7=\left(x^2-3x-1\right)\left(x^3+x^2-2x-7\right)$$

V. Ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải phương trình: $2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1}$

*** Phân tích:**

Khi sử dụng phương pháp bình phương, ta có thể bỏ qua điều kiện $x \ge -1$ bởi điều kiện $x^2+2 \ge 0$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$. Nút thắt lớn nhất của bài toán này đó là sau khi bình phương, ta sẽ xử lý phương trình còn lại như thế nào? Đầu tiên, bình phương hai vế ta thu được kết quả như sau:

$$4\left(x^2+2\right)^2=25\left(x^3+1\right) \Leftrightarrow 4x^4-25x^3+16x^2-9=0.$$

Để phân tích đa thức nhân tử cho phương trình trên, ta tìm hai nghiệm gần đúng của phương trình trên. Bằng công cụ SHIFT CALC trong máy tính cầm tay, ta thu được các nghiệm vô tỷ có giá trị xấp xỉ:

$x_1 \approx -0.541381265, x_2 \approx 5.541381265.$

Khi đó: $x_1 + x_2 \approx 5, x_1x_2 \approx -3$ do đó $4x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 9$ chia hết cho $x^2 - 5x - 3.$

Đến đây, công việc còn lại là thực hiện phép chia đa thức $4x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 9$ cho $x^2 - 5x - 3.$

Ta viết lại phương trình:

$$4x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 5x - 3\right)\left(4x^2 - 5x + 3\right) = 0.$$

Bài giải:

Ta có: $2\left(x^2 + 2\right) = 5\sqrt{x^3 + 1} \Leftrightarrow 4\left(x^2 + 2\right)^2 = 25\left(x^3 + 1\right)$

$\Leftrightarrow 4x^4 + 16x^2 + 16 = 25x^3 + 25$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 5x - 3\right)\left(4x^2 - 5x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 3 = 0 \\ 4x^2 - 5x + 3 = 0 \end{array}\right.$

Với $x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

Với $4x^2 - 5x + 3 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

VI. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $x^3 - x^2 - x - 5 = \left(x + 4\right)\sqrt{x + 2}$

Đáp số: $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

Bài 2: Giải phương trình: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}$

Đáp số: $x = 2 + \sqrt{3} \vee x = 1 - \sqrt{2}$

Bài 3: Giải phương trình: $x^3 + x^2 = \left(x^2 + 1\right)\sqrt{x + 1} + 1$

Đáp số: $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Bài 4: Giải phương trình: $x^2-6x-2=\sqrt{x+8}$

Đáp số: $x=\dfrac{5-\sqrt{41}}{2}\vee x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$

Bài 5: Giải phương trình: $x^2-3x-2=(x-1)\sqrt{2x+1}$

Đáp số: $x=3\pm2\sqrt{3}\vee x=1-\sqrt{2}$

Bài 6: Giải phương trình: $15x^2=x+2\sqrt{x^2+x+1}+5$

Đáp số: $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\vee x=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$

Bài 7: Giải phương trình: $2x+2=\sqrt{2x+1}+\sqrt{6x+5}$

Đáp số: $x=1+\sqrt{2}$

Bài 8: Giải phương trình: $3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}$

Đáp số: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

VII. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2}$

PHÂN TÍCH CASIO

Ba vấn đề quan trọng cần quan tâm trong bài toán này:

1. Điều kiện $x\ge-2$ không phải là điều kiện duy nhất của bài toán bởi khi đó $x+4>0$ do đó $x^3-x^2-x-5\ge0.$

Giải bất phương trình này bằng máy tính ta nhận thấy $x>2,34025083$.

.Đây là một điều kiện không có lợi bởi nghiệm vô tỷ này không thể hiện được bằng căn thức.

Học sinh có thể lựa chọn một trong các cách xử lý như sau:

- Cách 1: Giữ nguyên điều kiện $x^3-x^2-x-5\ge0$, sau khi tìm ra nghiệm của phương trình, ta có thể thay nghiệm đó vào điều kiện trên để kiểm tra tính đúng sai.
- Cách 2: Đánh giá gần đúng nghiệm của bất phương trình:

Với $x>2,34025083$, ta chỉ cần chọn điều kiện $x>2$, tuy nhiên để có được điều kiện này, ta thay giá trị $x=2$ vào x^3-x^2-x được kết quả là 2. Vậy ta đánh giá như sau:

$x^3-x^2-x-2>x^3-x^2-x-5\geq 0$. $\Rightarrow(x-2)(x^2+x+1)>0\Rightarrow x>2$

Cách đánh giá này phức tạp hơn so với cách 1, tuy nhiên có thể phát triển cách xử lý điều kiện này để phục vụ những phương pháp giải khó hơn và phức tạp hơn sau này.

2. Vế trái bao gồm bốn đơn thức, để có thể bình phương được, ta sẽ sắp xếp lại phương trình trên như sau:

$$\left[(x^3-x^2)-(x+5)\right]^2=(x+4)^2(x+2)$$

$$\Rightarrow x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7=0$$

Đến đây ta sử dụng kỹ thuật SHIFT CALC để tính gần đúng hai nghiệm và thu được các nghiệm: $x_1\approx 3.302775638, x_2\approx -0.3027756377$

Xét tổng và tích hai nghiệm trên: $x_1+x_2\approx 3, x_1x_2\approx -1$.

Do đó $x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7$ chia hết cho x^2-3x-1.

Vì vậy ta viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x^2-3x-1)(x^4+x^3+3x^2+x+7)=0$$

3. Phương trình bậc bốn $x^4+x^3+3x^2+x+7=0$ ta cảm nhận thấy đây là một phương trình vô nghiệm. Để chứng minh điều đó, ta có thể tách thành hai phương trình bậc hai vô nghiệm như sau:

$$x^4+x^3+3x^2+x+7=0\Leftrightarrow x^2(x^2+x+1)+(2x^2+x+7)=0$$

Vậy ta chỉ còn $x^2-3x-1=0$ và kết hợp với điều kiện x > 2, ta được $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình ban đầu.

Điều kiện: $\begin{cases}x\geq -2\\ x^3-x^2-x-5\geq 0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\geq -2\\ x^3-x^2-x-2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -2\\ (x-2)(x^2+x+1)>0\end{cases}\Rightarrow x>2$$

Ta có: $x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2}\Rightarrow(x^3-x^2-x-5)^2=(x+4)^2(x+2)$

$$\Leftrightarrow x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-3x-1)(x^4+x^3+3x^2+x+7)=0\ (*)$$

Vì $x^4+x^3+3x^2+x+7=x^2\left(x^2+x+1\right)+\left(2x^2+x+7\right)>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Rightarrow x^2-3x-1=0$

Với $x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

Kết hợp với điều kiện x > 2, ta được $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 2: Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

PHÂN TÍCH CASIO

Bài toán này không khó để đánh giá điều kiện:

$$2x^2-6x-1\geq0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}\\x\leq\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}\end{array}\right.$$

Nút thắt lớn nhất của bài toán này nằm ở yếu tố sau khi tiến hành bình phương hai vế ta được kết quả $x^4-6x^3+8x^2+2x-1=0$ và khi tính nghiệm gần đúng của phương trình, ta được bốn nghiệm phân biệt lần lượt là:

$$\begin{cases}x_1\approx2.414213562\\x_2\approx-0.414213562\\x_3\approx3.732050808\\x_4\approx0.2679491924\end{cases}$$

Đây là bốn nghiệm độc lập của phương trình bậc bốn trên, nhưng được chia làm hai cặp nghiệm, mỗi cặp nghiệm là hai nghiệm của hai phương trình bậc hai. Do đó vấn đề mấu chốt ở đây là ta cần chia bốn nghiệm trên thành hai cặp nghiệm như thế nào?

Để trả lời được câu hỏi này, thì chúng ta cần lưu ý đến các nghiệm $x_1\approx2.414213562$, $x_2\approx-0.414213562$ là các nghiệm có cùng giá trị thập phân giống nhau. Vì vậy ta sẽ ưu tiên chọn hai cặp này là nghiệm và tìm ra nhân tử thứ nhất chính là x^2-2x-1.

Từ hai nghiệm còn lại $x_3 \approx 3.732050808, x_4 \approx 0.2679491924$ ta tìm ra nhân tử thứ hai chính là: $x^2 - 4x + 1$. Do đó:

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x - 1\right)\left(x^2 - 4x + 1\right) = 0$$

Điều kiện: $2x^2 - 6x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{3+\sqrt{11}}{2} \\ x \leq \dfrac{3-\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$

Ta có: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \left(2x^2 - 6x - 1\right)^2 = 4x + 5$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x - 1\right)\left(x^2 - 4x + 1\right) = 0$$

Với $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$. Kết hợp điều kiện ta có $x = 1 - \sqrt{2}$.

Với $x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$. Kết hợp điều kiện ta có $x = 2 + \sqrt{3}$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 2 + \sqrt{3}$ và $x = 1 - \sqrt{2}$.

Bài 3: Giải phương trình: $x^3 + x^2 = \left(x^2 + 1\right)\sqrt{x+1} + 1$

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 + x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 + x^2 - \dfrac{3}{8} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{4}\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

Ta có: $x^3 + x^2 = \left(x^2 + 1\right)\sqrt{x+1} + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 1 = \left(x^2 + 1\right)\sqrt{x+1} \Rightarrow \left(x^3 + x^2 - 1\right)^2 = \left(x^2 + 1\right)^2 (x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^6 + x^5 - 4x^3 - 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^5 + x^4 - 4x^2 - 4x - 1\right) = 0 \text{ (*)}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình $x^5 + x^4 - 4x^2 - 4x - 1 = 0$

SHIFT CALC $x = 1$ ta được $x_1 \approx -0.430159709$

SHIFT CALC $x = 2$ ta được $x_2 \approx 1.618033989$

SHIFT CALC $x = -1$ ta được $x_3 \approx -0.618033988$

Xét $S = x_2 + x_3 = 1.0000000001 \approx 1, P = x_2 x_3 = -0.99999999989 \approx -1$

Do đó đa thức nhân tử là: $x^2 - x - 1$.

Thay x = 100 vào $\dfrac{x^5 + x^4 - 4x^2 - 4x - 1}{x^2 - x - 1}$ ta được kết quả:

$$\frac{x^5 + x^4 - 4x^2 - 4x - 1}{x^2 - x - 1} = 1020301 = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

Do đó: $x^5 + x^4 - 4x^2 - 4x - 1 = \left(x^2 - x - 1\right)\left(x^3 + 2x^2 + 3x + 1\right)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x\left(x^2 - x - 1\right)\left(x^3 + 2x^2 + 3x + 1\right) = 0$

Vì $x > \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 3x + 1 > 0.$

Do đó (*) $\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Kết hợp điều kiện ta thấy chỉ có nghiệm $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Bài 4: Giải phương trình: $x^2 - 6x - 2 = \sqrt{x+8}$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 6x - 2 \geq 0 \\ x \geq -8 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 + \sqrt{11} \\ -8 \leq x \leq 3 - \sqrt{11} \end{array}\right.$

Ta có: $x^2 - 6x - 2 = \sqrt{x+8} \Rightarrow \left(x^2 - 6x - 2\right)^2 = x + 8$

$\Leftrightarrow x^4 - 12x^3 + 32x^2 + 23x - 4 = 0$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình $x^4 - 12x^3 + 32x^2 + 23x - 4 = 0$

SHIFT CALC $x = 1$ ta được $x_1 \approx 0.1458980338$

SHIFT CALC $x = 2$ ta được $x_2 \approx -0.701562118$

SHIFT CALC $x = 6$ ta được $x_3 \approx 5.701562119$

Xét $S = x_2 + x_3 = 5.0000000001 \approx 5, P = x_2 x_3 = -3.99999999996 \approx -4$

Do đó đa thức nhân tử là: $x^2 - 5x - 4$.

Thay $x = 100$ vào $\dfrac{x^4 - 12x^3 + 32x^2 + 23x - 4}{x^2 - 5x - 4}$ ta được kết quả:

$$\frac{x^4-12x^3+32x^2+23x-4}{x^2-5x-4}=9301=93x+1=(x-7)x+1=x^2-7x+1$$

Do đó $x^4-12x^3+32x^2+23x-4=(x^2-5x-4)(x^2-7x+1)$

Do đó: $x^4-12x^3+32x^2+23x-4=0 \Leftrightarrow (x^2-5x-4)(x^2-7x+1)=0$

Với $x^2-5x-4=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$. Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=\frac{5-\sqrt{41}}{2}$

Với $x^2-7x+1=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$. Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\frac{5-\sqrt{41}}{2} \vee x=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

Bài 5: Giải phương trình: $x^2-3x-2=(x-1)\sqrt{2x+1}$

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ (x-1)(x^2-3x-2)\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\le x\le 1 \\ x\ge \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Ta có: $x^2-3x-2=(x-1)\sqrt{2x+1} \Rightarrow (x^2-3x-2)^2=(x-1)^2(2x+1)$

$\Leftrightarrow x^4-8x^3+8x^2+12x+3=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình $x^4-8x^3+8x^2+12x+3=0$

SHIFT CALC $x=1$ ta được $x_1\approx -0.464101615$

SHIFT CALC $x=7$ ta được $x_2\approx 6.464101615$

Xét $S=x_2+x_1=6, P=x_2x_1=-2.99999999999\approx -3$

Do đó đa thức nhân tử là: x^2-6x-3.

Thay x = 100 vào $\frac{x^4-8x^3+8x^2+12x+3}{x^2-6x-3}$ ta được kết quả:

$$\frac{x^4-8x^3+8x^2+12x+3}{x^2-6x-3}=9799=97x+99=(x-3)x+x-1=x^2-2x-1$$

Do đó $x^4-8x^3+8x^2+12x+3=(x^2-6x-3)(x^2-2x-1)$

Do đó: $x^4-8x^3+8x^2+12x+3=0 \Leftrightarrow (x^2-6x-3)(x^2-2x-1)=0$

Với $x^2-6x-3=0 \Rightarrow x=3\pm2\sqrt{3}$. Kết hợp điều kiện ta có $x=3\pm2\sqrt{3}$.

Với $x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$. Kết hợp điều kiện ta có $x = 1 - \sqrt{2}$

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt là $x = 3 \pm 2\sqrt{3} \vee x = 1 - \sqrt{2}$

Bài 6: Giải phương trình: $15x^2 = x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 5$

Điều kiện: $15x^2 - x - 5 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1+\sqrt{301}}{30} \\ x < \dfrac{1-\sqrt{301}}{30} \end{array}\right.$

Ta có: $15x^2 = x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 5 \Leftrightarrow 15x^2 - x - 5 = 2\sqrt{x^2 + x + 1}$

$\Rightarrow \left(15x^2 - x - 5\right)^2 = 4\left(x^2 + x + 1\right) \Leftrightarrow 225x^4 - 30x^3 - 153x^2 + 6x + 21 = 0$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình: $225x^4 - 30x^3 - 153x^2 + 6x + 21 = 0$

SHIFT CALC $x = 1$ ta được $x_1 \approx 0.7675919792$

SHIFT CALC $x = -1$ ta được $x_2 \approx -0.63851648$

SHIFT CALC $x = -0.3$ ta được $x_3 \approx -0.434258545$

Xét $S = x_3 + x_1 = 0.3333333333 \approx \dfrac{1}{3}, P = x_3 x_1 = -0.33333333333 \approx -\dfrac{1}{3}$

Do đó đa thức nhân tử là: $3x^2 - x - 1$.

Thay x = 100 vào $\dfrac{225x^4 - 30x^3 - 153x^2 + 6x + 21}{3x^2 - x - 1}$ ta được kết quả:

$$\frac{225x^4 - 30x^3 - 153x^2 + 6x + 21}{3x^2 - x - 1} = 751479 = 75x^2 + 14x + 79 = 75x^2 + 15x - 21$$

Do đó $225x^4 - 30x^3 - 153x^2 + 6x + 21 = \left(3x^2 - x - 1\right)\left(75x^2 + 15x - 21\right)$

Do đó: $225x^4 - 30x^3 - 153x^2 + 6x + 21 = 0$

$\Leftrightarrow \left(3x^2 - x - 1\right)\left(75x^2 + 15x - 21\right) = 0$

Với $3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$. Kết hợp điều kiện ta có $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

Với $75x^2 + 15x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{10}$. Kết hợp điều kiện: $x = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \vee x = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$

Bài 7: Giải phương trình: $2x+2=\sqrt{2x+1}+\sqrt{6x+5}$

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{2}$.

Ta có: $2x+2=\sqrt{2x+1}+\sqrt{6x+5}\Rightarrow (2x+2)^2=\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{6x+5}\right)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+8x+4=2x+1+6x+5+2\sqrt{2x+1}\sqrt{6x+5}$

$\Leftrightarrow 4x^2-2=2\sqrt{2x+1}\sqrt{6x+5}\Leftrightarrow 2x^2-1=\sqrt{2x+1}\sqrt{6x+5}$

Điều kiện: $x\ge \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có: $\left(2x^2-1\right)^2=(2x+1)(6x+5)\Leftrightarrow x^4-4x^2-4x-1=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình: $x^4-4x^2-4x-1=0$

SHIFT CALC $x=1$ ta được $x_1\approx -0.414213562$

SHIFT CALC $x=2$ ta được $x_2\approx 2.414213562$

Xét $S=x_2+x_1=2.000000000002\approx 2, P=x_2x_1=-0.9999999989\approx -1$

Do đó đa thức nhân tử là: x^2-2x-1.

Thay x = 100 vào $\frac{x^4-4x^2-4x-1}{x^2-2x-1}$ ta được kết quả:

$\frac{x^4-4x^2-4x-1}{x^2-2x-1}=10201=x^2+2x+1$

Do đó $x^4-4x^2-4x-1=\left(x^2-2x-1\right)(x+1)^2$

Do đó: $x^4-4x^2-4x-1=0\Leftrightarrow \left(x^2-2x-1\right)(x+1)^2=0\Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

Kết luận: Kết hợp điều kiện phương trình có nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt{2}$

Bài 8: Giải phương trình: $3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}$

Ta có: $3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}\Leftrightarrow 27x^6=x^3+4x+2\Leftrightarrow 27x^6-x^3-4x-2=0$

$\Leftrightarrow \left(3x^2-x-1\right)\left(9x^4+3x^3+4x^2+2x+2\right)=0$

Vì $9x^4+3x^3+4x^2+2x+2=x^2\left(9x^2+3x+1\right)+\left(3x^2+2x+2\right)>0\forall x\in\mathbb{R}$

Do đó $\left(3x^2-x-1\right)\left(9x^4+3x^3+4x^2+2x+2\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-x-1=0$

Do đó $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$.

Thử lại ta thấy hai nghiệm trên đều thỏa mãn.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$.

CHỦ ĐỀ 2: NHÂN LIÊN HỢP NGHIỆM VÔ TỶ

I. Đặt vấn đề.

- Trong chủ đề trước chúng ta đã giải các phương trình vô tỷ bằng phương pháp nâng lũy thừa kết hợp với định lý Viet đảo. Đây là một phương pháp đơn giản và dễ làm.
- Tuy nhiên khó khăn lớn nhất của phương pháp nâng lũy thừa là những bước tính toán rất lớn, hệ số lớn và không dễ gì có thể xử lý các bài toán chứa nhiều căn thức.
- Trong chủ đề 2 này, chúng ta sẽ đề cập đến phương pháp nhân liên hợp với khả năng giải quyết các bài toán chứa nhiều căn thức tốt hơn và hiệu quả hơn và tập trung vào những phương trình có nghiệm ở dạng vô tỷ.

II. Các dạng toán cơ bản.

Các dạng biểu thức liên hợp:

- $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
- $A-\sqrt{B}=\frac{A^2-B}{A+\sqrt{B}}$
- $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}}$
- $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\frac{A+B}{\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}}$
- $A-\sqrt[3]{B}=\frac{A^3-B}{A^2+A\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}}$

- $A+\sqrt[3]{B}=\dfrac{A^3+B}{A^2-A\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}}$

III. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$

*** Phân tích:**

Với bố cục của phương trình như trên rõ ràng rằng không đơn giản để có thể nâng lũy thừa để giải phương trình.

Mục đích của giải phương trình là làm xuất hiện nhân tử, và thông thường các nhân tử nằm ở dạng phương trình bậc hai, bởi đây là phương trình làm xuất hiện nghiệm cơ bản (trong chương trình phổ thông không đề cập đến nghiệm của phương trình bậc 3 và cách giải phương trình bậc 3 của Cardano). Chính vì vậy mục đích của phương pháp nhân liên hợp là làm xuất hiện nhân tử này.

Nhân tử xuất phát từ nghiệm của phương trình, chính vì vậy sử dụng công cụ SHIFT CALC với $x=3$ ta được $x\approx 4.236067978$.

Khác với cách giải bằng phương pháp nâng lũy thừa là cần tìm một nghiệm nữa, ta đặt ra câu hỏi không phải lúc nào cả 2 nghiệm của một phương trình bậc 2 cũng thỏa mãn điều kiện đầu bài, chính vì vậy ta tư duy một cách khác rằng, nếu đã là một phương trình bậc 2 thì sẽ luôn tồn tại dưới dạng cơ bản của phương trình vô tỷ đó là phương trình dạng $ax+b=c\sqrt{px+q}$. Chính vì vậy, thay nghiệm vừa tìm được vào căn thức ta có được:

$$\begin{cases}\sqrt{8x+5}\approx 6.236067978\approx x+2\\ \sqrt{6x+2}\approx 5.236067978\approx x+1\end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{8x+5}=x+2\\ \sqrt{6x+2}=x+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x+5=(x+2)^2\Rightarrow x^2-4x-1=0\\ 6x+2=(x+1)^2\Rightarrow x^2-4x-1=0\end{cases}$

Như vậy hai phương trình trên có cùng một nhân tử giống hệt nhau, đó chính là nhân tử chung của phương trình. Tuy nhiên ta có thể làm nhân tử chung này xuất hiện bằng cách sử dụng phương pháp nhân liên hợp.

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{3}$

Ta có: $x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+3-(x+1)\sqrt{8x+5}-\sqrt{6x+2}=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x+2-\sqrt{8x+5}\right)+\left(x+1-\sqrt{6x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\dfrac{(x+2)^2-8x-5}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\dfrac{(x+1)^2-6x-2}{x+1+\sqrt{6x+2}}=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\dfrac{x^2-4x-1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\dfrac{x^2-4x-1}{x+1+\sqrt{6x+2}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x-1\right)\left(\dfrac{x+1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\dfrac{1}{x+1+\sqrt{6x+2}}\right)=0$ (*)

Với $x\ge -\dfrac{1}{3}$ ta có $\dfrac{x+1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\dfrac{1}{x+1+\sqrt{6x+2}}>0$.

Do đó (*) $\Rightarrow x^2-4x-1=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{5}$.

Kết luận: Kết hợp điều kiện ta có $x=2\pm\sqrt{5}$ là hai nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $x^2-x-2=\sqrt{3-x}+\sqrt{x}$

Đáp số: $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Bài 2: Giải phương trình: $x^2-3x-2=(x-1)\sqrt{2x+1}$

Đáp số: $x=1-\sqrt{2}$ và $x=3\pm 2\sqrt{3}$

Bài 3: Giải phương trình: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

Đáp số: $x=1\pm 2\sqrt{2}$

Bài 4: Giải bất phương trình: $x^3+3x^2+x+2\ge 2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$

Đáp số: $x\in\left[-1+2\sqrt{2};+\infty\right)$

Bài 5: Giải phương trình: $x^3+x^2=\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}+1$

Đáp số: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 6: Giải bất phương trình: $x^2+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}\geq 3x+1+\sqrt{2(3x+1)}$

Đáp số: $x\in\left[2+\sqrt{5};+\infty\right)$

Bài 7: Giải phương trình: $2x+\sqrt{4x^2-5x+2}=\sqrt{8x-1}+\sqrt{3x+1}$

Đáp số: $x=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$

Bài 8: Giải phương trình: $\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$

Đáp số: $x=4\pm 2\sqrt{3}$, $x=9\pm 6\sqrt{2}$ và $x=1$

Bài 9: Giải phương trình: $\dfrac{6x-5\sqrt{1+x}}{2+3\sqrt{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=0$

Đáp số: $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $x=0$

Bài 10: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

Đáp số: $x=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{8}$

Bài 11: Giải phương trình: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}=2x^2+2x-2$

Đáp số: $x=-2$ và $x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Bài 12: Giải phương trình: $15x^2=x+2\sqrt{x^2+x+1}+5$

Đáp số: $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ và $x=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$

Bài 13: Giải phương trình: $3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}$

Đáp số: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$.

VII. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $x^2-x-2=\sqrt{3-x}+\sqrt{x}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC x = 2 $\Rightarrow x\approx 2.618033989$

Thay $x\approx 2,618033989$ vào hai căn thức: $\begin{cases}\sqrt{3-x}\approx 0.6180339887\approx x-2\\ \sqrt{x}\approx 1.618033989\approx x-1\end{cases}$

Như vậy các liên hợp cần tìm là $\left(x-2-\sqrt{3-x}\right)$ và $\left(x-1-\sqrt{x}\right)$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0 \\ 0 \le x \le 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \le x \le 3$

Ta có: $x^2 - x - 2 = \sqrt{3-x} + \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + \left(x - 2 - \sqrt{3-x}\right) + \left(x - 1 - \sqrt{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + \frac{(x-2)^2 - (3-x)}{x - 2 + \sqrt{3-x}} + \frac{(x-1)^2 - x}{x - 1 + \sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2 + \sqrt{3-x}} + \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1 + \sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 3x + 1\right)\left(1 + \frac{1}{x - 2 + \sqrt{3-x}} + \frac{1}{x - 1 + \sqrt{x}}\right) = 0 \ (*)$$

Vì $2 \le x \le 3$ nên $\begin{cases} x - 2 + \sqrt{3-x} > 0 \\ x - 1 + \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x - 2 + \sqrt{3-x}} + \frac{1}{x - 1 + \sqrt{x}} > 0$.

Do đó (*) $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ 2 \le x \le 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Bài 2: Giải phương trình: $x^2 - 3x - 2 = (x-1)\sqrt{2x+1}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC x = 1 $\Rightarrow x \approx -0.414213562$.

Thay $x \approx -0.414213562$ vào căn thức ta được

$\sqrt{2x+1} \approx 0.4142135624 \approx -x$.

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(x + \sqrt{2x+1}\right)$

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ (x-1)\left(x^2 - 3x - 2\right) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le x \le 1 \\ x \ge \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Ta có: $x^2 - 3x - 2 = (x-1)\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 2 = (x-1)\left(x + \sqrt{2x+1}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 - (2x+1)\right) = (x-1)\left(x + \sqrt{2x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-\sqrt{2x+1}\right)\left(x+\sqrt{2x+1}\right)=(x-1)\left(x+\sqrt{2x+1}\right)$$

- Trường hợp 1: $x+\sqrt{2x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=x^2 \\ x\le 0 \end{cases} \Rightarrow x=1-\sqrt{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

- Trường hợp 2: $2\left(x-\sqrt{2x+1}\right)=x-1 \Leftrightarrow x+1=2\sqrt{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=4(2x+1) \\ x\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x-3=0 \\ x\ge -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x=3\pm 2\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt là $x=1-\sqrt{2}$ và $x=3\pm 2\sqrt{3}$.

Bài 3: Giải phương trình: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC $x=1 \Rightarrow x\approx 3.828427125$.

Thay $x\approx 3.828427125$ vào căn thức ta được $\sqrt{x^2-2x+2}=3$.

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(\sqrt{x^2-2x+2}-3\right)$.

Điều kiện: $\left(x^2+x-1\right)(x+2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -2\le x\le \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Ta có: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-7=(x+2)\left(\sqrt{x^2-2x+2}-3\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-7=(x+2)\frac{x^2-2x-7}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}$$

- Trường hợp 1: $x^2-2x-7=0 \Rightarrow x=1\pm 2\sqrt{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).
- Trường hợp 2: $1=(x+2)\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}$

$$\Leftrightarrow x+2=\sqrt{x^2-2x+2}+3 \Leftrightarrow x-1=\sqrt{x^2-2x+2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2=x^2-2x+2\\ x\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+1=x^2-2x+2\\ x\ge 1\end{cases} \text{(Vô nghiệm)}.$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=1\pm 2\sqrt{2}$.

Bài 4: Giải bất phương trình: $x^3+3x^2+x+2\ge 2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=1$ ta được $x\approx 1.828427124$.

Thay $x\approx 1.828427124$ vào căn thức ta được

$$\begin{cases}2\sqrt{x+4}\approx 4.828427125\approx x+3\\ \sqrt{2x+11}\approx 3.828427125\approx x+2\end{cases}$$

Vậy các liên hợp cần tìm là $\left(x+3-2\sqrt{x+4}\right)$ và $\left(x+2-\sqrt{2x+11}\right)$.

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -4\\ x^3+3x^2+x+2\ge 0\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}x\ge -4\\ x^3+3x^2+x+3>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\ge -4\\ (x+3)(x^2+1)>0\end{cases} \Rightarrow x>-3$$

Ta có: $x^3+3x^2+x+2\ge 2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+x+2-2x^2\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+11}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x+3-2\sqrt{x+4}\right)+\left(x+2-\sqrt{2x+11}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\frac{(x+3)^2-4(x+4)}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{(x+2)^2-(2x+11)}{x+2+\sqrt{2x+11}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\frac{x^2+2x-7}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{x^2+2x-7}{x+2+\sqrt{2x+11}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-7\right)\left(\frac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{2x+11}}\right)\ge 0\ (*)$$

Vì $x > -3 \Rightarrow \begin{cases} x+3+2\sqrt{x+4} \ge 2 > 0 \\ x+2+\sqrt{2x+11} \ge -1+\sqrt{5} > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{2x+11}} > 0$$

Do đó (*) $\Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-7 \ge 0 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x \ge -1+2\sqrt{2}$.

Kết luận: Bất phương trình có tập nghiệm $x \in \left[-1+2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Bài 5: Giải phương trình: $x^3+x^2=\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}+1$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CACL x = 1 ta được $x \approx 1.618033989$.

Thay $x \approx 1.618033989$ vào căn thức ta được $\sqrt{x+1} \approx 1.618033989 \approx x$.

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(x-\sqrt{x+1}\right)$.

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -1 \\ x^3+x^2-1 \ge 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^3+x^2-\dfrac{3}{8} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4}\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

Ta có: $x^3+x^2=\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}+1 \Leftrightarrow x^3+x^2-1-\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}=0$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1+\left(x^2+1\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow x^2-x-1+\left(x^2+1\right)\frac{x^2-(x+1)}{x+\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1+\left(x^2+1\right)\frac{x^2-x-1}{x+\sqrt{x+1}}=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(1+\frac{x^2+1}{x+\sqrt{x+1}}\right)=0 \text{ (*)}$$

Vì $x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow x+\sqrt{x+1} > 0 \Rightarrow 1+\dfrac{x^2+1}{x+\sqrt{x+1}} > 0.$

Do đó (*) $\Rightarrow \begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 6: Giải bất phương trình: $x^2+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}\ge 3x+1+\sqrt{2(3x+1)}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC x = 1 ta được $x\approx 4.236067977$.

Thay $x\approx 4{,}236067977$ vào các căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}=1\\ \sqrt{2(3x+1)}\approx 5.236067977\approx x+1\end{cases}$$

Vậy các liên hợp cần tìm là $\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}-1\right)$ và $\left(x+1-\sqrt{2(3x+1)}\right)$.

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{3}\\ x\ge\sqrt{2x+2}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2\ge 2x+2\end{cases}\Rightarrow x\ge 1+\sqrt{3}$

Ta có: $x^2+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}\ge 3x+1+\sqrt{2(3x+1)}$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-1+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}-\sqrt{2(3x+1)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}-1\right)+\left(x+1-\sqrt{2(3x+1)}\right)+x^2-4x-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-\sqrt{2x+2}-1}{\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1}+\frac{x^2+2x+1-2(3x+1)}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+x^2-4x-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-1)-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1}+\frac{x^2-4x-1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+\left(x^2-4x-1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+1-(2x+2)}{\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right)}+\frac{x^2-4x-1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+\left(x^2-4x-1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-4x-1\right)\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right)}+\frac{1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+1\right)\ge 0$$

Với $x\ge 1+\sqrt{3}$ ta có: $\begin{cases}\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right)>0\\ x+1+\sqrt{2(3x+1)}>0\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right)}+\frac{1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+1>0$$

Do đó: $\begin{cases} x^2-4x-1\geq 0 \\ x\geq 1+\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x\geq 2+\sqrt{5}$.

Kết luận: Bất phương trình có tập nghiệm $x\in\left[2+\sqrt{5};+\infty\right)$

Bài 7: Giải phương trình: $2x+\sqrt{4x^2-5x+2}=\sqrt{8x-1}+\sqrt{3x+1}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC x = 1 ta được $x\approx 1.866025404$.

Thay $x\approx 1,866025404$ vào mỗi căn thức ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2-5x+2}\approx 2.568672072 \\ \sqrt{8x-1}\approx 3.732050808\approx 2\text{x} \\ \sqrt{3x+1}\approx 2.568672072 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2-5x+2}\approx\sqrt{3x+1} \\ \sqrt{8x-1}\approx 2\text{x} \end{cases}$$

Như vậy ta nhận thấy các biểu thức liên hợp cần tìm là:

$\left(\sqrt{4x^2-5x+2}-\sqrt{3x+1}\right)$ và $\left(2x-\sqrt{8x-1}\right)$.

Điều kiện: $x\geq\frac{1}{8}$.

Ta có: $2x+\sqrt{4x^2-5x+2}=\sqrt{8x-1}+\sqrt{3x+1}$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{4x^2-5x+2}-\sqrt{3x+1}\right)+\left(2x-\sqrt{8x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(4x^2-5x+2\right)-\left(3x+1\right)}{\sqrt{4x^2-5x+2}+\sqrt{3x+1}}+\frac{4\text{x}^2-\left(8\text{x}-1\right)}{2x+\sqrt{8x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\text{x}^2-8x+1}{\sqrt{4x^2-5x+2}+\sqrt{3x+1}}+\frac{4x^2-8x+1}{2x+\sqrt{8x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(4\text{x}^2-8\text{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2-5x+2}+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{2x+\sqrt{8x-1}}\right)=0\ (*)$$

Vì $x\geq\frac{1}{8}$ do đó $\begin{cases} \sqrt{4x^2-5x+2}+\sqrt{3x+1}>0 \\ 2x+\sqrt{8x-1}\geq\frac{1}{4}>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4x^2-5x+2}+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{2x+\sqrt{8x-1}}>0$$

Như vậy (*) $\Rightarrow \begin{cases} 4x^2-8x+1=0 \\ x\geq \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8: Giải phương trình: $\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC x = 1 ta được nghiệm x = 1. Tuy nhiên ta sẽ không lựa chọn nghiệm x = 1 ngay mà nên tìm thêm một nghiệm vô tỷ nữa để dễ tìm ra liên hợp hơn.

SHIFT CALC x = 6 ta được nghiệm $x\approx 7.464101615$.

Thay $x\approx 7.464101615$ vào căn thức ta được:

$\sqrt{2x-1}\approx 3.732050808\approx \frac{x}{2}\Rightarrow x\approx 2\sqrt{2x-1}$

Vậy liên hợp tìm được là $\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)$.

Điều kiện: $\begin{cases} x\geq \frac{1}{2} \\ \left(6x^2+12x-6\right)\left(x^2+22x-11\right)x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$.

Ta có: $\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$

$$\Leftrightarrow x^3+22x^2-11x-\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow -2x^3+16x^2-8x+\left(3x^2+6x-3\right)\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -2x\left(x^2-8x+4\right)+\left(3x^2+6x-3\right)\frac{x^2-8x+4}{x+2\sqrt{2x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-8x+4\right)\left(-2x+\frac{3x^2+6x-3}{x+2\sqrt{2x-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-8x+4\right)\left(\frac{3x^2+6x-3-2x^2-4x\sqrt{2x-1}}{x+2\sqrt{2x-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-8x+4\right)\left(\frac{x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}}{x+2\sqrt{2x-1}}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(x^2-8x+4\right)\left(x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}\right)=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình $x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}=0$.

Chú ý rằng nghiệm x = 1 vẫn còn trong phương trình này, tuy nhiên ta không nên vội làm xuất hiện nghiệm này và cần thêm một nghiệm vô tỷ nữa để xác định liên hợp dễ dàng hơn.

SHIFT CALC x = 17 ta được nghiệm $x\approx 17.48529137$.

Thay $x\approx 17.48529137$ vào căn thức ta được:

$$\sqrt{2x-1}\approx 5.828427125\approx\frac{x}{3}\Rightarrow x\approx 3\sqrt{2x-1}$$

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)$.

Ta có: $\left(x^2-8x+4\right)\left(x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-8x+4\right)\left(3x^2+18x-9-12x\sqrt{2x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-8x+4\right)\left[-x^2+18x-9+4x\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-8x+4\right)\left[-x^2+18x-9+4x\frac{x^2-9\left(2x-1\right)}{x+3\sqrt{2x-1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-8x+4\right)\left(x^2-18x+9\right)\left[-1+\frac{4x}{x+3\sqrt{2x-1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-8x+4\right)\left(x^2-18x+9\right)\frac{3x-3\sqrt{2x-1}}{x+3\sqrt{2x-1}}=0$$

- Trường hợp 1: $\begin{cases}x^2-8x+4=0\\ x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=4\pm 2\sqrt{3}$
- Trường hợp 2: $\begin{cases}x^2-18x+9=0\\ x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=9\pm 6\sqrt{2}$

- Trường hợp 3: $\begin{cases} 3x-3\sqrt{2x-1}=0 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2x-1} \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=2x-1 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=1$$

Kết luận: Phương trình có năm nghiệm $x=4\pm 2\sqrt{3}, x=9\pm 6\sqrt{2}$ và $x=1$.

Bài 9: Giải phương trình: $\dfrac{6x-5\sqrt{1+x}}{2+3\sqrt{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=0$

Điều kiện: $-1<x\leq 1$.

Ta có: $\dfrac{6x-5\sqrt{1+x}}{2+3\sqrt{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=0 \Leftrightarrow \dfrac{6(x+1)-5\sqrt{1+x}-6}{2+3\sqrt{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(3\sqrt{1+x}+2\right)\left(2\sqrt{1+x}-3\right)}{2+3\sqrt{1+x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=2x+2$$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với x = 0 ta được x = 0. Tuy nhiên ta cần phải tìm ra một nghiệm vô tỷ khác để dễ dàng tìm liên hợp hơn.

SHIFT CALC với $x=0.8$ ta được $x\approx 0.866025403$.

Thay $x\approx 0.866025403$ vào các căn thức ta được:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x}\approx 1.366025404\approx x+\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{1-x}\approx 0.3660254038\approx x-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy các liên hợp cần tìm là $\left(2x+1-2\sqrt{1+x}\right)$ và $\left(2x-1-2\sqrt{1-x}\right)$.

Do đó: $3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=2x+2 \Leftrightarrow 6\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}=4x+4$

$$\Leftrightarrow 4x+4-6\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(2x+1-2\sqrt{1+x}\right)-\left(2x-1-2\sqrt{1-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{(2x+1)^2-4(1+x)}{2x+1+2\sqrt{1+x}}-\frac{(2x-1)^2-4(1-x)}{2x-1+2\sqrt{1-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{4x^2-3}{2x+1+2\sqrt{1+x}}-\frac{4x^2-3}{2x-1+2\sqrt{1-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-3\right)\left(\frac{3}{2x+1+2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2x-1+2\sqrt{1-x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-3\right)\frac{4x-4+6\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}}{\left(2x+1+2\sqrt{1+x}\right)\left(2x-1+2\sqrt{1-x}\right)}=0$$

$$\Rightarrow\left(4x^2-3\right)\left(4x-4+6\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-3\right)\left(2x-2+3\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)=0$$

- Trường hợp 1: $4x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).
- Trường hợp 2: $2x-2+3\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=0$. Khi đó kết hợp với phương trình ban đầu ta được:

$$\begin{cases}2x-2+3\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=0\\3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=2x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2+3\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=0\\9\sqrt{1+x}-3\sqrt{1-x}=6x+6\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(2x-2+3\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)+\left(9\sqrt{1+x}-3\sqrt{1-x}\right)=6x+6$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{1+x}=4x+8\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x}=x+2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-1<x\le 1\\(x+2)^2=4(x+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x\le 1\\x^2=0\end{cases}\Rightarrow x=0 \text{ (Thỏa mãn điều kiện).}$$

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt là $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $x=0$.

Bài 10: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với x = 1 ta được nghiệm $x\approx 1.390388203$.

Thay $x\approx 1.390388203$ vào các căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{5x^2-5x+3}\approx 2.390388203\approx x+1\\\sqrt{7x-2}\approx 2.780776406\approx 2x\end{cases}$$

Vậy các liên hợp cần tạo ra là $\left(\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)\right)$ và $\left(2x-\sqrt{7x-2}\right)$.

Điều kiện: $x\ge\frac{2}{7}$.

Ta có: $\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)\right)+\left(2x-\sqrt{7x-2}\right)+4x^2-7x+2=0$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-7x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1\right)=0$ (*)

Với $x \geq \frac{2}{7}$ ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1>0\\ 2x+\sqrt{7x-2}\geq 7>0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1>0.$$

Do đó (*) $\Rightarrow \begin{cases}4x^2-7x+2=0\\ x\geq \frac{2}{7}\end{cases} \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}$.

Bài 11: Giải phương trình: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}=2x^2+2x-2$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=1$ ta được $x\approx 1.322875656$.

Thay $x\approx 1.322875656$ vào các căn thức của phương trình ban đầu ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{2+x}\approx 1.822875656\approx x+\frac{1}{2}\\ \sqrt{2-x}\approx 0.822875656\approx x-\frac{1}{2}\\ \sqrt{4-x^2}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Vậy các liên hợp cần tìm là:

$\left(2x+1-2\sqrt{2+x}\right)$, $\left(2x-1-2\sqrt{2-x}\right)$ và $\left(3-2\sqrt{4-x^2}\right)$

Điều kiện: $-2\leq x\leq 2$.

Ta có: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}=2x^2+2x-2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2+x}+2\sqrt{2-x}+2\sqrt{4-x^2}=4x^2+4x-4$

$\Leftrightarrow 4x^2-7+\left(2x+1-2\sqrt{2+x}\right)+\left(2x-1-2\sqrt{2-x}\right)+\left(3-2\sqrt{4-x^2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 4x^2-7+\frac{(2x+1)^2-4(2+x)}{2x+1+2\sqrt{2+x}}+\frac{(2x-1)^2-4(2-x)}{2x-1+2\sqrt{2-x}}+\frac{3-4(4-x^2)}{3+2\sqrt{4-x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-7+\frac{4x^2-7}{2x+1+2\sqrt{2+x}}+\frac{4x^2-7}{2x-1+2\sqrt{2-x}}+\frac{4x^2-7}{3+2\sqrt{4-x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2-7\right)\left(1+\frac{1}{2x+1+2\sqrt{2+x}}+\frac{1}{2x-1+2\sqrt{2-x}}+\frac{1}{3+2\sqrt{4-x^2}}\right)=0\ (*)$$

Ta thấy: $2x^2+2x-2=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}$

$$\Rightarrow 2x^2+2x-2=\sqrt{2+x+2-x+2\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}}+\sqrt{4-x^2}$$

$$\Rightarrow 2x^2+2x-2=\sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{4-x^2}\ge\sqrt{4}+\sqrt{4-x^2}\ge 2$$

$$\Rightarrow 2x^2+2x-4\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -2\end{array}\right.$$

Do đó từ (*) ta có hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $\begin{cases}4x^2-7=0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -2\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{2}$

- Trường hợp 2:

$$1+\frac{1}{2x+1+2\sqrt{2+x}}+\frac{1}{2x-1+2\sqrt{2-x}}+\frac{1}{3+2\sqrt{4-x^2}}=0\ (**)$$

Do $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -2\end{array}\right.\\ -2\le x\le 2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2\ge x\ge 1\\ x=-2\end{array}\right.$

Với $x=-2$ ta thấy -2 là một nghiệm của (**).

Với $1\le x\le 2$ ta thấy:

$$\begin{cases}2x+1>0\\ 2x-1\ge 1>0\end{cases}\Rightarrow 1+\frac{1}{2x+1+2\sqrt{2+x}}+\frac{1}{2x-1+2\sqrt{2-x}}+\frac{1}{3+2\sqrt{4-x^2}}>0$$

Do đó (**) có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=-2$ và $x=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Bài 12: Giải phương trình: $15x^2 = x + 2\sqrt{x^2+x+1} + 5$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với x = 1 ta được $x \approx 0.767591879$.

Thay $x \approx 0.767591879$ vào căn thức ta được:

$\sqrt{x^2+x+1} \approx 1.535183758 \approx 2x$

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(2x - \sqrt{x^2+x+1}\right)$.

Điều kiện: $15x^2 - x - 5 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1+\sqrt{301}}{30} \\ x < \dfrac{1-\sqrt{301}}{30} \end{array}\right.$

Ta có: $15x^2 = x + 2\sqrt{x^2+x+1} + 5 \Leftrightarrow 15x^2 - x - 5 - 2\sqrt{x^2+x+1} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(2x - \sqrt{x^2+x+1}\right) + 15x^2 - 5x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(3x^2-x-1\right)}{2x+\sqrt{x^2+x+1}} + 5\left(3x^2-x-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-x-1\right)\left(\frac{2}{2x+\sqrt{x^2+x+1}} + 5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-x-1\right)\left(10x+2+5\sqrt{x^2+x+1}\right) = 0$$

- Trường hợp 1: $3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$. Kết hợp với điều kiện ta thấy chỉ có nghiệm $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ thỏa mãn.
- Trường hợp 2: $10x + 2 + 5\sqrt{x^2+x+1} = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+x+1} = -10x - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25\left(x^2+x+1\right) = \left(10x+2\right)^2 \\ 10x + 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75x^2 + 15x - 21 = 0 \\ 10x + 2 \le 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \vee x = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$.

Bài 13: Giải phương trình: $3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với x = 1 ta được nghiệm $x\approx 0.767591879$.

Thay $x\approx 0.767591879$ vào căn thức ta được:

$\sqrt[3]{x^3+4x+2}\approx 1.767591879\approx x+1$

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)$.

Điều kiện: $3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}\geq 0\Rightarrow x^3+4x+2\geq 0$

$$\Rightarrow x^3+4x+5>0\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+5\right)>0\Rightarrow x>-1$$

Ta có: $3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}\Leftrightarrow 3x^2-\sqrt[3]{x^3+4x+2}=0$

$$\Leftrightarrow 3x^2-x-1+\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-x-1+\frac{(x+1)^3-\left(x^3+4x+2\right)}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+4x+2}+\left(\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-x-1\right)\left(1+\frac{1}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+4x+2}+\left(\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)^2}\right)=0\ (*)$$

Vì $(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+4x+2}+\left(\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)^2$

$$=\left(x+1+\frac{\sqrt[3]{x^3+4x+2}}{2}\right)^2+\frac{3\left(\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)^2}{4}>0\forall x>-1$$

Do đó $1+\dfrac{1}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+4x+2}+\left(\sqrt[3]{x^3+4x+2}\right)^2}>0$

Vậy (*) $\Rightarrow\begin{cases}3x^2-x-1=0\\ x>-1\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$.

CHỦ ĐỀ 3: TƯ DUY PHÂN TÍCH NHÂN TỬ BẰNG CASIO

I. Đặt vấn đề.

- Trong chủ đề trước chúng ta đã đề cập đến phương pháp nhân liên hợp nghiệm vô tỷ sử dụng phương pháp tạo biểu thức liên hợp xuất hiện nhân tử chung từ các nghiệm vô tỷ tìm được.
- Trong chủ đề này, chúng ta tiếp tục đi vào các bài toán phương trình chứa nghiệm vô tỷ nhưng được tư duy và giải theo hướng đi khác đó là tạo liên hợp ngược và cách nhẩm nhân tử với sự hỗ trợ của máy tính CASIO.

II. Liên hợp ngược là gì?

- Xét phương trình $x^2+x-1+2x\left(x-\sqrt{1-x}\right)=0$. Ta nhận thấy nếu nhân thêm biểu thức liên hợp còn thiếu của biểu thức trong ngoặc:

  $\left(x-\sqrt{1-x}\right)\left(x+\sqrt{1-x}\right)=x^2-(1-x)=x^2+x-1$

  Khi đó ta thấy kết quả của biểu thức liên hợp là x^2+x-1 giống hệt biểu thức bên ngoài. Do đó ta có thể viết lại:

  $x^2+x-1=\left(x-\sqrt{1-x}\right)\left(x+\sqrt{1-x}\right)$

  Như vậy phương trình: $x^2+x-1+2x\left(x-\sqrt{1-x}\right)=0$

  $\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{1-x}\right)\left(x+\sqrt{1-x}\right)+2x\left(x-\sqrt{1-x}\right)=0$

  $\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{1-x}\right)\left(3x+\sqrt{1-x}\right)=0$

  Kỹ thuật dùng để tạo biểu thức liên hợp như trên gọi là kỹ thuật tạo liên hợp ngược.

III. Ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải phương trình: $x^2+2x+4+(2x+1)\sqrt{x+4}=0$

Cách 1: Kỹ thuật liên hợp ngược:

*** Phân tích:**

Sử dụng SHIFT CALC với $x=1$ ta được nghiệm $x\approx-1.561552813$.

Thay $x\approx-1.561552813$ vào căn thức: $\sqrt{x+4}\approx1.561552813\approx-x$

Do đó liên hợp cần tìm là $x+\sqrt{x+4}$

Xét $\left(x+\sqrt{x+4}\right)\left(x-\sqrt{x+4}\right)=x^2-x-4$

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge -4$. Ta có:

$$x^2+2x+4+(2x+1)\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow -x^2+x+4+(2x+1)\left(x+\sqrt{x+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(x^2-x-4\right)+(2x+1)\left(x+\sqrt{x+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(x+\sqrt{x+4}\right)\left(x-\sqrt{x+4}\right)+(2x+1)\left(x+\sqrt{x+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x+4}\right)\left(-x+\sqrt{x+4}+2x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x+4}\right)\left(x+1+\sqrt{x+4}\right)=0$$

Với $x+\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow -x=\sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases}-4\le x\le 0\\ x^2-x-4=0\end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$

Với $x+1+\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow -x-1=\sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases}-4\le x\le -1\\ x^2+x-3=0\end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \vee x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$

Cách 2: Sử dụng phương pháp chia đa thức bằng tư duy CASIO.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ BẰNG CASIO

Phương trình $x^2+2x+4+(2x+1)\sqrt{x+4}=0$ có nhân tử $\left(x+\sqrt{x+4}\right)$. Do đó ta hoàn toàn có thể viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2+2x+4+(2x+1)\sqrt{x+4}=\left(x+\sqrt{x+4}\right)\left(ax+b+c\sqrt{x+4}\right)$$

Do đó: Để tìm a, b, c ta thay ba giá trị ngẫu nhiên của x và kết hợp công cụ CALC ta được: $ax+b+c\sqrt{x+4}=\dfrac{x^2+2x+4+(2x+1)\sqrt{x+4}}{x+\sqrt{x+4}}=f(x)$

$$\begin{cases}x=-4\Rightarrow -4a+b=f(-4)=-3\\ x=0\Rightarrow b+2c=f(0)=3\\ x=5\Rightarrow 5a+b+3c=f(5)=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=1\end{cases}$$

Do đó ta có: $x^2+2x+4+(2x+1)\sqrt{x+4}=\left(x+\sqrt{x+4}\right)\left(x+1+\sqrt{x+4}\right)$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+4+(2x+1)\sqrt{x+4}=(x+1)\left(x+\sqrt{x+4}\right)+\sqrt{x+4}\left(x+\sqrt{x+4}\right)$$

Điều kiện: $x \geq -4$. Ta có: $x^2 + 2x + 4 + (2x+1)\sqrt{x+4} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x + \sqrt{x+4}\right) + \sqrt{x+4}\left(x + \sqrt{x+4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x+4}\right)\left(x + 1 + \sqrt{x+4}\right) = 0$

Với $x + \sqrt{x+4} = 0 \Leftrightarrow -x = \sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 0 \\ x^2 - x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$

Với $x + 1 + \sqrt{x+4} = 0 \Leftrightarrow -x - 1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \vee x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $2x^2 + x + 1 + 3x\sqrt{x+1} = 0$

Đáp số: $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$

Bài 2: Giải phương trình: $2x^2 + 5x + (x^2+2)\sqrt{x+2} = 0$

Đáp số: $x = -1, x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ và $x = 2 - 2\sqrt{3}$

Bài 3: Giải phương trình: $(6x^2 + 12x - 6)\sqrt{2x-1} = x^3 + 22x^2 - 11x$

Đáp số: $x = 4 \pm 2\sqrt{3}, x = 9 \pm 6\sqrt{2}$ và $x = 1$.

Bài 4: Giải bất phương trình: $\dfrac{x^3 + x + 1 + x\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{x + \sqrt{x^2+x+1}} \leq 0$

Đáp số: $x \in \left(-1; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

Bài 5: Giải phương trình: $\left(1 + \sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + x - 1\right) = x\sqrt{x}$

Đáp số: $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x = 0$

V. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=0$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=1$ ta thu được nghiệm $x\approx -0.390388203$, thay giá trị $x\approx -0.390388203$ vào căn thức ta được $\sqrt{x+1}\approx 0,7807764064\approx -2x.$

Với nghiệm vô tỷ trên ta nhận được liên hợp $\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$.

Cách 1: Kỹ thuật liên hợp ngược.

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge -1 \\ \left(2x^2+x+1\right)x\le 0 \end{cases} \Rightarrow -1\le x\le 0.$

Ta có: $2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow -4x^2+x+1+3x\left(2x+\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x\left(2x+\sqrt{x+1}\right)-\left(4x^2-(x+1)\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x\left(2x+\sqrt{x+1}\right)-\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\left(2x-\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2x+\sqrt{x+1}\right)\left(3x-2x+\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left(2x+\sqrt{x+1}\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right)=0$

- Trường hợp 1: $\begin{cases} 2x+\sqrt{x+1}=0 \\ -1\le x\le 0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}.$
- Trường hợp 2: $\begin{cases} x+\sqrt{x+1}=0 \\ -1\le x\le 0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp chia đa thức bằng tư duy CASIO.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ BẰNG CASIO

Phương trình $2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=0$ có nhân tử $\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$. Do đó ta hoàn toàn có thể viết lại phương trình dưới dạng:

$2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\left(ax+b+c\sqrt{x+1}\right)$

Do đó: $ax+b+c\sqrt{x+1}=\dfrac{2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}}{2x+\sqrt{x+1}}=f(x)$. Để tìm a, b, c ta thay ba giá trị ngẫu nhiên của x và kết hợp công cụ CALC ta được:

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow -a+b=f(-1)=-1 \\ x=0 \Rightarrow b+c=f(0)=1 \\ x=3 \Rightarrow 3a+b+2c=f(3)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

Do đó ta có: $2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=x\left(2x+\sqrt{x+1}\right)+\sqrt{x+1}\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -1 \\ \left(2x^2+x+1\right)x \le 0 \end{cases} \Rightarrow -1 \le x \le 0.$

Ta có: $2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow x\left(2x+\sqrt{x+1}\right)+\sqrt{x+1}\left(2x+\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2x+\sqrt{x+1}\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right)=0$

- Trường hợp 1: $\begin{cases} 2x+\sqrt{x+1}=0 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$.
- Trường hợp 2: $\begin{cases} x+\sqrt{x+1}=0 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$.

Cách 3: Tư duy về hệ số trong CASIO.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ BẰNG CASIO

Phương trình $2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=0$ có nhân tử $\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$. Do đó ta hoàn toàn có thể viết lại phương trình dưới dạng:

$2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\left(x+a+b\sqrt{x+1}\right)$

Giải thích: Vì hệ số bậc cao nhất bên trái là $2x^2$ nên hệ số của bậc cao nhất cho nhân tử cần tìm chỉ có thể là x.

Do đó: $x+a+b\sqrt{x+1}=\dfrac{2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}}{2x+\sqrt{x+1}}=f(x)$. Để tìm a, b ta thay hai giá trị ngẫu nhiên của x và kết hợp công cụ CALC ta được:

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow -1+a=f(-1)=-1 \\ x=0 \Rightarrow a+b=f(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

Do đó ta có: $2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=x\left(2x+\sqrt{x+1}\right)+\sqrt{x+1}\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$

Phần bài giải trong *Cách 3* giống như phần bài giải trong *Cách* 2 chỉ khác nhau ở bước phân tích như trên. Tuy nhiên về mặt lâu dài thì *Cách 3* có lợi hơn bởi học sinh sẽ giản ước được số ẩn của bài toán.

Bài 2: Giải phương trình: $2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=0$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=-1$ ta thu được nghiệm $x=-1$, tuy nhiên chúng ta chưa vội vàng đánh giá luôn nghiệm này mà cân nhắc kỹ lưỡng bởi vẫn có thể còn một nghiệm vô tỷ nữa.

Thật vậy, SHIFT CALC với $x=-1.5$ ta thu được $x\approx-1.464101615$.

Với nghiệm vô tỷ trên ta nhận được liên hợp $\left(x+2\sqrt{x+2}\right)$.

Cách 1: Kỹ thuật liên hợp ngược.

Điều kiện: $\begin{cases}x+2\ge 0\\2x^2+5x\le 0\end{cases}\Rightarrow -2\le x\le 0$.

Ta có: $2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=0\Leftrightarrow 4x^2+10x+2\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=0$

$\Leftrightarrow -x^3+4x^2+8x+\left(x^2+2\right)\left(x+2\sqrt{x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow -x\left(x^2-4\left(x+2\right)\right)+\left(x^2+2\right)\left(x+2\sqrt{x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow -x\left(x-2\sqrt{x+2}\right)\left(x+2\sqrt{x+2}\right)+\left(x^2+2\right)\left(x+2\sqrt{x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+2-x\left(x-2\sqrt{x+2}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{x+2}\right)\left(2+2x\sqrt{x+2}\right)=0\Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{x+2}\right)\left(1+x\sqrt{x+2}\right)=0$

- Trường hợp 1: $\begin{cases}x+2\sqrt{x+2}=0\\-2\le x\le 0\end{cases}\Rightarrow x=2-2\sqrt{3}$
- Trường hợp 2: $\begin{cases}1+x\sqrt{x+2}=0\\-2\le x\le 0\end{cases}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Kết luận: Vậy phương trình có ba nghiệm phân biệt là $x=-1, x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ và $x=2-2\sqrt{3}$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp chia đa thức bằng tư duy CASIO.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ BẰNG CASIO

Phương trình $2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=0$ có nhân tử $\left(x+2\sqrt{x+2}\right)$. Do đó ta hoàn toàn có thể viết lại phương trình dưới dạng:

$$2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=\left(x+2\sqrt{x+2}\right)\left(\left(x+a\right)\sqrt{x+2}+bx+c\right)$$

Bên ngoài giá trị $\sqrt{x+2}$ phải có một giá trị x bởi vì phương tình ban đầu có dạng $\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}$, tuy nhiên x cộng với bao nhiêu chưa biết nên ta đặt giá trị giả thiết là $x+a$. Bậc cao nhất của phương trình là 2 nên bên cạnh $\left(x+a\right)\sqrt{x+2}$ ta cần phải đặt thêm một lượng $bx+c$.

Do đó: $\left(x+a\right)\sqrt{x+2}+bx+c=\dfrac{2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}}{x+2\sqrt{x+2}}=f\left(x\right)$. Để tìm a, b, c ta thay ba giá trị ngẫu nhiên của x và kết hợp công cụ CALC ta được:

$$\begin{cases} x=-2\Rightarrow -2b+c=f\left(-2\right)=1 \\ x=-1\Rightarrow \left(a-1\right)-b+c=f\left(-1\right)=0 \\ x=2\Rightarrow 2\left(a+2\right)+2b+c=f\left(2\right)=5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

Do đó ta có: $2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=\left(x+2\sqrt{x+2}\right)\left(x\sqrt{x+2}+1\right)$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=\left(x^2\sqrt{x+2}+x\right)+\left(2x\left(x+2\right)+\sqrt{x+2}\right)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 2x^2+5x\leq 0 \end{cases}\Rightarrow -2\leq x\leq 0.$

Ta có: $2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(x^2\sqrt{x+2}+x\right)+\left(2x\left(x+2\right)+\sqrt{x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left(x\sqrt{x+2}+1\right)+2\sqrt{x+2}\left(x\sqrt{x+2}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+2\sqrt{x+2}\right)\left(1+x\sqrt{x+2}\right)=0$$

- Trường hợp 1: $\begin{cases} x+2\sqrt{x+2}=0 \\ -2\le x\le 0 \end{cases} \Rightarrow x=2-2\sqrt{3}$
- Trường hợp 2: $\begin{cases} 1+x\sqrt{x+2}=0 \\ -2\le x\le 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Kết luận: Vậy phương trình có ba nghiệm phân biệt là $x=-1, x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ và $x=2-2\sqrt{3}$.

Bài 3: Giải phương trình: $\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC x = 1 ta được nghiệm x = 1. Tuy nhiên, ta sẽ không lựa chọn nghiệm x = 1 ngay mà nên tìm thêm một nghiệm vô tỷ nữa để dễ tìm ra liên hợp hơn.

SHIFT CALC x = 6 ta được nghiệm $x\approx 7.464101615$.

Thay $x\approx 7.464101615$ vào căn thức ta được:

$\sqrt{2x-1}\approx 3.732050808\approx \dfrac{x}{2}\Rightarrow x\approx 2\sqrt{2x-1}$

Vậy liên hợp tìm được là $\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)$.

Cách 1: Kỹ thuật liên hợp ngược.

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ \left(6x^2+12x-6\right)\left(x^2+22x-11\right)x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x\ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$

$\Leftrightarrow x^3+22x^2-11x-\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=0$

$\Leftrightarrow -2x^3+16x^2-8x+\left(3x^2+6x-3\right)\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow -2x\left(x^2-4\left(2x-1\right)\right)+\left(3x^2+6x-3\right)\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow -2x\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x+2\sqrt{2x-1}\right)+\left(3x^2+6x-3\right)\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(3x^2+6x-3-2x\left(x+2\sqrt{2x-1}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}\right)=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình: $x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}=0$.

Chú ý rằng nghiệm $x=1$ vẫn còn trong phương trình này, tuy nhiên ta không nên vội làm xuất hiện nghiệm này và cần thêm một nghiệm vô tỷ nữa để xác định liên hợp dễ dàng hơn.

SHIFT CALC $x=17$ ta được nghiệm $x\approx 17.48529137$.

Thay $x\approx 17.48529137$ vào căn thức ta được:

$$\sqrt{2x-1}\approx 5.828427125\approx\frac{x}{3}\Rightarrow x\approx 3\sqrt{2x-1}$$

Vậy liên hợp cần tìm là: $\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)$.

Ta có: $\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(3x^2+18x-9-12x\sqrt{2x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(-x^2+18x-9+4x\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(-\left(x^2-9\left(2x-1\right)\right)+4x\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(-\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\left(x+3\sqrt{2x-1}\right)+4x\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\left(4x-x-3\sqrt{2x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\left(x-\sqrt{2x-1}\right)=0$$

- Trường hợp 1: $\begin{cases}x^2-8x+4=0\\ x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=4\pm2\sqrt{3}$
- Trường hợp 2: $\begin{cases}x^2-18x+9=0\\ x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=9\pm6\sqrt{2}$
- Trường hợp 3: $\begin{cases}3x-3\sqrt{2x-1}=0\\ x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2x-1}\\ x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=2x-1\\ x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=1$$

Kết luận: Phương trình có năm nghiệm phân biệt là

$x=4\pm2\sqrt{3},x=9\pm6\sqrt{2}$ và $x=1$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp chia đa thức bằng tư duy CASIO.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ BẰNG CASIO

Phương trình: $\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$ có nhân tử liên hợp tìm được là $\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)$. Do đó ta hoàn toàn có thể viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^3+22x^2-11x-\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}$$
$$=\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x^2+ax+b-\left(4x+c\right)\sqrt{2x-1}\right)$$

Giải thích:

- Bậc cao nhất bên ngoài là x^3 cho nên bậc cao nhất của nhân tử đang tìm phải là x^2.
- Khi bậc cao nhất là x^2 thì giá trị bên ngoài $\sqrt{2x-1}$ ban đầu có $-6x^2$ do đó khi đã có $-2x^2$ thì nhân tử cần tìm phải có thêm giá trị $-4x$ nữa.
- Cuối cùng ta bổ sung thêm các hệ số a,b,c vào những vị trí chưa xác định được giá trị chính xác.

Sử dụng kỹ thuật chia đa thức bằng tư duy CASIO ta có: $a=6,b=-3,c=0$.

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ \left(6x^2+12x-6\right)\left(x^2+22x-11\right)x\ge0\end{cases}\Rightarrow x\ge\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$

$$\Leftrightarrow x^3+22x^2-11x-\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}\right)=0$$

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ BẰNG CASIO

Phương trình $x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}$ có nhân tử liên hợp tìm được là $\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)$. Do đó ta hoàn toàn có thể viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}=\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\left(x+a\sqrt{2x-1}\right)=0$$

Giải thích: Bậc cao nhất bên ngoài là x^2 cho nên bậc cao nhất của nhân tử đang tìm phải là x.

Do đó ta có: $a=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\left(\frac{x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}}{x-3\sqrt{2x-1}}-x\right)$. Thay một ra giá trị của x (chẳng hạn $x=100$) ta được kết quả $a=-1$.

Ta có: $\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x^2+6x-3-4x\sqrt{2x-1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(x-3\sqrt{2x-1}\right)\left(x-\sqrt{2x-1}\right)=0$$

- Trường hợp 1: $\begin{cases}x^2-8x+4=0\\ x\ge\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=4\pm2\sqrt{3}$
- Trường hợp 2: $\begin{cases}x^2-18x+9=0\\ x\ge\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=9\pm6\sqrt{2}$
- Trường hợp 3: $\begin{cases}3x-3\sqrt{2x-1}=0\\ x\ge\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=2x-1\\ x\ge\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=1$

Kết luận: Phương trình có năm nghiệm phân biệt là $x=4\pm2\sqrt{3},x=9\pm6\sqrt{2}$ và $x=1$.

Bài 4: Giải bất phương trình: $\frac{x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\le0$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=1$ ta thu được kết quả $x\approx-0.618033988$. Thay giá trị $x\approx-0.618033988$ vào căn thức ta được: $\sqrt{x+1}\approx0.6180339887\approx-x$.

Do đó liên hợp tìm được là: $\left(x+\sqrt{x+1}\right)$.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x^2+x+1} \neq -x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x^2+x+1 \neq x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow x > -1 \\ x \neq -1 \end{cases} \end{array}\right.$

Với $x > -1 \Rightarrow x + \sqrt{x^2+x+1} > x + \sqrt{x^2} \Rightarrow x + \sqrt{x^2+x+1} > x + |x| \geq x - x \geq 0$

Do đó: $x + \sqrt{x^2+x+1} > 0 \forall x > -1.$

Ta có: $\dfrac{x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{x+\sqrt{x^2+x+1}} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3 \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x+1+x(x+1)\sqrt{x+1} \leq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x+1+\left(x^2+x\right)\sqrt{x+1} \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+x+1+\left(x^2+x\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right) \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+x\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right) - \left(x^2-(x+1)\right) \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+x\right)\left(x+\sqrt{x+1}\right) - \left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right) \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+x-x+\sqrt{x+1}\right) \leq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x+1}\right) \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{x+1} \leq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \leq -x \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq x^2 \\ 0 \geq x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1 \geq 0 \\ 0 \geq x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x \leq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ 0 \geq x > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \in \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$$

Kết luận: Bất phương trình có tập nghiệm là: $x \in \left(-1; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$.

Bài 5: Giải phương trình: $\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$

Ta có: $\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)=x+1-1=x$. Như vậy nếu tách x ở vế phải theo quy tắc liên hợp ngược như trên thì ta hoàn toàn có thể làm xuất hiện được nhân tử chung:

Ta có: $\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$$

Vì $1+\sqrt{x+1}>0$ do đó ta có:

$$\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0$$

Điều kiện: $x\geq 0$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình: $\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0$

SHIFT CALC với $x=1$ ta được nghiệm $x\approx 0.3819660113$

Thay $x\approx 0.3819660113$ vào các căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{x}\approx 0.6180339887\approx 1-x\\ \sqrt{2x^2-2x+1}\approx 0.726542528\\ \sqrt{x^2+x}\approx 0.726542528\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=1-x\\ \sqrt{2x^2-2x+1}=\sqrt{x^2+x}\end{cases}$$

Do đó các liên hợp cần tìm là: $\left(x-1+\sqrt{x}\right)$ và $\left(\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$

Do đó: $\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(2x^2-2x+1\right)-\left(x^2+x\right)}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

Chú ý: $\left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(x-1-\sqrt{x}\right)=\left(x-1\right)^2-x=x^2-3x+1$

Do đó: $\dfrac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1-x}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-1\right)^2-x}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(x-1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{x}\right)\frac{x-1-\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(x-1-\sqrt{x}+\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}\right)=0$$

Trường hợp 1: $x-1+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow 1-x=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 1\\ \left(1-x\right)^2=x\end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 2: $\begin{cases}x-1-\sqrt{x}+\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}=0\\ \sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình trên ta được:

$$2\sqrt{2x^2-2x+1}+2x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}=1-x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x^2-2x+1=\left(1-x\right)^2\\ 0\le x\le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2=0\\ 0\le x\le 1\end{cases} \Rightarrow x=0$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ và $x=0$

CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG PHÁP XÉT TỔNG HIỆU

I. Đặt vấn đề.

- Trong các chủ đề trước, chúng ta đã giải các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình bằng các phương pháp nâng lũy thừa, tạo biểu thức liên hợp với sự hỗ trợ của máy tính CASIO.
- Trong phần này, chúng ta sẽ tiếp tục tiếp cận phương pháp nhân liên hợp tiếp theo, chuyên sử dụng cho các bài toán có hai căn bậc hai cộng với nhau.

II. Phương pháp xét tổng hiệu là gì?

- Cho phương trình có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$ (1).
- Xét $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\dfrac{A-B}{C}$ (2).
- Khi đó chỉ cần cộng hoặc trừ vế với vế của (1) và (2) ta sẽ khử được một trong hai căn $\sqrt{A}$ hoặc $\sqrt{B}$.

III. Ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+1}=x+1$

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge -1$. Nhận xét $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét $\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-5x+1}=\dfrac{\left(x^2-3x+3\right)-\left(x^2-5x+1\right)}{\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+1}}=\dfrac{2x+2}{x+1}=2$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+1}=x+1\\ \sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-5x+1}=2\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình ta được:

$$2\sqrt{x^2-3x+3}=x+3\Rightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 4\left(x^2-3x+3\right)=x^2+6x+9\end{cases}\Rightarrow x=3\pm 2\sqrt{2}$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=3\pm 2\sqrt{2}$

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}=x+1$

Đáp số: $x=0$

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+2}=x^2+x+1$

Đáp số: $x=\pm\sqrt{2}$

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x+8\sqrt{x}}+\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\sqrt[4]{x}+1$

Đáp số: $x=0$

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}=3(4-x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)$

Đáp số: $x=3$

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4\\ \sqrt{5y+3}-\sqrt{7x-2}=2x-1-4y\end{cases}$

Đáp số: $x=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{8}, y=\dfrac{5\pm4\sqrt{17}}{32}$

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+45+\sqrt{7y^2-29y-5}=y^2+10x\\ \sqrt{5x+y-5}+\sqrt{1-x+y}=6\end{cases}$

Đáp số: $x=y=5$

Bài 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+2y^2}+\sqrt{x+y^2+1}=y+1\\ \sqrt{(x^2+1)+2(x+1)\sqrt{x^2+1}}=2y\end{cases}$

Đáp số: $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Bài 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}=2\\ \sqrt{x^2-x+2}=y^2+2xy+2x-5+\sqrt{x+1}\end{cases}$

Đáp số: $x=y=1$

Bài 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y+4}=4\\ x^3+4x^2+2y^2-4y(x+1)+3=0\end{cases}$

Đáp số: $x=1, y=2$

V. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}=x+1$

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{2}$

Xét: $\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x+1}=\dfrac{x^2+2x-2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}}=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x+1}=x-1\\ \sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}=x+1\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình ta được: $2\sqrt{x^2+2x}=2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x}=x \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2+2x=x^2\end{cases} \Rightarrow x=0$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+2}=x^2+x+1$

Điều kiện: $x^3+x^2+1\ge 0 \Rightarrow x^3+x^2+4>0$

$\Rightarrow (x+2)(x^2-x+2)>0 \Rightarrow x>-2$

Xét: $\sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=\dfrac{(x^3+x^2+1)-(x^2+2)}{\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}=x-1$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+2}=x^2+x+1\\ \sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=x-1\end{cases}$

Trừ hai vế của hai phương trình ta được:

$2\sqrt{x^2+2}=(x^2+x+1)-(x-1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2}=x^2+2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2}=2 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\pm\sqrt{2}$.

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x+8\sqrt{x}}+\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\sqrt[4]{x}+1$

Điều kiện: $x\geq 0$.

Xét: $\sqrt{x+8\sqrt{x}}-\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\dfrac{\left(x+8\sqrt{x}\right)-\left(x+7\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x+8\sqrt{x}}+\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+8\sqrt{x}}-\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}=\frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt[4]{x}-1\right)}{\sqrt[4]{x}+1}=\sqrt[4]{x}-1$$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x+8\sqrt{x}}+\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\sqrt[4]{x}+1\\ \sqrt{x+8\sqrt{x}}-\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\sqrt[4]{x}-1\end{cases}$

Trừ hai vế của hai phương trình ta được:

$$2\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=2\Leftrightarrow\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow x+7\sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow x=0.$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}=3(4-x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)$

Điều kiện: $-1\leq x<4$.

Xét: $\sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x^2-3x+4}=\dfrac{\left(x^2+16\right)-4\left(x^2-3x+4\right)}{\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}}$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x^2-3x+4}=\frac{-3x^2+12x}{3(4-x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{-3x(x-4)}{3(4-x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}=3(4-x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\\ \sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x^2-3x+4}=\sqrt{x+1}-1\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình ta được:

$$2\sqrt{x^2+16}=(13-3x)\sqrt{x+1}+11-3x$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+16}-5\right)=(13-3x)\left(\sqrt{x+1}-2\right)+27-9x$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+16}-5\right)+(3x-13)\left(\sqrt{x+1}-2\right)+9(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(x^2-9\right)}{\sqrt{x^2+16}+5}+\frac{(3x-13)(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}+9(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\left[\frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+16}+5}+\frac{3x-13}{\sqrt{x+1}+2}+9\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+16}+5}+\frac{3x+5+9\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}\right]=0 \text{ (*)}.$$

Vì $x \geq -1 \Rightarrow \dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+16}+5}+\dfrac{3x+5+9\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}>0$.

Do đó (*) $\Rightarrow x=3$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4\\ \sqrt{5y+3}-\sqrt{7x-2}=2x-1-4y\end{cases}$

Điều kiện: $x \geq \dfrac{2}{7}, y \geq -\dfrac{3}{5}$.

Xét: $\sqrt{y-3x+4}-\sqrt{y+5x+4}=\dfrac{(y-3x+4)-(y+5x+4)}{\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}}$

$$\Rightarrow \sqrt{y-3x+4}-\sqrt{y+5x+4}=\frac{-8x}{4}=-2x$$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4\\ \sqrt{y-3x+4}-\sqrt{y+5x+4}=-2x\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình ta được: $2\sqrt{y-3x+4}=4-2x$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-3x+4}=2-x \Leftrightarrow \begin{cases}x \leq 2\\ y-3x+4=(2-x)^2\end{cases} \Rightarrow y=x^2-x.$$

Thay $y=x^2-x$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=1$ ta được nghiệm $x \approx 1.390388203$.

Thay $x \approx 1.390388203$ vào các căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{5x^2-5x+3} \approx 2.390388203 \approx x+1\\ \sqrt{7x-2} \approx 2.780776406 \approx 2x\end{cases}$$

Vậy các liên hợp cần tạo ra là: $\left(\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)\right)$ và $\left(2x-\sqrt{7x-2}\right)$.

Ta có: $\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)\right)+\left(2x-\sqrt{7x-2}\right)+4x^2-7x+2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-7x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1\right)=0\ (*)$$

Với $x\geq\frac{2}{7}$ ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1>0\\2x+\sqrt{7x-2}\geq 7>0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1>0.$$

Do đó (*) $\Rightarrow\begin{cases}4x^2-7x+2=0\\x\geq\frac{2}{7}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}\Rightarrow y=\frac{5\pm4\sqrt{17}}{32}.$

Kết luận: Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm phân biệt là:

$x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}$, $y=\frac{5\pm4\sqrt{17}}{32}$

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+45+\sqrt{7y^2-29y-5}=y^2+10x\\\sqrt{5x+y-5}+\sqrt{1-x+y}=6\end{cases}$

Điều kiện: $y\geq\frac{29+3\sqrt{109}}{14}\vee y\leq\frac{29-3\sqrt{109}}{14}$.

Xét: $\sqrt{5x+y-5}-\sqrt{1-x+y}=\frac{(5x+y-5)-(1-x+y)}{\sqrt{5x+y-5}+\sqrt{1-x+y}}$

$$\Rightarrow\sqrt{5x+y-5}-\sqrt{1-x+y}=\frac{6(x-1)}{6}=x-1.$$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{5x+y-5}-\sqrt{1-x+y}=x-1\\\sqrt{5x+y-5}+\sqrt{1-x+y}=6\end{cases}$.

Trừ hai vế của hai phương trình ta được: $2\sqrt{1-x+y}=7-x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq7\\4(1-x+y)=(7-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq7\\4y=(x-5)^2+20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq7,y\geq5\\4y-45=x^2-10x\end{cases}$$

Thay $x^2 - 10x = 4y - 45$ vào phương trình đầu ta được:

$$x^2 + 45 + \sqrt{7y^2 - 29y - 5} = y^2 + 10x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 45 + \sqrt{7y^2 - 29y - 5} = y^2$$

$$\Leftrightarrow 4y - 45 + 45 + \sqrt{7y^2 - 29y - 5} = y^2 \Leftrightarrow y^2 - 4y = \sqrt{7y^2 - 29y - 5} \text{ (1).}$$

Vì $y \ge 5 \Rightarrow y^2 - 4y > 0$ do đó bình phương hai vế (1) ta được:

$$\left(y^2 - 4y\right)^2 = 7y^2 - 29y - 5 \Leftrightarrow (y-5)\left(y^3 - 3y^2 - 6y - 1\right) = 0 \text{ (*).}$$

Xét hàm số: $f(y) = y^3 - 3y^2 - 6y - 1$ với $y \ge 5$.

Ta có: $f'(y) = 3y^2 - 6y - 6 = 3(y-1)^2 - 9 \ge 3(5-1)^2 - 9 > 0 \forall y \ge 5$.

Do đó: $f(y)$ là hàm số đồng biến trong $[5; +\infty)$.

Do đó ta có: $f(y) \ge f(5) \Rightarrow y^3 - 3y^2 - 6y - 1 \ge 19 > 0 \forall y \ge 5$.

Như vậy (*) $\Rightarrow y = 5$ (Thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow x^2 - 10x + 45 = 20 \Rightarrow x = 5$.

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x = y = 5$.

Bài 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + 2y^2} + \sqrt{x + y^2 + 1} = y + 1 \\ \sqrt{\left(x^2 + 1\right) + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 1}} = 2y \end{cases}$

Điều kiện: $y \ge 0$.

$$\text{Xét: } \sqrt{x + 2y^2} - \sqrt{x + y^2 + 1} = \frac{x + 2y^2 - \left(x + y^2 + 1\right)}{\sqrt{x + 2y^2} + \sqrt{x + y^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x + 2y^2} - \sqrt{x + y^2 + 1} = \frac{y^2 - 1}{y + 1} = y - 1.$$

Do đó ta có: $\begin{cases} \sqrt{x + 2y^2} + \sqrt{x + y^2 + 1} = y + 1 \\ \sqrt{x + 2y^2} - \sqrt{x + y^2 + 1} = y - 1 \end{cases}$

Trừ hai vế của hai phương trình trên ta được:

$$2\sqrt{x + y^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x + y^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x + y^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = -y^2 \le 0$$

Thay $x = -y^2$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{\left(y^4 + 1\right) + 2\left(-y^2 + 1\right)\sqrt{y^4 + 1}} = 2y \Leftrightarrow \left(y^4 + 1\right) + 2\left(-y^2 + 1\right)\sqrt{y^4 + 1} = 4y^2$$

Đặt $y^2 = t \ge 0$ ta có: $t^2 - 4t + 1 - 2(t-1)\sqrt{t^2 + 1} = 0$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $t=1$ ta được $t\approx 0.5773502692$. Thay $t\approx 0.5773502692$ vào căn thức ta được: $\sqrt{t^2+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx 1.154700538\approx 2t$.

Vậy liên hợp cần tìm là: $\left(2t-\sqrt{t^2+1}\right)$.

Ta có: $t^2-4t+1-2(t-1)\sqrt{t^2+1}=0 \Leftrightarrow -3t^2+1+2(t-1)\left(2t-\sqrt{t^2+1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow -3t^2+1+2(t-1)\frac{4t^2-\left(t^2+1\right)}{2t+\sqrt{t^2+1}}=0 \Leftrightarrow -\left(3t^2-1\right)+2(t-1)\frac{3t^2-1}{2t+\sqrt{t^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3t^2-1\right)\left(-1+\frac{2(t-1)}{2t+\sqrt{t^2+1}}\right)=0 \Leftrightarrow \left(3t^2-1\right)\frac{-2-\sqrt{t^2+1}}{2t+\sqrt{t^2+1}}=0 \text{ (*)}.$$

Vì $t\geq 0 \Rightarrow \frac{-2-\sqrt{t^2+1}}{2t+\sqrt{t^2+1}}<0$ do đó (*) $\Rightarrow 3t^2-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó $\begin{cases} y^2=t=\frac{1}{\sqrt{3}}, y\geq 0 \\ x=-y^2=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}, y=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất là $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}, y=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Bài 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}=2 \\ \sqrt{x^2-x+2}=y^2+2xy+2x-5+\sqrt{x+1} \end{cases}$

Điều kiện: $-\sqrt{2}\leq x, y\leq \sqrt{2}$.

Xét: $x\sqrt{2-y^2}-y\sqrt{2-x^2}=\frac{x^2\left(2-y^2\right)-y^2\left(2-x^2\right)}{x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}}$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{2-y^2}-y\sqrt{2-x^2}=\frac{2x^2-x^2y^2-2y^2+x^2y^2}{2}=x^2-y^2$$

Do đó ta có: $\begin{cases} x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}=2 \\ x\sqrt{2-y^2}-y\sqrt{2-x^2}=x^2-y^2 \end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình ta được:

$$2x\sqrt{2-y^2}=x^2+2-y^2 \Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{2-y^2}+\left(2-y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2-y^2}\right)^2=0$$

Do đó: $x=\sqrt{2-y^2}\geq 0$. Như vậy ta có: $x^2+y^2=2$ và $0\leq x\leq\sqrt{2}$.

Tương tự ta cũng có: $y=\sqrt{2-x^2}\Rightarrow 0\leq y\leq\sqrt{2}$.

Xét phương trình thứ hai: $\sqrt{x^2-x+2}=y^2+2xy+2x-5+\sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+2}=y^2+2xy+2x+2-7+\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+2}=y^2+2xy+2x+x^2+y^2-7+\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+2}=\left(x+y\right)^2+2x+y^2-7+\sqrt{x+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $\left(x+y\right)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\left(x+y\right)^2\leq 4$

Do đó:

$$\sqrt{x^2-x+2}\leq 4+2x+y^2-7+\sqrt{x+1}\Rightarrow\sqrt{x^2-x+2}\leq 2x+y^2-3+\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2-x+2}\leq 2x+\left(2-x^2\right)-3+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+2}\leq 2x-x^2-1+\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x+1}\leq 0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\frac{x^2-x+2-x-1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x+1}}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\frac{\left(x-1\right)^2}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x+1}}\leq 0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x+1}}\right)\leq 0$$

Vì $1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x+1}}>0\forall x\geq -1$ do đó ta có $\left(x-1\right)^2\leq 0$.

Mặt khác vì $\left(x-1\right)^2\geq 0\forall x\in\mathbb{R}$ do đó $\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\sqrt{2-x^2}=1$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình có cặp nghiệp duy nhất $x=y=1$.

Bài 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y+4}=4\\ x^3+4x^2+2y^2-4y(x+1)+3=0\end{cases}$

Xét $\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y+4}=\dfrac{(2x+y)-(2x-y+4)}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y+4}}$

$$\Rightarrow\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y+4}=\frac{2(y-2)}{4}=\frac{y-2}{2}$$

Do đó ta có: $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y+4}=4\\ \sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y+4}=\dfrac{y-2}{2}\end{cases}$

Cộng hai vế của hai phương trình trên ta được $2\sqrt{2x+y}=\dfrac{y+6}{2}$

$$\Rightarrow 16(2x+y)=(y+6)^2\Leftrightarrow 16(2x+y)=y^2+12y+36$$

$$\Leftrightarrow 32x=y^2-4y+36\Leftrightarrow x=\frac{(y-2)^2}{32}+1\geq 1.$$

Mặt khác trong phương trình thứ hai ta nhận thấy:

$$x^3+4x^2+2y^2-4y(x+1)+3=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-1+\left(4x^2-4xy+y^2\right)+\left(y^2-4y+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3-1\right)+(2x-y)^2+(y-2)^2=0$$

Vì: $x\geq 1,(2x-y)^2+(y-2)^2\geq 0\Rightarrow\left(x^3-1\right)+(2x-y)^2+(y-2)^2\geq 0$

Do đó: $\left(x^3-1\right)+(2x-y)^2+(y-2)^2=0\Leftrightarrow x=1,y=2$.

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x=1,y=2$.

CHỦ ĐỀ 5: NHÂN LIÊN HỢP HAI NGHIỆM HỮU TỶ ĐƠN

I. Đặt vấn đề.

Trong các chủ đề trước chúng ta chủ yếu đề cập đến các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình có nghiệm vô tỷ. Trong các chủ đề 5, 6 chúng ta sẽ đề cập đến phương pháp nhân liên hợp trong trường hợp nghiệm là một số hữu tỷ.

II. Giới thiệu về chức năng TABLE trong máy tính CASIO.

Table là một kỹ thuật khó, đòi hỏi học sinh cần phải có kiến thức tốt về hàm số bởi đây một kỹ thuật quan trọng giúp học sinh đánh giá được hướng đi của bài toán hàm số. Để có thể hiểu sâu, kỹ và rộng các bài toán phương trình, học sinh cần nắm được những kỹ thuật Table căn bản như sau:

1. *TABLE cơ bản.*

Cho phương trình $x^2-x+(x-1)\sqrt{x+1}=2$. Ta có thể đánh giá phương trình bằng cách sử dụng TABLE như sau:

Bước 1: Truy cập **MODE 7 (TABLE)**, ta gõ: $f(\mathrm{X})=\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+(\mathrm{X}-1)\sqrt{\mathrm{X}+1}-2$.

Sau đó ấn "=". Nếu máy tính nào có $g(\mathrm{X})$ thì bỏ qua bằng ấn "=" tiếp.

Bước 2: Hàm số có điều kiện xác định $x\in[-1;+\infty)$ và thông thường một phương trình có nghiệm không quá 7 nên chọn:

- START = -1 (Ấn -1 rồi ấn "=").
- END = 7 (Ấn 7 rồi ấn "=").

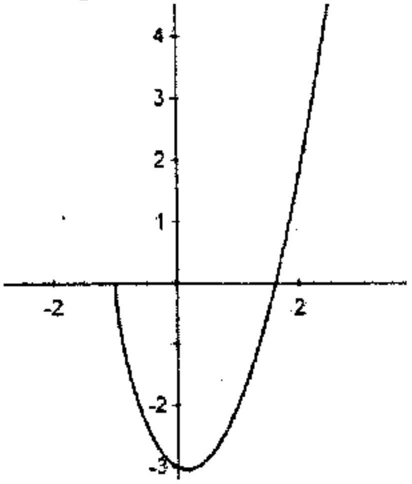
Bước 3: Chọn STEP = 0.5 ấn "=". Chú ý:

- STEP có nghĩa là bước nhảy, nếu chọn STEP = 0.5 thì giá trị x sẽ lần lượt chạy qua $-1;-0.5;0;...$
- Nên ưu tiên chọn STEP sao cho mỗi bước nhảy hàm số có thể đưa ra những giá trị nguyên.

X	F(X)
−1	0
−0.5	−2.31
0	−3
0.5	−2.862
1	−2
1.5	−0.459
2	1.732
2.5	4.5562
3	8
3.5	12.053
4	16.708
4.5	21.958
5	27.797
5.5	34.222
6	41.228
6.5	48.812
7	56.97

- Các giá trị nên ưu tiên chọn STEP thường là $0.1;0.5$ hoặc 1.
- Chọn STEP sao cho thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{END-START}{STEP}<20$.

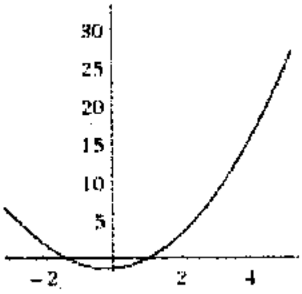
Bước 4: Thu được bảng giá trị TABLE như bảng trên.



Qua bảng đồ thị hàm số trên ta sẽ nhận thấy rằng bảng TABLE đã phần nào tương phản hình dáng của đồ thị hàm số như hình vẽ bên với các yếu tố sau:

- Phương trình có một nghiệm $x=-1$ (Trong TABLE thể hiện khi $X=-1$ thì $F(X)=0$).
- Hàm số có 1 cực trị tại khu vực giữa X = 0 và X = 0.5 (Hàm số xuống giá trị gần như thấp nhất khi X = 0, F(X) = −3 và tăng dần từ giá trị X = 0.5, F(X) = −2.862).
- Phương trình có một nghiệm lẻ giữa X = 1.5 và X = 2 vì qua 2 giá trị này F(X) đổi dấu từ −0.459 tới 1.732. Để định vị chính xác nghiệm này ta sử dụng SHIFT CALC với X = 1.55 là một giá trị giữa 1.5 và 2 để được $x\approx 1.618033989$.

2. *Phân biệt nghiệm đơn và nghiệm kép bằng TABLE.*

<table>
<tr><td colspan="3"><i>Nghiệm đơn X = 1</i>
$F(X)=X^2+\sqrt{X+3}-3=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">TABLE</td><td>ĐỒ THỊ THỰC TẾ</td></tr>
<tr><td>X</td><td>F(X)</td><td rowspan="8"> </td></tr>
<tr><td>−1</td><td>−0.585</td></tr>
<tr><td>−0.5</td><td>−1.168</td></tr>
<tr><td>0</td><td>−1.267</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>−0.879</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>1.3713</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3.236</td></tr>
<tr><td colspan="3"><i>Nhận xét:</i> Phương trình có nghiệm đơn thì qua giá trị nghiệm, F(X) đối</td></tr>
</table>

dấu. Hàm số có nhân tử dạng $(x-a)$ với a là nghiệm đơn.

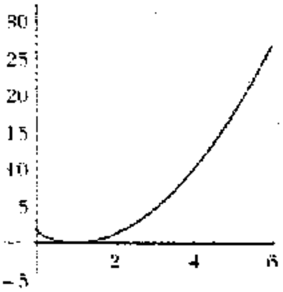
Nghiệm kép X = 1

$F(X) = X^2 - X + 2 - 2\sqrt{X} = 0$

TABLE

X	F(X)
0	2
0.5	0.3357
1	0
1.5	0.3005
2	1.1715
2.5	2.5877
3	4.5358

ĐỒ THỊ THỰC TẾ



Nhận xét: Phương trình có nghiệm kép thì qua giá trị nghiệm, F(X) không đổi dấu. Hàm số có nhân tử dạng $(x-a)^2$ trong đó a là nghiệm kép.

III. Ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17} \geq x-x^2$

*** Phân tích:**

Với điều kiện $x \geq \frac{17}{21}$ ta xét hàm số $f(x)=x^2-x+\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17}$.

PHÂN TÍCH CASIO

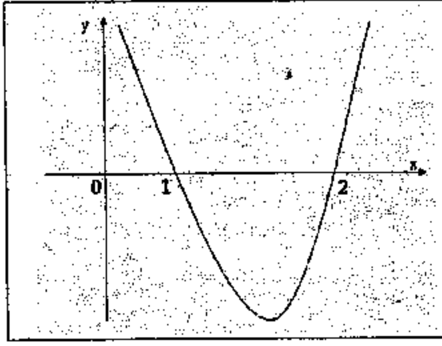
Sử dụng TABLE với:

$f(X)=X^2-X+\sqrt{2X^2-X+3}-\sqrt{21X-17}$

START = 1, END = 7, STEP = 0,5 ta có bảng giá trị như hình bên.

Khi đó ta hình dung được đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây:

X	$f(X)$
	0
1.5	−0.608
2	0
2.5	1.3973
3	3.4603
3.5	6.1323
4	9.3824
4.5	13.191
5	17.547
5.5	22.441



6	27.866
6.5	33.818
7	40.293

Như vậy phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x=1, x=2$.

Tuy nhiên nếu áp dụng cách tạo biểu thức liên hợp ở các phần trước là thay $x=1$ vào căn thức ta được $\sqrt{2x^2-x+3}=2=x+1=2x=3x-1=4x-2=...$ như vậy rất khó để có thể chắc chắn đâu mới là biểu thức liên hợp chính xác cần tìm bởi ngoài nghiệm $x=1$ ta còn có cả nghiệm $x=2$.

Nhiệm vụ của phương pháp nhân liên hợp này là làm sao để có thể xuất hiện cụm nhân tử $(x-1)(x-2)$ hay (x^2-3x+2). Để tìm được biểu thức liên hợp cần tìm này, ta làm theo nguyên tắc sau:

Nếu phương trình có chứa $\sqrt{g(x)}$ đồng thời có hai nghiệm là α và β.

Khi đó đặt $ax+b=\sqrt{g(x)}$. Thay lần lượt các nghiệm α và β vào đẳng thức trên ta được hệ phương trình: $\begin{cases}\alpha a+b=\sqrt{g(\alpha)}\\ \beta a+b=\sqrt{g(\beta)}\end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên ta sẽ tìm được các giá trị a,b.

Với a,b tìm được, ta có liên hợp $\left(ax+b-\sqrt{g(x)}\right)$.

Chú ý rằng ta hoàn toàn có thể áp dụng quy tắc trên với căn bậc 3, bậc 4.

Áp dụng cách tìm liên hợp trên để tìm liên hợp cho các căn thức của bất phương trình ban đầu:

Đặt $ax+b=\sqrt{2x^2-x+3}$. Thay $x=1, x=2$ vào đẳng thức trên ta được hệ:

$\begin{cases}a+b=2\\ 2a+b=3\end{cases} \Rightarrow a=b=1 \Rightarrow \left(\sqrt{2x^2-x+3}-x-1\right)$ là liên hợp cần tìm.

Đặt $ax+b=\sqrt{21x-17}$. Thay $x=1, x=2$ vào đẳng thức trên ta được hệ:

$\begin{cases}a+b=2\\ 2a+b=5\end{cases} \Rightarrow a=3, b=-1 \Rightarrow \left(3x-1-\sqrt{21x-17}\right)$ là liên hợp cần tìm.

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge \frac{17}{21}$

Ta có: $\sqrt{2x^2 - x + 3} - \sqrt{21x - 17} \ge x - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x + \sqrt{2x^2 - x + 3} - \sqrt{21x - 17} \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 3x + 2\right) + \left(\sqrt{2x^2 - x + 3} - x - 1\right) + \left(3x - 1 - \sqrt{21x - 17}\right) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 3x + 2\right) + \frac{2x^2 - x + 3 - (x+1)^2}{\sqrt{2x^2 - x + 3} + x + 1} + \frac{(3x-1)^2 - (21x - 17)}{3x - 1 + \sqrt{21x - 17}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 3x + 2\right) + \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2x^2 - x + 3} + x + 1} + \frac{9\left(x^2 - 3x + 2\right)}{3x - 1 + \sqrt{21x - 17}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 3x + 2\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 3} + x + 1} + \frac{9}{3x - 1 + \sqrt{21x - 17}}\right) \ge 0$$

Vì $x \ge \frac{17}{21}$ nên $1 + \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 3} + x + 1} + \frac{9}{3x - 1 + \sqrt{21x - 17}} > 0$

Do đó $\begin{cases} x \ge \frac{17}{21} \\ x^2 - 3x + 2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{17}{21} \le x \le 1 \\ x \ge 2 \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left[\frac{17}{21}; 1\right] \cup \left[2; +\infty\right)$.

Kết luận: Bất phương trình có nghiệm $x \in \left[\frac{17}{21}; 1\right] \cup \left[2; +\infty\right)$.

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^4 - x^2 + 4} + \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} = 7x$

Đáp số: $x = 1, x = 4$

Bài 2: Giải phương trình: $3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{5x + 4}$

Đáp số: $x = 0, x = 1$

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{3x + 1} + 2\sqrt[3]{19x + 8} = 2x^2 + x + 5$

Đáp số: $x = 0, x = 1$

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{28 - 3x} - 24 = \sqrt{x}\left(7x - 12\sqrt{x} - 14\right)$

Đáp số: $x = 1, x = 4$

Bài 5: Giải bất phương trình:

$$31x+34\ge\left(4x^2-x-2\right)\left(2\sqrt{8x+9}-\sqrt{x+2}\right)$$

Đáp số: $x\in\left[-\frac{9}{8};-\frac{34}{31}\right]\cup\left[-1;2\right]$

Bài 6: Giải phương trình:

$$\left(x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt[3]{7x-8}+2\right)=2x^3-x^2-25x+25$$

Đáp số: $x=1,x=5$

VII. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^4-x^2+4}+\sqrt{x^4+20x^2+4}=7x$

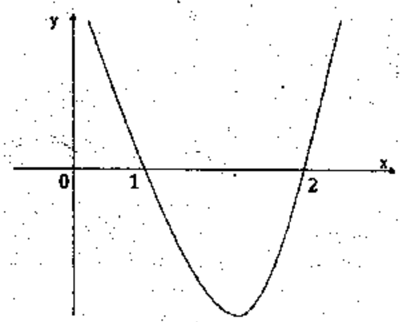
PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng TABLE với:

$f\left(X\right)=\sqrt{X^4-X^2+4}+\sqrt{X^4+20X^2+4}-7x$

START = 0, END = 6, STEP = 0,5 ta có bảng giá trị như hình bên.

Khi đó ta hình dung được đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây:



X	$f\left(X\right)$
0	4
0.5	1.4629
1	0
1.5	−0.537
2	0
2.5	1.5312
3	3.9966
3.5	7.385
4	11.703
4.5	16.963
5	23.177
5.5	30.352
6	38.497

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Với hình dáng đồ thị được minh họa như trên, hàm số có hai nghiệm hữu tỷ đơn là $x=1,x=2$.

Đặt $\sqrt{x^4-x^2+4}=ax+b\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\2a+b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$

Đặt: $\sqrt{x^4+20x^2+4}=ax+b\Rightarrow\begin{cases}a+b=5\\2a+b=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=0\end{cases}$

Các liên hợp cần tìm là: $\left(\sqrt{x^4-x^2+4}-2x\right),\left(\sqrt{x^4+20x^2+4}-5x\right)$

Điều kiện: $x\ge 0$.

Ta có: $\sqrt{x^4-x^2+4}+\sqrt{x^4+20x^2+4}=7x$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^4-x^2+4}-2x\right)+\left(\sqrt{x^4+20x^2+4}-5x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^4-x^2+4-4x^2}{\sqrt{x^4-x^2+4}+2x}+\frac{x^4+20x^2+4-25x^2}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+5x}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^4-5x^2+4}{\sqrt{x^4-x^2+4}+2x}+\frac{x^4-5x^2+4}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+5x}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^4-5x^2+4\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2+4}+2x}+\frac{1}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+5x}\right)=0$$

Vì $x\ge 0$ ta có: $\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2+4}+2x}+\frac{1}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+5x}>0$.

Do đó: $\begin{cases}x^4-5x^2+4=0\\x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=1, x=4$.

Bài 2: Giải phương trình: $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

PHÂN TÍCH CASIO

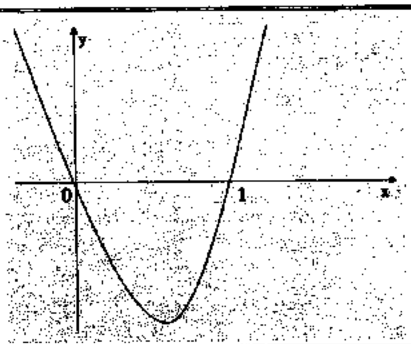
Sử dụng TABLE với:

$f(X)=3X^2-X+3-\sqrt{3X+1}-\sqrt{5X+4}$

START = 0, END = 6, STEP = 0,5 ta có bảng giá trị như hình bên.

Khi đó ta hình dung được đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây:

X	$f(X)$
0	0
0.5	−0.88
1	0
1.5	2.5136
2	6.6125
2.5	12.272
3	19.478
3.5	28.222
	38.495



4.5	50.294
5	63.614
5.5	78. 54
6	94.81

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Với hình dáng đồ thị được minh họa như trên, hàm số có hai nghiệm hữu tỷ đơn là $x=1, x=0$.

Đặt $\sqrt{3x+1}=ax+b \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{5x+4}=ax+b \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

Các liên hợp cần tìm là: $\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right), \left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)$

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$

Ta có: $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

$\Leftrightarrow 3x^2-x+3-\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+4}=0$

$\Leftrightarrow 3x^2-3x+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{(x+1)^2-3x-1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{(x+2)^2-5x-4}{x+2+\sqrt{5x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{x^2-x}{x+2+\sqrt{5x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0$$

Vì $x \geq -\frac{1}{3}$ nên $3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}>0$.

Do đó $x^2-x=0 \Rightarrow x=0 \vee x=1$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=0$ và $x=1$.

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{19x+8}=2x^2+x+5$

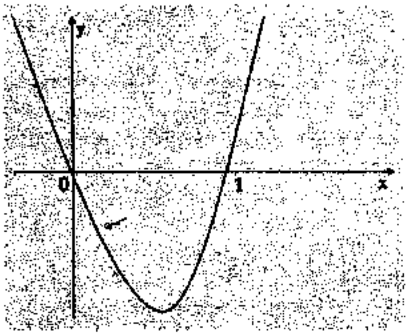
PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng TABLE với:

$f\left(X\right)=2X^2+X+5-\sqrt{3X+1}-2\sqrt[3]{19X+8}$

START = 0, END = 6, STEP = 0,5 ta có bảng giá trị như hình bên.

Khi đó ta hình dung được đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây:



X	$f(X)$
0	0
0.5	−0.773
1	0
1.5	2.0205
2	5.1881
2.5	9.4556
3	14.796
3.5	21.193
4	28.635
4.5	37.114
5	46.624
5.5	57.161
6	68.721

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Với hình dáng đồ thị được minh họa như trên, hàm số có hai nghiệm hữu tỷ đơn là $x=1,x=0$.

Đặt: $\sqrt{3x+1}=ax+b\Rightarrow\begin{cases}b=1\\a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

Đặt: $\sqrt[3]{19x+8}=ax+b\Rightarrow\begin{cases}b=2\\a+b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

Các liên hợp cần tìm là: $\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right),\left(x+2-\sqrt[3]{19x+8}\right)$

Điều kiện: $x\geq-\frac{1}{3}$

Ta có: $2x^2+x+5=\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{19x+8}$

$\Leftrightarrow 2x^2+x+5-\sqrt{3x+1}-2\sqrt[3]{19x+8}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+2\left(x+2-2\sqrt[3]{19x+8}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{(x+1)^2-3x-1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{2\left((x+2)^3-(19x+8)\right)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{2\left(x^2-x\right)(x+7)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{2(x+7)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}\right)=0$$

Vì $x\ge-\frac{1}{3}$ nên $\begin{cases}x+1+\sqrt{3x+1}>0\\x+2>0\\19x+8>0\\x+7>0\end{cases}$.

Do đó: $3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{2(x+7)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}>0$

Vậy $x^2-x=0\Rightarrow x=0\vee x=1$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=0$ và $x=1$.

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{28-3x}-24=\sqrt{x}\left(7x-12\sqrt{x}-14\right)$

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow 0\le t\le\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Phương trình trở thành: $\sqrt{28-3t^2}-24=t\left(7t^2-12t-14\right)$

$$\Leftrightarrow 7t^3-12t^2-14t-\sqrt{28-3t^2}+24=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

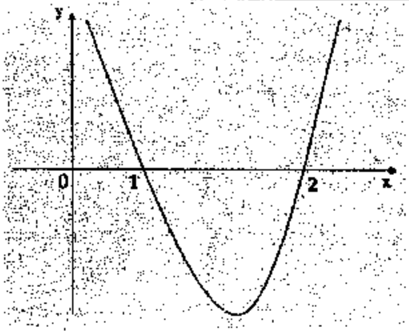
Sử dụng TABLE với:

$f(X)=7X^3-12X^2-14X-\sqrt{28-3X^2}+24$

START = 0, END = 6, STEP = 0,5 ta có bảng giá trị như hình bên.

Khi đó ta hình dung được đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây:

X	$f(X)$
	18.708
0.5	9.6548
1	0
1.5	−4.984
2	0



2.5	20.333
3	62
3 5	ERROR
4	ERROR
4.5	ERROR
5	ERROR
5.5	ERROR
6	ERROR

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Với hình dáng đồ thị được minh họa như trên, hàm số có hai nghiệm hữu tỷ đơn là $t=1, t=2$.

Đặt: $\sqrt{28-3t^2}=at+b \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 2a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=6 \end{cases}$

Liên hợp cần tìm là: $\left(6-t-\sqrt{28-3t^2}\right)$

Ta có: $7t^3-12t^2-14t-\sqrt{28-3t^2}+24=0$

$$\Leftrightarrow 7t^3-12t^2-13t+18+\left(6-t-\sqrt{28-3t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 7t^3-12t^2-13t+18+\frac{\left(6-t\right)^2-28+3t^2}{6-t+\sqrt{28-3t^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(7t+9\right)\left(t^2-3t+2\right)+\frac{4\left(t^2-3t+2\right)}{6-t+\sqrt{28-3t^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t^2-3t+2\right)\left(7t+9+\frac{4}{6-t+\sqrt{28-3t^2}}\right)=0$$

Vì $0\le t\le \frac{2\sqrt{21}}{3}$ nên $7t+9+\frac{4}{6-t+\sqrt{28-3t^2}}>0$.

Do đó ta có: $t^2-3t+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Kết luận: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=1, x=4$.

Bài 5: Giải bất phương trình:

$$31x+34\ge\left(4x^2-x-2\right)\left(2\sqrt{8x+9}-\sqrt{x+2}\right)$$

Điều kiện: $x\ge-\dfrac{9}{8}$. Quan sát biểu thức trên ta thấy nếu nhân liên hợp cho biểu thức $2\sqrt{8x+9}-\sqrt{x+2}$ ta được kết quả $31x+34$. Do đó:

$$31x+34\ge\left(4x^2-x-2\right)\left(2\sqrt{8x+9}-\sqrt{x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 31x+34\ge\left(4x^2-x-2\right)\frac{4\left(8x+9\right)-\left(x+2\right)}{2\sqrt{8x+9}+\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow 31x+34\ge\left(4x^2-x-2\right)\frac{31x+34}{2\sqrt{8x+9}+\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow\left(31x+34\right)\left(2\sqrt{8x+9}+\sqrt{x+2}\right)\ge\left(4x^2-x-2\right)\left(31x+34\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(31x+34\right)\left(4x^2-x-2-2\sqrt{8x+9}-\sqrt{x+2}\right)\le 0$$

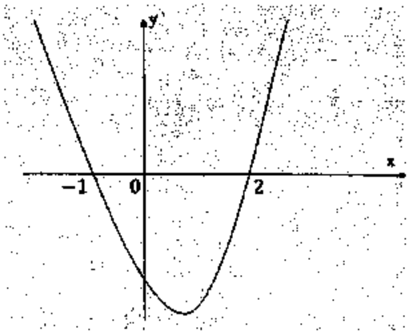
PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng TABLE với:

$f\left(X\right)=4X^2-X-2-\sqrt{X+2}-2\sqrt{8X+9}$

START = -1, END = 5, STEP = 0,5 ta có bảng giá trị như hình bên.

Khi đó ta hình dung được đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây:



X	$f(X)$
-1	0
-0.5	-6.196
0	-9.414
0.5	-10.29
1	-8.978
1.5	-5.535
2	0
2.5	7.6083
3	17.274
3.5	28.989
4	42.744
4.5	58.534
5	76.354

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Với hình dáng đồ thị được minh họa như trên, hàm số có hai nghiệm hữu tỷ đơn là $x=-1, x=2$.

Đặt: $\sqrt{x+2}=ax+b \Rightarrow \begin{cases}-a+b=1\\ 2a+b=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Đặt: $\sqrt{8x+9}=ax+b \Rightarrow \begin{cases}-a+b=1\\ 2a+b=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{4}{3}\\ b=\dfrac{7}{3}\end{cases}$

Liên hợp cần tìm là: $\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right),\left(4x+7-3\sqrt{8x+9}\right)$.

Ta có: $(31x+34)\left(4x^2-x-2-2\sqrt{8x+9}-\sqrt{x+2}\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow (31x+34)\left(12x^2-3x-6-3\sqrt{x+2}-6\sqrt{8x+9}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow 12\left(x^2-x-2\right)+\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+2\left(4x+7-3\sqrt{8x+9}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (31x+34)\left[12\left(x^2-x-2\right)+\frac{(x+4)^2-9(x+2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{2(4x+7)^2-18(8x+9)}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow (31x+34)\left[12\left(x^2-x-2\right)+\frac{\left(x^2-x-2\right)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{32\left(x^2-x-2\right)}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow (31x+34)\left(x^2-x-2\right)\left(12+\frac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{32}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}\right)\le 0$$

Vì $x\ge -\dfrac{9}{8}$ do đó $12+\dfrac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\dfrac{32}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}>0$

Vậy $\begin{cases}\left(x^2-x-2\right)(31x+34)\le 0\\ x\ge -\dfrac{9}{8}\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x\le 2\\ -\dfrac{9}{8}\le x\le -\dfrac{34}{31}\end{array}\right.$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là: $x\in\left[-\dfrac{9}{8};-\dfrac{34}{31}\right]\cup[-1;2]$.

Bài 6: Giải phương trình:

$$\left(x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt[3]{7x-8}+2\right)=2x^3-x^2-25x+25$$

Điều kiện: $x\geq 1$. Quan sát biểu thức trên ta thấy nếu nhân liên hợp cho biểu thức $x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}$ ta được kết quả $2x^3-x^2-25x+25$. Do đó:

$$\left(x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt[3]{7x-8}+2\right)=\left(x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}\right)\left(x\sqrt{2x-1}-5\sqrt{x-1}\right)$$

Vì $x\sqrt{2x-1}+5\sqrt{x-1}>0\forall x\geq 1$ do đó: $\sqrt[3]{7x-8}+2=x\sqrt{2x-1}-5\sqrt{x-1}$.

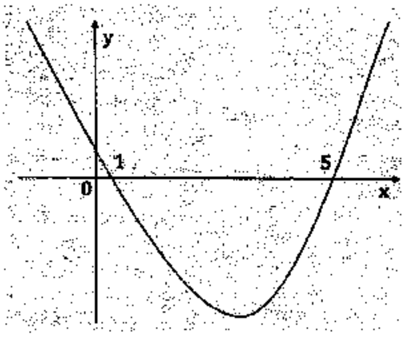
PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng TABLE với:

$f(X)=X\sqrt{2X-1}-2-\sqrt[3]{7X-8}-5\sqrt{X-1}$

START = 1, END = 7, STEP = 0,5 ta có bảng giá trị như hình bên.

Khi đó ta hình dung được đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây:



	$f(X)$
1	0
1.5	−4.771
2	−5.353
2.5	−5.241
3	−4.714
3.5	−3.878
4	−2.791
4.5	−1.49
5	0
5.5	1.6615
6	3.4797
6.5	5.4434
7	7.5431

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Với hình dáng đồ thị được minh họa như trên, hàm số có hai nghiệm hữu tỷ đơn là $x=1, x=5$.

Đặt $\sqrt{x-1}=ax+b \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 5a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Đặt $\sqrt{2x-1}=ax+b \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 5a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Đặt $\sqrt[3]{7x-8}=ax+b \Rightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 5a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

Liên hợp cần tìm là $\left(x-2-\sqrt[3]{7x-8}\right), \left(x+1-2\sqrt{2x-1}\right), \left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)$

Ta có: $\sqrt[3]{7x-8}+2=x\sqrt{2x-1}-5\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{2x-1}-2-\sqrt[3]{7x-8}-5\sqrt{x-1}=0$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{2x-1}-4-2\sqrt[3]{7x-8}-10\sqrt{x-1}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x-2-\sqrt[3]{7x-8}\right)+5\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)-x\left(x+1-2\sqrt{2x-1}\right)+x^2-6x+5=0$

Tuy nhiên để tránh dấu âm trước khi liên hợp ta sửa lại như sau:

$-x\left(x+1-2\sqrt{2x-1}\right)+x^2-6x+5=2x\sqrt{2x-1}-7x+5$. Do đó:

$$2\left(x-2-\sqrt[3]{7x-8}\right)+5\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)-x\left(x+1-2\sqrt{2x-1}\right)+x^2-6x+5=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-2-\sqrt[3]{7x-8}\right)+5\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)+\left(2x\sqrt{2x-1}-7x+5\right)=0$$

Ta có:

$$2\left(x-2-\sqrt[3]{7x-8}\right)=\sqrt{x-1}\left(x-5\right)\frac{2x\sqrt{x-1}}{\left(x-2\right)^2+\left(x-2\right)\sqrt[3]{7x-8}+\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2}$$

và $5\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)=\sqrt{x-1}\left(x-5\right)\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}$,

$$\left(2x\sqrt{2x-1}-7x+5\right)=\sqrt{x-1}\left(x-5\right)\frac{\left(8x-5\right)\sqrt{x-1}}{x+1+2\sqrt{2x-1}}.$$

Chú ý rằng với $x \ge 1$ thì:

$$\frac{2x\sqrt{x-1}}{(x-2)^2+(x-2)\sqrt[3]{7x-8}+\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2}+\frac{5}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{(8x-5)\sqrt{x-1}}{x+1+2\sqrt{2x-1}}>0$$

Do đó ta có: $\sqrt{x-1}(x-5)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=5$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=1$ và $x=5$.

CHỦ ĐỀ 6: NHÂN LIÊN HỢP NGHIỆM HỮU TỶ KÉP

I. Đặt vấn đề.

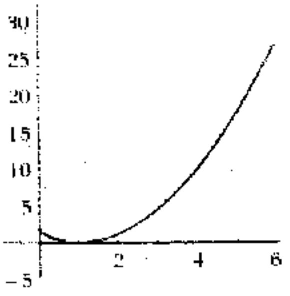
Trong chủ đề trước chúng ta đã đề cập đến phương pháp nhân liên hợp hai nghiệm hữu tỷ đơn. Trong chủ đề này chúng ta đề cập đến bài toán phương trình vô tỷ có nghiệm hữu tỷ kép.

II. Hai cách kiểm tra điều kiện nghiệm kép.

Ví dụ xét phương trình: $x^2-x+2-2\sqrt{x}=0$

Cách 1: Kiểm tra bằng TABLE (Xem chi tiết về TABLE trong Chủ đề 5)

Sử dụng chức năng TABLE, ta sẽ thấy phương trình có nghiệm kép $x=1$.

Nghiệm kép X = 1 $F(X) = X^2 - X + 2 - 2\sqrt{X} = 0$		
TABLE		**ĐỒ THỊ THỰC TẾ**
X	F(X)	
0	2	
0.5	0.3357	
1	0	
1.5	0.3005	
2	1.1715	
2.5	2.5877	
3	4.5358	

Cách 2: Kiểm tra bằng d/dx:

Xét phương trình $x^2-x+2-2\sqrt{x}=0$.

Sử dụng SHIFT CALC với $x=0$ ta thu được nghiệm $x=1$.

Kiểm tra tính chất nghiệm kép bằng cách tính: $\frac{d}{dx}\left(x^2-x+2-2\sqrt{x}\right)\Big|_{x=1}$ ta thu được kết quả là 0.

Chú ý rằng $\frac{d}{dx}\left(x^2-x+2-2\sqrt{x}\right)\Big|_{x=1}$ là thay giá trị $x=1$ vào kết quả của đạo hàm hàm số $f(x)=x^2-x+2-2\sqrt{x}$. Nếu kết quả thu được là 0 có nghĩa giá trị $x=1$ vừa là cực trị, vừa là nghiệm nên đồ thị hàm số sẽ tiếp xúc với trục hoành tại $x=1$ hay còn gọi là nghiệm kép $x=1$.

III. Ba cách giải cho bài toán phương trình, bất phương trình vô tỷ chứa nghiệm kép.

Ví dụ: Giải phương trình: $x^2-x+2-2\sqrt{x}=0$

Cách 1: Tìm liên hợp nghiệm kép

*** Phân tích:**

Phương pháp 1:

Xét $A=\sqrt{x}$. Với $x=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1$. Do đó ta đánh giá:

$$A-1=\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow A-1=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=(x-1)\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Thay $x=1$ vào $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ được kết quả là $\frac{1}{2}$. Do đó:

$$A-1=\frac{x-1}{2} \Rightarrow A=\frac{x+1}{2}$$

Vậy liên hợp cần tìm là: $\left(\frac{x+1}{2}-\sqrt{x}\right)$ hay $\left(x+1-2\sqrt{x}\right)$.

Phương pháp 2:

Đặt $ax+b=\sqrt{x}$ trong đó: $a=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}$ (Tính đạo hàm của $\sqrt{x}$ tại $x=1$ trong đó $x=1$ chính là nghiệm kép của phương trình).

Khi đó phương trình trở thành: $\frac{1}{2}x+b=\sqrt{x} \Rightarrow b=\sqrt{x}-\frac{1}{2}x$

Thay giá trị $x=1$ vào biểu thức trên ta được $b=\frac{1}{2}$.

Như vậy liên hợp cần tìm là: $\left(\frac{x+1}{2}-\sqrt{x}\right)$ hay $\left(x+1-2\sqrt{x}\right)$.

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq 0$.

Ta có: $x^2 - x + 2 - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(x + 1 - 2\sqrt{x}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{(x+1)^2 - 4x}{x+1+2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(1 + \frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}\right) = 0 \ (*)$$

Với $x \geq 0$ ta có: $1 + \frac{1}{x+1+2\sqrt{x}} > 0$ do đó (*) $\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

Cách 2: Tạo hằng đẳng thức

Xét hằng đẳng thức $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Để giải bài toán bằng phương pháp tạo hằng đẳng thức ta cần tập trung vào hai biểu thức a và b có giá trị giống nhau.

Do phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$ nên khi đó $\sqrt{x} = 1$.

Vậy: $2\sqrt{x} = 2.\sqrt{x}.1$. Do đó ta cần tạo hằng đẳng thức như sau:

$x - 2.\sqrt{x}.1 + 1 = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$

Điều kiện: $x \geq 0$.

Ta có: $x^2 - x + 2 - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(x + 1 - 2\sqrt{x}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = 0 \ (*)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0 \ (**)$$

Do đó kết hợp (*) và (**) ta có đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách 3: Đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM.

AM – GM cho 2 số: $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$. Do đó ta sẽ sử dụng bất đẳng thức này với những biểu thức chứa căn bậc 2 và lựa chọn hai đại lượng a, b có giá trị tương đương nhau vì dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

AM – GM cho 3 số: $abc \le \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$ $\forall a,b,c \ge 0$. Do đó ta sẽ sử dụng với những biểu thức chứa căn bậc 3 và lựa chọn 3 đại lượng a,b,c không âm có giá trị tương đương nhau vì dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.
Tương tự như vậy ta có thể đánh giá bất đẳng thức AM – GM cho các căn bậc cao hơn.

Áp dụng:

Do phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$ nên khi đó $\sqrt{x}=1$.

Do đó đánh giá: $\sqrt{x}.1 \le \dfrac{x+1}{2}$

Điều kiện: $x \ge 0$. Xét phương trình: $x^2-x+2=2\sqrt{x}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\sqrt{x}.1 \le \dfrac{x+1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \le x+1$.

Do đó: $x^2-x+2=2\sqrt{x} \le x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0$. Mà $(x-1)^2 \ge 0 \forall x$.

Do đó $(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}$

Đáp số: $x=1$

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9$

Đáp số: $x=3$

Bài 3: Giải phương trình: $\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Đáp số: $x=1$

Bài 4: Giải phương trình: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$

Đáp số: $x=1$

Bài 5: Giải phương trình: $4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$

Đáp số: $x=1$

Bài 6: Giải phương trình: $x^2-8x+10+\dfrac{81}{x+2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{x-1}$

Đáp số: $x=5$

Bài 7: Giải phương trình: $x^4+\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{1-x}$

Đáp số: $x=0$

VII. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}$

Cách 1: Nhân liên hợp nghiệm kép.

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=2$ ta được nghiệm $x=1$.

Kiểm tra tính chất của nghiệm: $\frac{d}{dx}\left(2x+1-2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}\right)\Big|_{x=1}$ ta được kết quả là 0. Như vậy phương trình có nghiệm kép $x=1$.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Xét $A=\sqrt{x}$. Với $x=1\Rightarrow\sqrt{x}=1$. Do đó ta đánh giá:

$$A-1=\sqrt{x}-1\Leftrightarrow A-1=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\left(x-1\right)\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Thay $x=1$ vào $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ được kết quả là $\frac{1}{2}$.

Do đó: $A-1=\frac{x-1}{2}\Rightarrow A=\frac{x+1}{2}$

Vậy liên hợp cần tìm là: $\left(\frac{x+1}{2}-\sqrt{x}\right)$ hay $\left(x+1-2\sqrt{x}\right)$.

Ta tạo liên hợp như trên trước, các biểu thức khác sẽ tiến hành xử lý sau.

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$.

Ta có: $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow 2x+1-2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}=0$

$$\Leftrightarrow\left(x+1-2\sqrt{x}\right)+\left(x-\sqrt{2x-1}\right)=0\Leftrightarrow\frac{\left(x+1\right)^2-4x}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{x^2-\left(2x-1\right)}{x+\sqrt{2x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}}=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2\left(\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}\right)=0\quad(*)$$

Vì $x\ge\frac{1}{2}$ do đó $\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}>0$.

Vậy (*) $\Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 2: Tạo hằng đẳng thức.

Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$.

Ta có: $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 2x+1-2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}=0$

$$\Leftrightarrow 4x+2-4\sqrt{x}-2\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow 2\left(x-2\sqrt{x}+1\right)+\left(2x-1-2\sqrt{2x-1}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=0 \text{ (*)}$$

Vì $\begin{cases}\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \ge 0\\ \left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2 \ge 0\end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2 \ge 0 \text{ (**)}$

Kết hợp (*) và (**) ta có đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{2x-1}=1\end{cases} \Rightarrow x=1$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM.

Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$. Ta có: $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases}2.\sqrt{x}.1 \le x+1\\ \sqrt{2x-1}.1 \le \frac{2x-1+1}{2}=x\end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1} \le 2x+1$$

Do đó $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}$ khi dấu bằng xảy ra: $\begin{cases}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{2x-1}=1\end{cases} \Rightarrow x=1$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9$

Cách 1: Nhân liên hợp nghiệm kép.

PHÂN TÍCH CASIO

Điều kiện của bài toán là $x \in \left[2;4\right]$ do đó ta

X	F(X)

sử dụng công cụ TABLE với:

$$F(X)=X^2+9-\sqrt{9X^3-18X^2}-\sqrt{36X^2-9X^3}$$

START = 2, END = 4, STEP = 0,5 ta được bảng giá trị như hình bên.

2	4.5147
2.5	0.7611
3	0
3.5	0.9655
4	8.0294

Dựa vào bảng giá trị trên ta thấy phương trình có nghiệm kép $x=3$.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Trước tiên ta rút gọn phương trình:

$$\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9\Leftrightarrow 3\sqrt{x^3-2x^2}+3\sqrt{4x^2-x^3}=x^2+9$$

Xét $A=\sqrt{x^3-2x^2}$. Với $x=3\Rightarrow\sqrt{x^3-2x^2}=3$. Do đó ta đánh giá:

$$A-3=\sqrt{x^3-2x^2}-3\Leftrightarrow A-3=\frac{x^3-2x^2-9}{\sqrt{x^3-2x^2}+3}=\frac{(x-3)(x^2+x+3)}{\sqrt{x^3-2x^2}+3}$$

Do đó $A-3=(x-3)\frac{x^2+x+3}{\sqrt{x^3-2x^2}+3}$. Thay $x=3$ vào $\frac{x^2+x+3}{\sqrt{x^3-2x^2}+3}$ được kết quả là $\frac{5}{2}$. Do đó: $A-3=\frac{5}{2}(x-3)\Rightarrow A=\frac{5}{2}x-\frac{9}{2}$.

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(\frac{5}{2}x-\frac{9}{2}-\sqrt{x^3-2x^2}\right)$ hay $\left(2\sqrt{x^3-2x^2}-(5x-9)\right)$.

Ta tạo liên hợp như trên trước, các biểu thức khác sẽ tiến hành xử lý sau.

Điều kiện: Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, do đó:

$$\begin{cases}9x^3-18x^2\ge 0\\36x^2-9x^3\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x-18\ge 0\\36-9x\ge 0\end{cases}\Rightarrow 2\le x\le 4.$$

Ta có:

$$\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9\Leftrightarrow 3\sqrt{x^3-2x^2}+3\sqrt{4x^2-x^3}=x^2+9$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^3-2x^2}+3\sqrt{4x^2-x^3}-x^2-9=0\Leftrightarrow 6\sqrt{x^3-2x^2}+6\sqrt{4x^2-x^3}-2x^2-18=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(2\sqrt{x^3-2x^2}-(5x-9)\right)+6\sqrt{4x^2-x^3}-2x^2+15x-45=0$$

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Việc sử dụng nhân liên hợp của $\left(2\sqrt{x^3-2x^2}-(5x-9)\right)$ là rất rõ ràng, tuy nhiên nếu ta nhân liên hợp cho $\left(6\sqrt{4x^2-x^3}-2x^2+15x-45\right)$ thì nhân tử sẽ rất lớn. Vì vậy sẽ tìm liên hợp nghiệm kép cho $\sqrt{4x^2-x^3}$.

Đặt $B=\sqrt{4x^2-x^3}$. Với $x=3\Rightarrow\sqrt{4x^2-x^3}=3$. Do đó ta đánh giá:

$$B-3=\sqrt{4x^2-x^3}-3\Leftrightarrow B-3=\frac{4x^2-x^3-9}{\sqrt{4x^2-x^3}+3}=\frac{(x-3)\left(-x^2+x+3\right)}{\sqrt{4x^2-x^3}+3}$$

Do đó $B-3=(x-3)\dfrac{-x^2+x+3}{\sqrt{4x^2-x^3}+3}$. Thay $x=3$ vào $\dfrac{-x^2+x+3}{\sqrt{4x^2-x^3}+3}$ được kết quả là $-\dfrac{1}{2}$. Do đó: $B-3=-\dfrac{1}{2}(x-3)\Rightarrow B=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}$.

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}-\sqrt{4x^2-x^3}\right)$ hay $\left(2\sqrt{4x^2-x^3}-(9-x)\right)$.

Ta có: $3\left(2\sqrt{x^3-2x^2}-(5x-9)\right)+6\sqrt{4x^2-x^3}-2x^2+15x-45=0$

$$\Leftrightarrow 3\left(2\sqrt{x^3-2x^2}-(5x-9)\right)+3\left(2\sqrt{4x^2-x^3}-(9-x)\right)-2x^2+12x-18=0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{4\left(x^3-2x^2\right)-(5x-9)^2}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}+3\frac{4\left(4x^2-x^3\right)-(9-x)^2}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}-2(x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{4x^3-33x^2+90x-81}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}+3\frac{-4x^3+15x^2+18x-81}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}-2(x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-3)^2(4x-9)}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}-\frac{3(x-3)^2(4x+9)}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}-2(x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(\frac{3(4x-9)}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}-\frac{3(4x+9)}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(\frac{2x-9-4\sqrt{x^3-2x^2}}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}-\frac{3(4x+9)}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)^2\left(\frac{9-2x+4\sqrt{x^3-2x^2}}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}+\frac{3(4x+9)}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}\right)=0\ (*)$$

Vì $2\le x\le 4$ nên $\begin{cases}9-2x>0\\5x-9>0\\9-x>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{9-2x+4\sqrt{x^3-2x^2}}{2\sqrt{x^3-2x^2}+5x-9}+\dfrac{3(4x+9)}{2\sqrt{4x^2-x^3}+9-x}>0$

Do đó (*) $\Rightarrow(x-3)^2\Rightarrow x=3$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Cách 2: Tạo hằng đẳng thức.

Điều kiện: Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, do đó:

$$\begin{cases}9x^3-18x^2\ge 0\\36x^2-9x^3\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x-18\ge 0\\36-9x\ge 0\end{cases}\Rightarrow 2\le x\le 4.$$

Ta có: $\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9$

$$\Leftrightarrow 18\sqrt{9x^3-18x^2}+18\sqrt{36x^2-9x^3}=18x^2+162$$

$$\Leftrightarrow 18x^2+162-18\sqrt{9x^3-18x^2}-18\sqrt{36x^2-9x^3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(9x^3-18x^2-2.9.\sqrt{9x^3-18x^2}+81\right)+\left(36x^2-9x^3-2.9.\sqrt{36x^2-9x^3}+81\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{9x^3-18x^2}-9\right)^2+\left(\sqrt{36x^2-9x^3}-9\right)^2=0\ (*)$$

Vì $\begin{cases}\left(\sqrt{9x^3-18x^2}-9\right)^2\ge 0\\\left(\sqrt{36x^2-9x^3}-9\right)^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{9x^3-18x^2}-9\right)^2+\left(\sqrt{36x^2-9x^3}-9\right)^2\ge 0\ (**)$

Do đó kết hợp (*) với (**) ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{9x^3-18x^2}=9\\\sqrt{36x^2-9x^3}=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-3)(9x^2+9x+27)=0\\(x-3)(9x^2-9x-27)=0\end{cases}\Rightarrow x=3$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM.

Điều kiện: Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, do đó:

$$\begin{cases}9x^3-18x^2\ge 0\\36x^2-9x^3\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x-18\ge 0\\36-9x\ge 0\end{cases}\Rightarrow 2\le x\le 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{9x^3-18x^2}=x\sqrt{9x-18}\le\dfrac{x^2+9x-18}{2}\\ \sqrt{36x^2-9x^3}=x\sqrt{36-9x}\le\dfrac{x^2+36-9x}{2}\end{cases}$$

Cộng hai vế của hai bất phương trình ta được:

$$\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}\le x^2+9$$

Do đó: $\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9\Leftrightarrow$ đẳng thức xảy ra:

$$\begin{cases}x=\sqrt{9x-18}\\ x=\sqrt{36-9x}\\ 2\le x\le 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-9x+18=0\\ x^2+9x-36=0\Rightarrow x=3\\ 2\le x\le 4\end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 3: Giải phương trình: $\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Cách 1: Nhân biểu thức liên hợp.

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=0$ ta được nghiệm $x=1$.

Kiểm tra tính chất của nghiệm: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}-4-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)\Bigg|_{x=1}$ ta được kết quả là 0. Như vậy phương trình có nghiệm kép $x=1$.

TÌM NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Có hai căn thức trong bài toán nhưng ta sẽ tập trung vào $\sqrt{x^2-x+1}$ vì căn này có biểu thức phức tạp hơn.

Xét $A=\sqrt{x^2-x+1}$. Với $x=1\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}=1$. Do đó ta đánh giá:

$$A-1=\sqrt{x^2-x+1}-1\Leftrightarrow A-1=\frac{x^2-x+1-1}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=(x-1)\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}$$

Thay $x=1$ vào $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+1+1}+1}$ được kết quả là $\dfrac{1}{2}$.

Do đó: $A-1=\dfrac{x-1}{2}\Rightarrow A=\dfrac{x+1}{2}=\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}=2$

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}-2\right)$.

Ta tạo liên hợp như trên trước, các biểu thức khác sẽ tiến hành xử lý sau.

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \Leftrightarrow \dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}-6=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}-2$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}-2\right)=\frac{x+1-2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}} \Leftrightarrow 3\frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{x+1-2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{(x+1)^2-4x}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}=\frac{(x+1)^2-4\left(x^2-x+1\right)}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}=\frac{-3x^2+6x-3}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)^2}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}+\frac{3(x-1)^2}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}\right)=0\ (*)$$

Vì $x>0$ nên $\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}>0$

Do đó (*) $\Rightarrow 3(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM.

Điều kiện: $x>0$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sqrt{x}.1\le\frac{x+1}{2}\Rightarrow\frac{3x+3}{\sqrt{x}}\ge 6\Rightarrow 4+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\ge 6\Rightarrow\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\ge 2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 2\sqrt{x^2-x+1}\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+1)^2\ge 4\left(x^2-x+1\right)\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3(x-1)^2\le 0\\ x>0\end{cases}$$

Vì $(x-1)^2 \ge 0 \forall x$ nên $3(x-1)^2 \le 0 \Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 4: Giải phương trình: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$

Cách 1: Nhân biểu thức liên hợp.

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=0$ ta được nghiệm $x=1$.

Kiểm tra tính chất của nghiệm:

Xét $\frac{d}{dx}\left(x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}-2\sqrt{2x^2+5x+2}+8x+5\right)\Big|_{x=1}$ ta được kết quả là 0. Như vậy phương trình có nghiệm kép $x=1$.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ

Bài toán có hai căn thức, nhưng $(x+1)\sqrt{3x+1}$ có cả căn thức và chứa cả $(x+1)$ ở ngoài nên biểu thức này phức tạp hơn so với $\sqrt{2x^2+5x+2}$.

Vậy ta sẽ tập trung vào phân tích liên hợp cho $\sqrt{3x+1}$ trước.

Xét $A=\sqrt{3x+1}$. Với $x=1 \Rightarrow \sqrt{3x+1}=2$. Do đó ta đánh giá:

$$A-2=\sqrt{3x+1}-2 \Leftrightarrow A-2=\frac{3x+1-4}{\sqrt{3x+1}+2}=(x-1)\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}$$

Thay $x=1$ vào $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}$ được kết quả là $\frac{3}{4}$.

Do đó: $A-2=\frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow A=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

Vậy liên hợp cần tìm là: $\left(\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}-\sqrt{3x+1}\right)$ hay $\left(3x+5-4\sqrt{3x+1}\right)$

Ta tạo liên hợp như trên trước, các biểu thức khác sẽ tiến hành xử lý sau.

Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{3}$

Ta có: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$

$\Leftrightarrow x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}-2\sqrt{2x^2+5x+2}+8x+5=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-4(x+1)\sqrt{3x+1}-4\sqrt{2x^2+5x+2}+16x+10=0$

$\Leftrightarrow \left(3x+5-4\sqrt{3x+1}\right)(x+1)-x^2+8x+5-4\sqrt{2x^2+5x+2}=0$

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Ngoài liên hợp đã tạo là $\left(3x+5-4\sqrt{3x+1}\right)$ thì với nhóm biểu thức còn lại $\left(-x^2+8x+5-4\sqrt{2x^2+5x+2}\right)$ ta nhận thấy rất khó để có thể nhân liên hợp ngay. Vì vậy sử dụng kỹ thuật tìm liên hợp nghiệm kép cho $\sqrt{2x^2+5x+2}$, ta tìm được liên hợp $\left(3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}\right)$.

Do đó: $\left(3x+5-4\sqrt{3x+1}\right)(x+1)-x^2+8x+5-4\sqrt{2x^2+5x+2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(3x+5-4\sqrt{3x+1}\right)(x+1)+2\left(3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}\right)-x^2+2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\frac{(3x+5)^2-16(3x+1)}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+2\frac{(3x+3)^2-4\left(2x^2+5x+2\right)}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}-(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\frac{9(x-1)^2}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+2\frac{(x-1)^2}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}-(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2\left(\frac{9(x+1)}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{2}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2\left(\frac{6x+4-4\sqrt{3x+1}}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{2}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(\frac{3x+2-2\sqrt{3x+1}}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(\frac{(3x+1)-2\sqrt{3x+1}+1}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(\frac{\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}\right)=0\ (*)$$

Với $x\ge-\frac{1}{3}$ ta có $\frac{\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2}{3x+5+4\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{3x+3+2\sqrt{2x^2+5x+2}}>0$

Do đó (*) $\Rightarrow 2(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 2: Tạo hằng đẳng thức.

Ta có: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{3x+1}+3x+1=2\sqrt{(2x+1)(x+2)}-3x-3$

Điều kiện: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\(x+2)(2x+1)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{3}\\(x+2)(2x+1)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{3}\\2x+1\ge 0\end{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}$

Do đó: $x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{3x+1}+3x+1=2\sqrt{(2x+1)(x+2)}-3x-3$

$\Leftrightarrow (x+1)^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}+\left(\sqrt{3x+1}\right)^2+3x+3-2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2+2x+1-2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}+x+2=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2=0$

Vì $\begin{cases}\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2\ge 0\\\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2\ge 0\end{cases}$ do đó $\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2=0\\\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\sqrt{3x+1}\\\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+2}\end{cases}\Rightarrow x=1$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM.

Ta có: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$

$\Leftrightarrow x^2+8x+5=2(x+1)\sqrt{3x+1}+2\sqrt{2x^2+5x+2}$

Điều kiện: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\(x+2)(2x+1)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{3}\\(x+2)(2x+1)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{3}\\2x+1\ge 0\end{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}$

Do đó: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}-2\sqrt{2x^2+5x+2}+8x+5=0$

$\Leftrightarrow x^2+8x+5=2(x+1)\sqrt{3x+1}+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases}2(x+1)\sqrt{3x+1}\le(x+1)^2+3x+1\\2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}\le 2x+1+x+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(x+1)\sqrt{3x+1}\le x^2+5x+2\\2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}\le 3x+3\end{cases}$$

Cộng hai vế của hai bất phương trình ta được:

$$2(x+1)\sqrt{3x+1}+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+2}\le x^2+8x+5\ (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x+1=\sqrt{3x+1}\\\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+1)^2=3x+1\\2x+1=x+2\end{cases}\Rightarrow x=1$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 5: Giải phương trình: $4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$

Cách 1: Nhân biểu thức liên hợp.

PHÂN TÍCH CASIO

Với điều kiện $1\le x\le\frac{9}{5}$ hay $1\le x\le 1,8$, ta sử dụng công cụ SHIFT CALC với $x=1,5$ để thu được nghiệm $x=1$. Nhận thấy rằng nghiệm $x=1$ vừa là điều kiện vừa là nghiệm của $\sqrt{x-1}$, do đó chứng tỏ $\sqrt{x-1}$ được đưa vào không ảnh hưởng đến yếu tố của bài toán. Ta đánh giá để loại bỏ căn này.

Điều kiện: $1\le x\le\frac{9}{5}$.

Ta có: $4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)\ge 4x^2+12$

$$\Rightarrow 4x^2+12-4x\sqrt{5x-1}-4\sqrt{9-5x}\le 0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Phương trình có nghiệm $x=1$, tuy nhiên ta cần kiểm tra tính chất của nghiệm này. Xét $\frac{d}{dx}\left(4x^2+12-4x\sqrt{5x-1}-4\sqrt{9-5x}\right)\Big|_{x=1}$ ta được kết quả là 0. Do đó phương trình cóh ngiệm kép $x=1$.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Bằng kỹ thuật phân tích liên hợp nghiệm kép $x=1$ ta thu được các liên hợp sau: $\left(5x+3-4\sqrt{5x-1}\right)$ và $\left(13-5x-4\sqrt{9-5x}\right)$.

Ta có: $4x^2+12-4x\sqrt{5x-1}-4\sqrt{9-5x}\le 0$

$$\Leftrightarrow x\left(5x+3-4\sqrt{5x-1}\right)+\left(13-5x-4\sqrt{9-5x}\right)-x^2+2x-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow x\frac{(5x+3)^2-16(5x-1)}{5x+3+4\sqrt{5x-1}}+\frac{(13-5x)^2-16(9-5x)}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}-(x-1)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x(x-1)^2}{5x+3+4\sqrt{5x-1}}+\frac{25(x-1)^2}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}-(x-1)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{25x}{5x+3+4\sqrt{5x-1}}+\frac{25}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}-1\right)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{20x-3-4\sqrt{5x-1}}{5x+3+4\sqrt{5x-1}}+\frac{25}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}\right)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{(20x-3)^2-16(5x-1)}{\left(5x+3+4\sqrt{5x-1}\right)\left(20x-3-4\sqrt{5x-1}\right)}+\frac{25}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}\right)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{25(4x-1)^2}{\left(5x+3+4\sqrt{5x-1}\right)\left(20x-3-4\sqrt{5x-1}\right)}+\frac{25}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}\right)^2\le 0$$

Vì $1\le x\le\frac{9}{5}$ ta có: $5x+3>0, 20x-3>0, 13-5x>0$.

Như vậy: $\frac{25(4x-1)^2}{\left(5x+3+4\sqrt{5x-1}\right)\left(20x-3-4\sqrt{5x-1}\right)}+\frac{25}{13-5x+4\sqrt{9-5x}}>0$.

Do đó ta có $(x-1)^2\le 0$. Mặt khác $(x-1)^2\ge 0\forall x$ nên $x=1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 2: Tạo hằng đẳng thức.

Điều kiện: $1\le x\le\frac{9}{5}$.

Ta có: $4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$

$$\Leftrightarrow 4x^2+12+\sqrt{x-1}-4x\sqrt{5x-1}-4\sqrt{9-5x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2-4x\sqrt{5x-1}+5x-1\right)+\left(9-5x-4\sqrt{9-5x}+4\right)+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\left(2x-\sqrt{5x-1}\right)^2+\left(\sqrt{9-5x}-2\right)^2=0 \ (*)$$

Với $1 \le x \le \dfrac{9}{5}$ ta có $\sqrt{x-1} \ge 0, \left(2x-\sqrt{5x-1}\right)^2 \ge 0, \left(\sqrt{9-5x}-2\right)^2 \ge 0$.

Do đó (*) $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=0 \\ \left(2x-\sqrt{5x-1}\right)^2=0 \\ \left(\sqrt{9-5x}-2\right)^2=0 \end{cases} \Rightarrow x=1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM.

Điều kiện: $1 \le x \le \dfrac{9}{5}$.

Ta có: $4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2+12+\sqrt{x-1}=4x\sqrt{5x-1}+4\sqrt{9-5x}=0$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases} 4x\sqrt{5x-1}=2.2x.\sqrt{5x-1} \le 4x^2+5x-1 \\ 4\sqrt{9-5x}=2.2.\sqrt{9-5x} \le 4+9-5x \end{cases}$$

Cộng hai vế của hai bất phương trình trên ta được:

$4x\sqrt{5x-1}+4\sqrt{9-5x} \le 4x^2+12$ (**)

Kết hợp (*) và (**) ta được đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2x=\sqrt{5x-1} \\ 2=\sqrt{9-5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2-5x+1=0 \\ 4=9-5x \end{cases} \Rightarrow x=1$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 6: Giải phương trình: $x^2-8x+10+\dfrac{81}{x+2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{x-1}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=2$ ta được nghiệm $x=5$.

Kiểm tra tính chất nghiệm: $\dfrac{d}{dx}\left(x^2-8x+10+\dfrac{81}{x+2\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x-1}\right)\Bigg|_{x=5}$

ta được kết quả 0. Như vậy phương trình có nghiệm kép $x=5$.

PHÂN TÍCH

Bài toán có chứa căn dưới mẫu nên không đơn giản để xử lý nhân liên hợp ngay lập tức. Vì vậy ta để ý có biểu thức $x^2-8x+10$, ta nên tạo hằng đẳng thức với nghiệm kép $x=5$ trước rồi quy đồng các biểu thức còn lại, sau đó suy tính cách nhân liên hợp sau.

Điều kiện: $x\ge 1$.

Ta có: $x^2-8x+10+\dfrac{81}{x+2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \left(x^2-10x+25\right)+2x-2\sqrt{x-1}-15+\dfrac{81}{x+2\sqrt{x-1}}=0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2+\dfrac{\left(2x-2\sqrt{x-1}-15\right)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)+81}{x+2\sqrt{x-1}}=0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2+\dfrac{2x^2-19x+85+(2x-30)\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}=0$

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Sử dụng kỹ thuật tìm liên hợp nghiệm kép, ta thu được liên hợp cần tìm là $\left(x+3-4\sqrt{x-1}\right)$. Do đó ta nhân 2 vế với 2.

Ta có: $(x-5)^2+\dfrac{2x^2-19x+85+(2x-30)\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}=0$

$\Leftrightarrow 2(x-5)^2+\dfrac{4x^2-38x+170+4(x-15)\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}=0$

$\Leftrightarrow 2(x-5)^2+\dfrac{5x^2-50x+125-(x-15)\left(x+3-4\sqrt{x-1}\right)}{x+2\sqrt{x-1}}=0$

$\Leftrightarrow 2(x-5)^2+\dfrac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\left(5(x-5)^2-(x-15)\dfrac{(x+3)^2-16(x-1)}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2(x-5)^2+\dfrac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\left(5(x-5)^2-\dfrac{(x-15)(x-5)^2}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2\left[2+\dfrac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\left(5-\dfrac{(x-15)}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)\right]=0$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2\left[2+\frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\left(\frac{4x+30+20\sqrt{x-1}}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)\right]=0\ (*)$$

Vì $x\ge 1$ nên $2+\frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\left(\frac{4x+30+20\sqrt{x-1}}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)>0$.

Do đó (*) $\Rightarrow (x-5)^2=0\Rightarrow x=5$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài 7: Giải phương trình: $x^4+\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{1-x}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=0,5$ ta thu được nghiệm $x=0$.

Kiểm tra tính chất của nghiệm $x=0$, ta xét:

$$\frac{d}{dx}\left(x^4+\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}-\sqrt{1-x}\right)\Bigg|_{x=0}$$

Ta được kết quả 0. Như vậy phương trình có nghiệm kép $x=0$.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Sử dụng kỹ thuật liên hợp nghiệm kép ta thu được các liên hợp sau:

$$\left(-\frac{1}{2}x+1-\sqrt{x^2-x+1}\right)\text{ và }\left(-\frac{1}{2}x+1-\sqrt{1-x}\right)$$

Để ý thấy hai giá trị căn $\sqrt{x^2-x+1}$ và $\sqrt{1-x}$ cùng liên hợp với một lượng $-\frac{1}{2}x+1$ giống hệt nhau nên ta xét liên hợp cần tìm là $\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{1-x}$.

Điều kiện: $x\le 1$.

Ta có: $x^4+\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow x^4+\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{1-x}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^4+\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{1-x}\right)+\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}}\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^4+\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^4+\frac{x^2-x+1-(1-x)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{1-x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^4+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}+1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}}\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1+\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}+1}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{1-x}\right)\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}}\right)\le 0 \ (*)$$

Vì $1+\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}+1}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{1-x}\right)\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-x+1}}>0\forall x\le 1$.

Do đó (*) $\Rightarrow x^2\le 0$. Mặt khác $x^2\ge 0\forall x$. Do đó ta có $x=0$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

CHỦ ĐỀ 7: ĐÁNH GIÁ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

I. Đặt vấn đề.

- Phương pháp nâng lũy thừa và nhân liên hợp là những phương pháp rất hay có thể hỗ trợ giải được rất nhiều các bài toán phương trình và bất phương trình vô tỷ. Tuy nhiên bên cạnh đó, chúng ta còn có thể giải các phương trình và bất phương trình bằng cách khảo sát tính đơn điệu của hàm số.
- Trong chủ đề này, chúng ta sẽ đề cập đến phương pháp đánh giá hàm số đơn điệu để kết luận số nghiệm của phương trình thông qua hình dáng của đồ thị hàm số.

II. Kiến thức cơ bản.

- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x)=a$ có tối đa một nghiệm (Trong đó a là hằng số cho trước).

- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và không liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x)=a$ có tối đa $n+1$ nghiệm (Trong đó a là hằng số cho trước và n là số điểm gián đoạn của đồ thị hàm số).
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)\geq f(b)\Leftrightarrow a\geq b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)>f(b)\Leftrightarrow a>b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)\geq f(b)\Leftrightarrow a\leq b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)>f(b)\Leftrightarrow a<b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Việc dự đoán hình dáng của đồ thị hàm số có thể được phân tích bằng chức năng TABLE trong máy tính CASIO.
- Nếu $f(x),g(x)$ cùng đồng biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ và $k(x)=f(x)+g(x)$ là các hàm số đồng biến và liên tục trên D.
- Nếu $f(x),g(x)$ cùng nghịch biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên D còn $k(x)=f(x)+g(x)$ là hàm số nghịch biến và liên tục trên tập xác định D.
- Nếu $f(x)$ đồng biến, dương và $g(x)$ nghịch biến, dương trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ là hàm số nghịch biến và liên tục trên tập xác định D.

III. Ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải phương trình: $x^3+x^2+x+3\sqrt[4]{x+1}=3$

*** Phân tích:**

Với chức năng TABLE trong máy tính CASIO, ta có thể định hướng tốt hơn cho các bài toán phương trình – bất phương trình. Chính vì vậy ta sẽ sử dụng chức năng này để khảo sát phương trình trên.

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f\left(X\right)=X^3+X^2+X+3\sqrt[4]{X+1}-3$

- $\text{START}=-1$
- $\text{END}=3$
- $\text{STEP}=0.5$

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=0$ và hàm số đồng biến trên $\left[-1;+\infty\right)$. Do đó đây chính là nghiệm duy nhất của phương trình.

X	$F\left(X\right)$
-1	-4
-0.5	-0.852
0	0
0.5	1.195
1	3.5676
1.5	7.8973
2	14.498
2.5	25.478
3	40.242

Bài giải:

Điều kiện: $x\geq -1$.

Nhận xét: $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Do đó xét $f\left(x\right)=x^3+x^2+x+3\sqrt[4]{x+1}-3$ trên $\left(-1;+\infty\right)$.

Ta có: $f\left(x\right)=3x^2+2x+1+\dfrac{3}{4\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^3}>0\forall x\in\left(-1;+\infty\right)$.

Do đó hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến và liên tục trên $\left(-1;+\infty\right)$.

Vậy $f\left(x\right)$ có tối đa một nghiệm. Mà $x=0$ là một nghiệm nên đây là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4$

Đáp số: $x=1$.

Bài 2: Giải phương trình: $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

Đáp số: $x=0$.

Bài 3: Giải phương trình:

$$\sqrt{\left(x+2\right)\left(2x-1\right)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{\left(x+6\right)\left(2x-1\right)}+3\sqrt{x+2}$$

Đáp số: $x=7$.

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} - (x-5)\sqrt{x-8} - 3x + 31 = 0$

Đáp số: $x = 9$.

Bài 5: Giải bất phương trình: $\dfrac{x-7}{x-1-2\sqrt{x+2}} \geq \dfrac{2\sqrt{4-x}}{x+1}$

Đáp số: $x \in [-2;-1) \cup [1;4]$

Bài 6: Giải phương trình: $(x-1)\left(2\sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{x+6}\right) = x+6$

Đáp số: $x = 2$.

Bài 7: Giải phương trình: $(4x-1)\left(\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt{x+3}\right) = 4x+8$

Đáp số: $x = -2$, $x = 1$.

VII. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{5x^3-1} + \sqrt[3]{2x-1} + x = 4$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X) = \sqrt{5X^3-1} + \sqrt[3]{2X-1} + X - 4$

- START = 0.5
- END = 4.5
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x = 1$ và hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$.

X	$F(X)$
0.5	ERROR
1	0
1.5	2.7442
2	5.6872
2.5	8.8694
3	12.285
3.5	15.924
4	19.773
4.5	23.821

Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Ta có: $\sqrt{5x^3-1} + \sqrt[3]{2x-1} + x = 4 \Leftrightarrow \sqrt{5x^3-1} + \sqrt[3]{2x-1} + x - 4 = 0$

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{5x^3-1} + \sqrt[3]{2x-1} + x - 4$ trên $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$ có:

$$f'(x) = \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-1}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} + 1 > 0,\ \forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right).$$

Do đó $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $f(1)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Bài 2: Giải phương trình: $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X)=3\left(\sqrt{2X^2+1}-1\right)-X\left(1+3X+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

- START = −2
- END = 2
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=0$ và hàm số nghịch biến.

X	F(X)
−2	44
−1.5	26.928
−1	14.052
−0.5	5.3232
0	0
0.5	−5.474
1	−15.66
1.5	−32.35
2	−56

Điều kiện: Ta có: $\sqrt{2x^2+1}-1=\frac{2x^2+1-1}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}\geq 0$

Do đó: $x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)\geq 0$.

Để đánh giá sát sao điều kiện của phương trình, ta sử dụng TABLE để khảo sát nhóm biểu thức $1+3x+8\sqrt{2x^2+1}$.

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X)=1+3X+8\sqrt{2X^2+1}$

- START = −2
- END = 2
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy rõ ràng rằng biểu thức $1+3x+8\sqrt{2x^2+1}$ luôn nhận giá trị dương. Vậy để dễ dàng tìm điều kiện của

X	F(X)
−2	19
−1.5	15.261
−1	11.856
−0.5	9.2979
0	9
0.5	12.297
1	17.856

x hơn, ta sẽ chứng minh:

$1+3x+8\sqrt{2x^2+1}>0$

1.5	24.261
2	31

Ta có: $8\sqrt{2x^2+1}+3x>8\sqrt{x^2}+3x=8|x|+3x\geq 3|x|+3x\geq 0$

Do đó: $x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)\geq 0\Rightarrow x\geq 0$

Ta có: $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

$\Leftrightarrow 3x^2+x+8x\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{2x^2+1}+3=0$

Xét hàm số: $f(x)=3x^2+x+8x\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{2x^2+1}+3$ trên $\left[0;+\infty\right)$ ta có:

$$f'(x)=6x+1+8\left(\sqrt{2x^2+1}+\frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}}\right)-\frac{6x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=6x+1+\frac{32x^2-6x+8}{\sqrt{2x^2+1}}>0\forall x\geq 0$$

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến và liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 3: Giải phương trình:

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$$

(*Trích đề thi Học sinh giỏi tỉnh Cao Bằng năm 2014 – 2015*)

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X)=\sqrt{(X+2)(2X-1)}-3\sqrt{X+6}-4$

$+\sqrt{(X+6)(2X-1)}-3\sqrt{X+2}$

- START = 0.5
- END = 4.5
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy nhìn thấy

X	$F(X)$
0.5	−16.39
1	−12.75
1.5	−11.3
2	−10.12
2.5	−9.036
3	−8

phương trình có vẻ như vô nghiệm. Nhưng thực tế không phải như vậy, hàm số đang đơn điệu tăng và chúng ta phải xét

tiếp tục để tìm ra nghiệm của phương trình.

- START = 4
- END = 8
- STEP = 0.5

Bây giờ bản chất của phương trình đã xuất hiện rất rõ. Phương trình có một nghiệm duy nhất chính là $x = 7$ đồng thời hàm số đồng biến, do đó đây chính là nghiệm duy nhất của phương trình.

3.5	−6.987
4	−5.987
4.5	−4.993

X	$F(X)$
4	−5.987
4.5	−4.993
5	−4
5.5	−3.005
6	−2.007
6.5	−1.006
7	0
7.5	1.0109
8	2.027

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Nhận xét: $x = \frac{1}{2}$ không phải là nghiệm của phương trình.

Ta có: $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+2}\right) + \left(\sqrt{(x+6)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}\left(\sqrt{2x-1} - 3\right) + \sqrt{x+6}\left(\sqrt{2x-1} - 3\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1} - 3\right)\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}\right) = 4$$

Do $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} > 0,\ \forall x \geq \frac{1}{2}$ và vế phải dương nên $\sqrt{2x-1} - 3 > 0$

Do đó $x > 5$. Vậy ta có

Xét hàm số dương $f(x) = \sqrt{2x-1} - 3$ trên $g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}$ ta có:

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0,\ \forall x \in (5; +\infty)$ nên $f(x)$ là hàm số dương, đồng biến và liên tục trên $(5; +\infty)$ (1)

Xét hàm số dương $g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}$ trên $\left(5;+\infty\right)$ ta có:

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0,\ \forall x \in \left(5;+\infty\right)$ nên $g(x)$ là hàm số dương, đồng biến và trên $\left(5;+\infty\right)$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow h(x) = f(x).g(x) = \left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)$ là hàm số dương, đồng biến và liên tục trên $\left(5;+\infty\right)$.

Do đó phương trình $h\left(x\right) = 4$ có tối đa một nghiệm.

Vì $h(7) = 4$ nên $x = 7$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 7$.

Bình luận: Để giải bài toán trên, học sinh cần ghi nhớ: "Nếu $f\left(x\right), g\left(x\right)$ cùng đồng biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h\left(x\right) = f\left(x\right).g\left(x\right)$ và $k\left(x\right) = f\left(x\right) + g\left(x\right)$ là các hàm số đồng biến và liên tục trên D".

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} - (x-5)\sqrt{x-8} - 3x + 31 = 0$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f\left(X\right) = \sqrt[3]{\left(X-1\right)^2} - 2\sqrt[3]{X-1}$
$-(X-5)\sqrt{X-8} - 3X + 31$

- START = 8
- END = 12
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy nhìn thấy phương trình có một nghiệm duy nhất đó là $x = 9$ đồng thời hàm số nghịch biến, do đó đây chính là nghiệm duy nhất.

X	$F\left(X\right)$
8	6.8334
8.5	2.9418
9	0
9.5	−2.928
10	−5.904
10.5	−8.946
11	−12.05
11.5	−15.24
12	−18.5

Tuy nhiên vấn đề là bài toán có chứa rất nhiều căn thức và khác loại với nhau. Chính vì vậy ta có thể đặt một ẩn phụ để giảm thiểu số căn thức một cách tối đa. Do đó ta định hướng đặt $t = \sqrt[3]{x-1}$.

Điều kiện: $x \ge 8$. Đặt $t = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow x = t^3 + 1 \ge 8 \Rightarrow t \ge \sqrt[3]{7}$.

Khi đó ta có: $\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} - (x-5)\sqrt{x-8} - 3x + 31 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} - 3t^3 + 28 = 0$

$\Leftrightarrow 3t^3 - t^2 + 2t - 28 + (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} = 0$

Nhận xét: $t = \sqrt[3]{7}$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 - t^2 + 2t - 28 + (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7}$ trên $\left(\sqrt[3]{7};+\infty\right)$ ta có:

$$f'(t) = \underbrace{(9t^2 - 2t + 2)}_{>0,\ \forall t} + 3t^2\sqrt[3]{t^3 - 7} + \frac{t^2(t^3 - 4)}{\sqrt[3]{(t^3 - 7)^2}} > 0,\ \forall t \in \left(\sqrt[3]{7};+\infty\right).$$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến và liên tục trên $\left(\sqrt[3]{7};+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f\left(t\right) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $f(2) = 0 \Rightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 9$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 9$.

Bình luận: Đôi lúc trong quá trình làm bài, để xử lý đạo hàm nhanh và gọn hơn ta nên đặt một căn thức nào đó dưới dạng ẩn phụ. Chú ý nên lựa chọn các căn thức của bậc nhất, tránh các bậc cao trong căn.

Bài 5: Giải bất phương trình: $\dfrac{x-7}{x-1-2\sqrt{x+2}} \ge \dfrac{2\sqrt{4-x}}{x+1}$

(*Trích Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – TT. LTĐH Trí Minh, TP HCM*)

Điều kiện:

$$\begin{cases} -2 \le x \le 4 \\ x \ne -1 \\ x - 1 \ne 2\sqrt{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2 \le x < 1 \\ x \ne -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ \left(x-1\right)^2 \ne 4\left(x+2\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2 \le x < 1 \\ x \ne -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ x \ne 7, x \ne -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 4 \\ x \ne -1 \end{cases}$$

Ta có: $\dfrac{x-7}{x-1-2\sqrt{x+2}}\ge\dfrac{2\sqrt{4-x}}{x+1}\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-3^2}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2\sqrt{x+2}-3}\ge\dfrac{2\sqrt{4-x}}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-1}$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(\sqrt{x+2}+3\right)}{\left(\sqrt{x+2}+1\right)\left(\sqrt{x+2}-3\right)}\ge\frac{2\sqrt{4-x}}{\left(\sqrt{x+2}+1\right)\left(\sqrt{x+2}-1\right)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}+3\ge\frac{2\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+2}-1}$$

Với $x=-2$ bất phương trình trở thành: $3\ge-2\sqrt{6}$ (luôn đúng).

Với $x=4$ bất phương trình trở thành: $3+\sqrt{6}\ge0$ (luôn đúng).

Do đó xét bất phương trình trên với $x\in(-2;4)\setminus\{-1\}$.

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=\sqrt{X+2}+3-\frac{2\sqrt{4-X}}{\sqrt{X+2}-1}$$

- START = −2
- END = 2
- STEP = 0.5

X	$F(X)$
−2	7.8989
−1.5	19.721
−1	ERROR
−0.5	−14.65
0	−5.242
0.5	−1.857
1	0
1.5	1.2394
2	2.1715

Từ bảng giá trị này ta thấy hàm số không liên tục và được chia làm hai khoảng lần lượt là $[-2;-1)$ và $(-1;4]$.

Trên mỗi khoảng này hàm số đồng biến và liên tục trên từng khoảng. Tuy nhiên trong $[-2;-1)$ hàm số đồng biến nhưng luôn dương (vô nghiệm) còn trong $(-1;+\infty)$ hàm số đồng biến và có nghiệm duy nhất đó là $x=1$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+2}+3-\dfrac{2\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+2}-1}$ trên $(-2;4)\setminus\{-1\}$ ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{4-x}}\left(\sqrt{x+2}-1\right)+\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-x}}-\frac{1}{\sqrt{4-x}}+\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2}\frac{x+2+4-x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-x}\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2}\frac{6-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-x}\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2}\frac{36-x-2}{\sqrt{4-x}\sqrt{x+2}\left(6+\sqrt{x+2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2}\frac{34-x}{\sqrt{4-x}\sqrt{x+2}\left(6+\sqrt{x+2}\right)}>0\forall x\in\left(-2;4\right)\backslash\left\{-1\right\}$$

Do đó $f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên các khoảng độc lập là $\left[-2;-1\right)$ và $\left(-1;4\right]$.

Với $f\left(1\right)=0$, ta có bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	-2		-1		1		4
$f'(x)$	+		‖	+			
$f\left(x\right)$	$3+2\sqrt{6}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$3+\sqrt{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm bất phương trình $f\left(x\right)\geq 0$ có các tập nghiệm là $x\in\left[-2;-1\right)$ và $x\in\left[1;4\right]$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in \left[-2;-1\right) \cup \left[1;4\right]$.

Bình luận: Đối với hàm số không liên tục, ta không nên quá lo lắng, chỉ cần trên mỗi khoảng độc lập hàm số đơn điệu, ta vẫn có thể giải quyết một cách dễ dàng thông qua đánh giá tính đơn điệu của hàm số.

Bài 6: Giải phương trình: $\left(x-1\right)\left(2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}\right)=x+6$

(Trích đề thi Học sinh giỏi tỉnh Thái Bình năm 2010)

Điều kiện: $x \geq 1$.

Do $x=1$ không là nghiệm của phương trình nên chỉ xét $x \in (1;+\infty)$.

Ta có: $\left(x-1\right)\left(2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}\right)=x+6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}=\dfrac{x+6}{x-1}$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f\left(X\right)=2\sqrt{X-1}+3\sqrt[3]{X+6}-\dfrac{X+6}{X-1}$

- $\text{START}=1$
- $\text{END}=5$
- $\text{STEP}=0.5$

Từ bảng giá trị này ta thấy hàm số đồng biến và phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=2$.

X	$F\left(X\right)$
1	ERROR
1.5	−7.713
2	0
2.5	2.9053
3	4.5686
3.5	5.716
4	6.594
4.5	7.3109
5	7.9219

Xét hàm số $f\left(x\right)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}-\dfrac{x+6}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$ ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x+6}}+\frac{7}{\left(x-1\right)^2}>0,\ \forall x \in (1;+\infty)$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $(1;+\infty)$.

Vậy phương trình $f\left(x\right)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mà $x=2$ là một nghiệm của phương trình. Do đó đây là nghiệm duy nhất.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=2$.

Bài 7: Giải phương trình: $(4x-1)\left(\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt{x+3}\right)=4x+8$

Điều kiện: $x\geq -3$. Do $x=\frac{1}{4}, x=-3$ không phải nghiệm của phương trình.

Do đó ta xét phương trình với điều kiện $x\in(-3;+\infty)\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Ta có: $(4x-1)\left(\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt{x+3}\right)=4x+8$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+5}+\sqrt{x+3}=\frac{4x+8}{4x-1}\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+5}+\sqrt{x+3}-\frac{4x+8}{4x-1}=0$$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=\sqrt[3]{3X+5}+\sqrt{X+3}-\frac{4X+8}{4X-1}=0$$

- START = −3
- END = 2
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy hàm số không liên tục và được chia làm 2 khoảng lần lượt là $\left(-3;\frac{1}{4}\right)$ và $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Trên mỗi khoảng này hàm số đồng biến và liên tục trên từng khoảng.

X	$F(X)$
−3	−1.895
−2.5	−0.831
−2	0
−1.5	2.3041
−1	3.4741
−0.5	5.0994
0	11.442
0.5	−6.262
1	0
1.5	1.4392
2	2.1743

Trong $\left(-3;\frac{1}{4}\right)$ hàm số đồng biến và liên tục, có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Trong $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$ hàm số đồng biến và liên tục, có nghiệm duy nhất $x=1$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt{x+3}-\frac{4x+8}{4x-1}$ trên $x\in(-3;+\infty)\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$ ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}+\frac{36}{(4x-1)^2}>0,\ \forall x\in(-3;+\infty)\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến và liên tục trong từng khoảng độc lập đó là:

$\left(-3;\frac{1}{4}\right)$ và $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Do đó ta có bảng biến thiên như sau:

x	-3		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	+		‖	+	
$f(x)$	$+\infty$	↗ $-\left(\sqrt[3]{4}+\frac{4}{13}\right)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số ta thấy phương trình có tối đa hai nghiệm phân biệt. Mà $x=-2$ và $x=1$ là hai nghiệm của phương trình.

Do đó $x=-2$, $x=1$ là hai nghiệm cần tìm.

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-2$, $x=1$.

CHỦ ĐỀ 8: PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG

I. Đặt vấn đề.

- Trong các bài toán phương trình, bất phương trình và hệ phương trình, có rất nhiều bài toán mà ở đó chúng ta nhìn thấy hai vế của phương trình, bất phương trình có cách biểu diễn "gần giống nhau". Tuy nhiên từ chỗ "gần giống nhau" đó ta chỉ ra được mối quan hệ của các nhóm biểu thức là không phải điều đơn giản.
- Trong chủ đề này chúng ta sẽ tập trung phân tích các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình có tính chất như trên và ta gọi là "Phương pháp hàm đặc trưng".

II. Kiến thức cơ bản.

- Nếu $f(x)$ là hàm số đơn điệu và liên tục trên tập xác định D đồng thời $\begin{cases} f(a)=f(b) \\ a,b\in D \end{cases}$ thì ta có $a=b$.

III. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=x-1+\sqrt{x^2-2x}$

*** Phân tích:**

Đầu tiên, ta cần phải dò tìm một nghiệm của phương trình và quyết định hướng giải bài của phương trình.

Sử dụng công cụ SHIFT CALC với $x=1$ ta được nghiệm $x\approx 2.618033989$. .

Với nghiệm $x\approx 2.618033989$ ta thay vào các giá trị căn thức:

$$\begin{cases}\sqrt{x}\approx 1.618033989\\ \sqrt{x-1}\approx 1.27201965\\ \sqrt{x^2-2x}\approx 1.27201965\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}\approx x-1\\ \sqrt{x-1}\approx\sqrt{x^2-2x}\end{cases}$$

Nhìn qua phương trình chưa có cấu trúc "gần giống nhau", tuy nhiên chú ý với mối quan hệ $\sqrt{x}\approx x-1$. Để hai vế có thể giống hệt nhau ta sẽ đặt ẩn phụ dựa vào mối quan hệ này:

$$\begin{cases}a=\sqrt{x}\\ b=x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=\sqrt{a^2-1}\\ x^2-2x=b^2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=\sqrt{a^2-1}\\ \sqrt{x^2-2x}=\sqrt{b^2-1}\end{cases}$$

Do đó phương trình ban đầu được viết lại thành:

$$a+\sqrt{a^2-1}=b+\sqrt{b^2-1}$$

Đến đây ta sẽ nhận thấy hai vế có cách biểu diễn giống hệt nhau. Vì vậy ta xét hàm đặc trưng $f(t)=t+\sqrt{t^2-1}$.

Chú ý rằng với điều kiện $x\ge 2$ ta có $a,b>0$ vì vậy ta xét hàm đặc trưng với $f(t)=t+\sqrt{t^2-1}$ trong điều kiện $t>0$.

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\ x-1\ge 0\\ x(x-2)\ge 0\end{cases}\Rightarrow x\ge 2$

Nhận xét $x=2$ không phải là nghiệm của phương trình do đó $x>2$.

Đặt $a=\sqrt{x}>\sqrt{2}, b=x-1>1$. Khi đó: $\begin{cases}\sqrt{x-1}=\sqrt{a^2-1}\\ \sqrt{x^2-2x}=\sqrt{b^2-1}\end{cases}$

Do đó phương trình ban đầu được viết lại thành: $a+\sqrt{a^2-1}=b+\sqrt{b^2-1}$ (*)

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t+\sqrt{t^2-1}$ với $t\in(1;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}>0\forall t\in(1;+\infty)$.

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục trên $(1;+\infty)$.

Vậy (*) $\Leftrightarrow f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b$.

Với $a=b$ ta có $x-1=\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=x\\x>2\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

*** Bình luận:**

Trong bài toán này có một chi tiết chúng ta cần phải chú ý đó là việc xét miền xác định cho biến t của hàm số $f(t)$.

Chú ý: Nếu $\begin{cases}a\in D_1\\b\in D_2\end{cases}\Rightarrow a,b\in D_1\cup D_2$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-2y+1=0\\(3-x)\sqrt{2-x}-y\sqrt{8y-4}=0\end{cases}$

*** Phân tích:**

Xét phương trình $(3-x)\sqrt{2-x}-y\sqrt{8y-4}=0\Leftrightarrow(3-x)\sqrt{2-x}=y\sqrt{8y-4}$.

Đây là một phương trình ta nhìn thấy hai vế có nhóm biểu thức được sắp xếp gần giống nhau. Tuy nhiên, để chắc chắn sẽ đưa được về hàm đặc trưng, ta cần đánh giá về mối quan hệ của các biến x,y.

Xét $y=100$, ta có phương trình trở thành: $(3-x)\sqrt{2-x}=100\sqrt{796}$.

SHIFT CALC với $x=1$ ta được nghiệm: $x=-197$.

Để tìm mối quan hệ giữa x,y ta cần liên hệ với cách biểu diễn của -197 với 100: $-197=3-2.100$. Do đó: $x=-197=3-2y$.

Để chắc chắn xuất hiện hai biểu thức giống nhau, ta áp dụng nguyên tắc sau: Nếu $f(x)=g(y)$ thì đặt $a=f(x),b=g(y)$ khi đó ta có $a=b$.

Do đó đặt $3-2y=a$. Ta có $x=a$.

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \le 2 \\ y \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Đặt $a = 3 - 2y$ khi đó ta có: $y = \dfrac{3-a}{2}$. Khi đó:

$$\left(3-x\right)\sqrt{2-x} = y\sqrt{8y-4} \Leftrightarrow \left(3-x\right)\sqrt{2-x} = \frac{3-a}{2}\sqrt{\frac{8\left(3-a\right)}{2}-4}$$

$$\Leftrightarrow \left(3-x\right)\sqrt{2-x} = \frac{3-a}{2}\sqrt{8-4a} \Leftrightarrow \left(3-x\right)\sqrt{2-x} = \left(3-a\right)\sqrt{2-a} \quad (*)$$

Nhận xét:

- $x = 2$ thì $y\sqrt{8y-4} = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$
- $y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(3-x\right)\sqrt{2-x} = 0 \Rightarrow x = 2$
- Với $x = 2, y = \dfrac{1}{2}$ thay vào phương trình 1 ta có: $8 - 1 + 1 = 0$ (Vô lý)

Vậy $x < 2, y > \dfrac{1}{2}$. Do đó $x < 2, a < 2$.

Xét hàm đặc trưng $f\left(t\right) = \left(3-t\right)\sqrt{2-t}$ với $t \in \left(-\infty; 2\right)$.

Ta có: $f'\left(t\right) = -\sqrt{2-t} - \dfrac{3-t}{2\sqrt{2-t}} < 0 \forall t \in \left(-\infty; 2\right)$.

Do đó $f\left(t\right)$ là hàm nghịch biến và liên tục với $t \in \left(-\infty; 2\right)$.

Vậy (*) $\Leftrightarrow f\left(x\right) = f\left(a\right) \Leftrightarrow x = a = 3 - 2y$.

Thay $2y = 3 - x$ vào phương trình 1 ta được:

$$x^3 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow x^3 - \left(3-x\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2 + x + 2\right) = 0$$

Vì $x^2 + x + 2 > 0 \forall x$ do đó $x = 1$ (Thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow y = 1$.

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$

(*Trích đề thi HSG các trường chuyên Duyên Hải Đồng Bằng Bắc Bộ 2010*)

Đáp số: $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài 2: Giải phương trình: $24x^2 - 60x + 36 - \frac{1}{\sqrt{5x - 7}} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}} = 0$

(*Trích đề thi Học sinh giỏi tỉnh Quảng Ninh 2011*)

Đáp số: $x = \frac{3}{2}$.

Bài 3: Giải phương trình: $(9x + 1)\sqrt{9x - 1} = 8x^3 - 12x^2 + 10x - 3$

Đáp số: $x = \frac{13 + \sqrt{137}}{8}$

Bài 4: Giải phương trình: $x\left(4x^2 + 1\right) + (x - 3)\sqrt{5 - 2x} = 0$

(*Trích đề thi thử Đại học khối A 2013 – THPT Tuy Phước*)

Đáp số: $x = \frac{\sqrt{21} - 1}{4}$

Bài 5: Giải bất phương trình: $\sqrt{x} \geq \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x}$

Đáp số: $x \in \left(0; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right]$

Bài 6: Giải phương trình: $1 + \frac{\sqrt{x + 3}}{1 + \sqrt{1 - x}} = x + \frac{\sqrt{2x + 2}}{1 + \sqrt{2 - 2x}}$

Đáp số: $x = 1$

Bài 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x + \sqrt{y - x}} + \sqrt{y - x} = x^3 \\ x^4 + 3x + \sqrt{\sqrt{y - x} - x^3 + x^2 + 4x} = x\sqrt{y - x} + 6 \end{cases}$$

Đáp số: $x = y = 1$

VII. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $2x^3-x^2+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=3x+1+\sqrt[3]{x^2+2}$

(Trích đề thi HSG các trường chuyên Duyên Hải Đồng Bằng Bắc Bộ 2010)

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=1$ ta thu được nghiệm $x\approx-0.618033988$.

Thay $x\approx-0.618033988$ vào các căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{2x^3-3x+1}\approx1.33550398\\ \sqrt[3]{x^2+2}\approx1.33550398\end{cases}\Rightarrow\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=\sqrt[3]{x^2+2}$$

Do đó để xuất hiện hàm đặc trưng, ta đặt: $a=\sqrt[3]{2x^3-3x+1},b=\sqrt[3]{x^2+2}$

Ta có: $2x^3-x^2+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=3x+1+\sqrt[3]{x^2+2}$

$\Leftrightarrow2x^3-3x+1+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=x^2+2+\sqrt[3]{x^2+2}$ (*)

Đặt $a=\sqrt[3]{2x^3-3x+1},b=\sqrt[3]{x^2+2}$, khi đó:

(*) $\Rightarrow a^3+a=b^3+b$. Do đó xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0\forall t\in\mathbb{R}$

Vậy $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

Vì vậy $a^3+a=b^3+b\Leftrightarrow f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b$.

Với $a=b$ ta có: $\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=\sqrt[3]{x^2+2}\Leftrightarrow2x^3-3x+1=x^2+2$

$\Leftrightarrow2x^3-x^2-3x-1=0\Leftrightarrow(2x+1)(x^2-x-1)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\vee x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$.

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt là $x=-\dfrac{1}{2}\vee x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$.

*** Bình luận:**

Cách 2: Bên cạnh việc giải bằng cách đặt ẩn phụ, ta có thể giải phương trình trên bằng phương pháp hàm đặc trưng mà không cần nhất thiết đặt ẩn phụ như sau:

Ta có: $2x^3-x^2+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=3x+1+\sqrt[3]{x^2+2}$

$\Leftrightarrow2x^3-3x+1+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=x^2+2+\sqrt[3]{x^2+2}$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2x^3-3x+1}\right)^3+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=\left(\sqrt[3]{x^2+2}\right)^3+\sqrt[3]{x^2+2}\ (*)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0\forall t\in\mathbb{R}$

Vậy $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

Vì vậy (*) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{2x^3-3x+1}\right)=f\left(\sqrt[3]{x^2+2}\right)\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=\sqrt[3]{x^2+2}$

$$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-3x-1=0\Leftrightarrow(2x+1)\left(x^2-x-1\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\vee x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là: $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Chú ý: Từ các bài 2 trở đi, ta có thể giải bài toán bằng phương pháp hàm đặc trưng nhưng bỏ qua bước đặt ẩn phụ. Điều này sẽ giúp khả năng tư duy giải phương trình tốt hơn.

Cách 3: Bên cạnh việc sử dụng hàm đặc trưng, ta cũng có thể giải bài toán bằng phương pháp nhân liên hợp:

Đặt $a=\sqrt[3]{2x^3-3x+1}, b=\sqrt[3]{x^2+2}$, ta có:

$$2x^3-x^2+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=3x+1+\sqrt[3]{x^2+2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-3x-1+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}-\sqrt[3]{x^2+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^3-x^2-3x-1\right)+\frac{\left(2x^3-3x+1\right)-\left(x^2+2\right)}{a^2+ab+b^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^3-x^2-3x-1\right)+\frac{2x^3-x^2-3x-1}{a^2+ab+b^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^3-x^2-3x-1\right)\left(1+\frac{1}{a^2+ab+b^2}\right)=0$$

Vì $1+\frac{1}{a^2+ab+b^2}>0$ do đó:

$$2x^3-x^2-3x-1=0\Leftrightarrow(2x+1)\left(x^2-x-1\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\vee x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là: $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 2: Giải phương trình: $24x^2-60x+36-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0$

(Trích đề thi Học sinh giỏi tỉnh Quảng Ninh 2011)

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=2$ ta thu được nghiệm $x=\frac{3}{2}$.

Thay $x=\frac{3}{2}$ vào các căn thức ta được:

$\sqrt{5x-7}=\sqrt{x-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vấn đề mấu chốt của bài toán là làm sao có thể tách được nhóm biểu thức: $24x^2-60x+36$ theo các biến $(5x-7)$ và $(x-1)$.

Phương pháp 1:

Xét $24x^2-60x+36=12(2x-3)(x-1)=\left[(5x-6)-x\right]\left[(5x-6)+x\right]$

Do đó: $24x^2-60x+36=(5x-6)^2-x^2=\left[(5x-7)+1\right]^2-\left[(x-1)+1\right]^2$

$\Leftrightarrow 24x^2-60x+36=(5x-7)^2+2(5x-7)-(x-1)^2-2(x-1)$

Phương pháp 2:

Đặt: $24x^2-60x+36=a(5x-7)^2+b(5x-7)-a(x-1)^2-b(x-1)$

Thay $x=1$ ta có: $0=4a-2b$

Thay $x=2$ ta có: $12=8a+2b$

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2a-b=0\\4a+b=6\end{cases}\Rightarrow a=1,b=2$.

Do đó: $24x^2-60x+36=(5x-7)^2+2(5x-7)-(x-1)^2-2(x-1)$

Cách 1: Sử dụng hàm đặc trưng.

Điều kiện: $x>\frac{7}{5}$.

Ta có: $24x^2-60x+36-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0$

$\Leftrightarrow (5x-7)^2+2(5x-7)-(x-1)^2-2(x-1)-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0$

$$\Leftrightarrow (5x-7)^2+2(5x-7)-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}=(x-1)^2+2(x-1)-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t^2+2t-\frac{1}{\sqrt{t}}$ với $t\in(0;+\infty)$

Ta có: $f'(t)=2t+2+\frac{1}{2t\sqrt{t}}>0\forall t\in(0;+\infty)$.

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục với $t\in(0;+\infty)$.

Vậy $(5x-7)^2+2(5x-7)-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}=(x-1)^2+2(x-1)-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$\Leftrightarrow f(5x-7)=f(x-1)\Leftrightarrow 5x-7=x-1\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{2}\cdot$

Cách 2: Nhân biểu thức liên hợp.

Điều kiện: $x>\frac{7}{5}\cdot$

Ta có: $24x^2-60x+36-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0$

$$\Leftrightarrow 24x^2-60x+36+\frac{\sqrt{5x-7}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{5x-7}\sqrt{x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow 12(2x-3)(x-1)+\frac{(5x-7)-(x-1)}{\left(\sqrt{5x-7}+\sqrt{x-1}\right)\sqrt{5x-7}\sqrt{x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow 12(2x-3)(x-1)+\frac{4x-6}{\left(\sqrt{5x-7}+\sqrt{x-1}\right)\sqrt{5x-7}\sqrt{x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\left(12(x-1)+\frac{2}{\left(\sqrt{5x-7}+\sqrt{x-1}\right)\sqrt{5x-7}\sqrt{x-1}}\right)=0\ (*)$$

Vì $x>\frac{7}{5}$ nên $12(x-1)+\frac{2}{\left(\sqrt{5x-7}+\sqrt{x-1}\right)\sqrt{5x-7}\sqrt{x-1}}>0$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{2}\cdot$

Bài 3: Giải phương trình: $(9x+1)\sqrt{9x-1}=8x^3-12x^2+10x-3$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=2$ ta thu được nghiệm $x\approx 3.088087489$.

Thay $x\approx 3.088087489$ vào căn thức ta được:

$\sqrt{9x-1}\approx 5.176174978\approx 2x-1$

Vì vậy ta sẽ biến đổi hai vế để được một hàm đặc trưng $f(t)$ mà tại đó:

$f\left(\sqrt{9x-1}\right)=f(2x-1)$

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{9}$.

Ta có: $(9x+1)\sqrt{9x-1}=8x^3-12x^2+10x-3$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{9x-1}\right)^3+2\sqrt{9x-1}=(2x-1)^3+2(2x-1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó $\left(\sqrt{9x-1}\right)^3+2\sqrt{9x-1}=(2x-1)^3+2(2x-1)$

$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{9x-1}\right)=f(2x-1)$

Với $2x-1=\sqrt{9x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\(2x-1)^2=9x-1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{13+\sqrt{137}}{8}$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm là $x=\frac{13+\sqrt{137}}{8}$.

Bài 4: Giải phương trình: $x\left(4x^2+1\right)+(x-3)\sqrt{5-2x}=0$

(Trích đề thi thử Đại học khối A 2013 – THPT Tuy Phước)

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=2$ ta thu được nghiệm $x\approx 0.895643923$.

Thay $x\approx 0.895643923$ vào căn thức ta được:

$\sqrt{5-2x}\approx 1.791287847\approx 2x$

Vì vậy ta sẽ biến đổi hai vế để được một hàm đặc trưng $f(t)$ mà tại đó:

$f\left(\sqrt{5-2x}\right)=f(2x)$

Điều kiện: $x \le \frac{5}{2}$.

Ta có: $x\left(4x^2+1\right)+\left(x-3\right)\sqrt{5-2x}=0$

$$\Leftrightarrow x\left(4x^2+1\right)=\left(3-x\right)\sqrt{5-2x}=0 \Leftrightarrow 2x\left(4x^2+1\right)=\left(6-2x\right)\sqrt{5-2x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x\right)^3+2x=\left(\sqrt{5-2x}\right)^3+\sqrt{5-2x}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t$.

Do đó hàm số $f\left(t\right)$ luôn đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó $\left(2x\right)^3+2x=\left(\sqrt{5-2x}\right)^3+\sqrt{5-2x} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{5-2x}\right)=f\left(2x\right)$

Với $2x=\sqrt{5-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{5}{2} \\ 4x^2=5-2x \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{21}-1}{4}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình đã cho là $x=\frac{\sqrt{21}-1}{4}$.

Bài 5: Giải bất phương trình: $\sqrt{x} \ge \frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-2x^2+2x}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=2$ ta thu được nghiệm $x \approx 2.618033989$.

Thay $x \approx 2.618033989$ vào căn thức ta được:

$\sqrt{x} \approx 1.618033989 \approx x-1$

Vì vậy ta sẽ biến đổi hai vế để được một hàm đặc trưng $f\left(t\right)$ mà tại đó:

$f\left(\sqrt{x}\right)=f\left(x-1\right)$

Điều kiện: $x>0$.

Khi đó: $\sqrt{x} \ge \frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-2x^2+2x} \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge \frac{\left(x+1\right)\left(x^3-3x^2+3x-1\right)}{x\left(x^2-2x+2\right)}$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} \ge \frac{(x+1)(x-1)^3}{\left(x-1\right)^2+1} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1} \ge \frac{\left(x-1\right)^3}{\left(x-1\right)^2+1}$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^3}{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\dfrac{t^4+3t^2}{t^2+1}\geq 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}\geq\dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^2+1}\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x}\right)\geq f(x-1)\Leftrightarrow\sqrt{x}\geq x-1$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}-1\leq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases}x>0\\0\leq x\leq\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Rightarrow 0<x\leq\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là: $x\in\left(0;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Bài 6: Giải phương trình: $1+\dfrac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{1-x}}=x+\dfrac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{2-2x}}$

PHÂN TÍCH CASIO

SHIFT CALC với $x=1$ ta thu được nghiệm $x=1$.

Thay $x=1$ vào căn thức ta được:

$\begin{cases}\sqrt{1-x}=\sqrt{2-2x}=0\\\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+2}=2\end{cases}$

Chú ý rằng: $\begin{cases}1-x=4-(x+3)\\2-2x=4-(2x+2)\\x-1=(2x+2)-(x+3)\end{cases}$

Vì vậy ta sẽ biến đổi hai vế để được một hàm đặc trưng $f(t)$ mà tại đó:

$f(x+3)=f(2x+2)$

Cách 1: Sử dụng hàm đặc trưng.

Điều kiện: $-1\leq x\leq 1$

Ta có: $1+\dfrac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{1-x}}=x+\dfrac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{2-2x}}$

$\Leftrightarrow x+3+\dfrac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{1-x}}=2x+2+\dfrac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{2-2x}}$

$$\Leftrightarrow x+3+\frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{4-(x+3)}}=2x+2+\frac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{4-(2x+2)}}$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t+\frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{4-t}}$ với $t\in[0;4]$.

Ta có: $f'(t)=1+\left(\frac{1+\sqrt{4-t}}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{4-t}}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt{4-t}\right)^2}>0,\ \forall t\in(0;4)$.

Vậy $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục với $t\in[0;4]$.

Vậy $x+3+\frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{4-(x+3)}}=2x+2+\frac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{4-(2x+2)}}$

$\Leftrightarrow f(x+3)=f(2x+2)\Leftrightarrow x+3=2x+2\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 2: Sử dụng nhân liên hợp.

Điều kiện: $-1\le x\le 1$

Ta có: $1+\frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{1-x}}=x+\frac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{2-2x}}\Leftrightarrow x-1+\frac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{2-2x}}-\frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{1-x}}=0$

$$\Leftrightarrow x-1+\frac{\sqrt{2x+2}\left(1+\sqrt{1-x}\right)-\sqrt{x+3}\left(1+\sqrt{2-2x}\right)}{\left(1+\sqrt{2-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow x-1+\frac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}\sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x}\sqrt{x+3}}{\left(1+\sqrt{2-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow x-1+\frac{\frac{x-1}{\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3}}+\sqrt{1-x}\left(\sqrt{2x+2}-\sqrt{2x+6}\right)}{\left(1+\sqrt{2-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow 1-x+\frac{\frac{1-x}{\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3}}+\sqrt{1-x}\left(\sqrt{2x+6}-\sqrt{2x+2}\right)}{\left(1+\sqrt{2-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow 1-x+\frac{\frac{1-x}{\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3}}+\frac{4\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+6}+\sqrt{2x+2}}}{\left(1+\sqrt{2-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}+\frac{\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3}}+\dfrac{4}{\sqrt{2x+6}+\sqrt{2x+2}}}{\left(1+\sqrt{2-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)=0\ (*)$$

Vì $\sqrt{1-x}+\dfrac{\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3}}+\dfrac{4}{\sqrt{2x+6}+\sqrt{2x+2}}}{\left(1+\sqrt{2-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}>0$

Do đó (*) $\Rightarrow \sqrt{1-x}=0 \Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}+\sqrt{y-x}=x^3\\ x^4+3x+\sqrt{\sqrt{y-x}-x^3+x^2+4x}=x\sqrt{y-x}+6\end{cases}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Đặt $x=100$, phương trình 1 trở thành:

$$\sqrt[3]{100+\sqrt{y-100}}+\sqrt{y-100}=1000000$$

SHIFT CALC với $y=100$ ta thu được nghiệm $y=9.998000101.10^{11}$.

Nghiệm này trong máy tính đang là nghiệm rất lớn và không thể hiện được nghiệm. Vì vậy ta truy tìm nghiệm như sau:

$$y=9.998000101.10^{11}\Rightarrow y-9.10^{11}=9.98000101.10^{10}$$

$$\Rightarrow y-9.10^{11}-9.10^{10}=9800010100\Rightarrow y=999800010100$$

$$\Rightarrow y=9998.10^{8}+10000+100=\left(10000-2\right).100^{4}+10000+100$$

$$\Rightarrow y=\left(x^2-2\right)x^4+x^2+x$$

$$\Rightarrow y-x=x^6-2x^4+x^2=\left(x^3-x\right)^2\Rightarrow\sqrt{y-x}=x^3-x$$

Do đó đến đây ta nhận thấy: $\begin{cases}x+\sqrt{y-x}=x^3\\ \sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}=x\end{cases}$

Vậy để xuất hiện các biểu thức trên, ta cộng thêm x ở hai vế của phương trình

1 và đặt hàm đặc trưng $f(t)$ để đưa về dạng:

$$f(x)=f\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}\right)$$

Điều kiện: $y \ge x$.

Cộng thêm x ở 2 vế của phương trình 1 ta được:

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}+\sqrt{y-x}=x^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}+x+\sqrt{y-x}=x^3+x$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0$ với mọi giá trị $t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục với $t\in\mathbb{R}$.

Vì vậy $\sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}+x+\sqrt{y-x}=x^3+x \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}\right)=f(x)$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+\sqrt{y-x}}=x \Leftrightarrow x+\sqrt{y-x}=x^3 \Leftrightarrow \sqrt{y-x}=x^3-x.$$

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$x^4+3x+\sqrt{x^3-x-x^3+x^2+4x}-x\left(x^3-x\right)-6=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+3x-4\right)+\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)+\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+3\right)=0$$

Do đó $\sqrt{x^2+3x}=2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+3x=4 \\ x^3-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow \sqrt{y-1}=0 \Rightarrow y=1$

Kết luận: Hệ phương trình có một cặp nghiệm duy nhất $x=y=1$.

CHỦ ĐỀ 9: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP NHÂN LIÊN HỢP NGHIỆM HỮU TỶ ĐƠN

I. Đặt vấn đề.

- Trong các chủ đề trước, chúng ta tập trung chủ yếu vào các bài toán nhân liên hợp giải phương trình và bất phương trình. Nhưng bên cạnh đó, phương pháp nhân liên hợp cũng rất hữu ích khi sử dụng trong bài toán giải hệ phương trình.
- Trong các chủ đề 9 – 10 – 11, chúng ta sẽ tập trung vào phương pháp nhân liên hợp giải hệ phương trình.

II. Ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+1+\sqrt{x^2+2x}=y+\sqrt{y^2-1} \\ 4x^3+x=y\sqrt{2y-1} \end{cases}$

*** Phân tích:**

Bài toán này có thể giải được bằng phương pháp hàm đặc trưng, tuy nhiên không phải bài toán nào cũng có thể sắp xếp thành hai vế có "cách biểu diễn" giống nhau, chính vì vậy, chúng ta sẽ đề cập đến một phương pháp giải mới đó là nhân liên hợp trong hệ phương trình.

Để bắt đầu định hướng cho bài toán, chúng ta sẽ xét phương trình số 1. Đặt $y=100$, phương trình trở thành: $x+1+\sqrt{x^2+2x}=100+\sqrt{9999}$.

SHIFT CALC với $x=1$ ta được nghiệm $x=99$.

Chú ý rằng $99=100-1$ và $y=100$ nên ta có mối quan hệ $x=y-1$.

Thay $x=y-1$ vào căn thức ta được $\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{(y-1)^2+2(y-1)}=\sqrt{y^2-1}$

do đó nhân tử cần liên hợp là $\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{y^2-1}\right)$.

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} y\ge 1 \\ x\ge 0 \vee x\le -2 \\ 4x^3+x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 1 \\ x\ge 0 \vee x\le -2 \\ x\left(4x^2+1\right)\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 1 \end{cases}$

Nhận thấy $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Do đó $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{y^2 - 1} > 0$.

Ta có: $x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x} = y + \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow x + 1 - y + \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{y^2 - 1} = 0$

$$\Leftrightarrow x + 1 - y + \frac{\left(x^2 + 2x\right) - \left(y^2 - 1\right)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{y^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow x + 1 - y + \frac{\left(x + 1\right)^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{y^2 - 1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 - y + \frac{\left(x + 1 - y\right)\left(x + 1 + y\right)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{y^2 - 1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + 1 - y\right)\left(1 + \frac{x + 1 + y}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{y^2 - 1}}\right) = 0 \ (*)$$

Vì $1 + \dfrac{x + 1 + y}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{y^2 - 1}} > 0$ do đó (*) $\Rightarrow y = x + 1$

Thay $y = x + 1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$4x^3 + x = y\sqrt{2y - 1} \Leftrightarrow 4x^3 + x = \left(x + 1\right)\sqrt{2\left(x + 1\right) - 1}$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + x = \left(x + 1\right)\sqrt{2x + 1}$$

Đến đây ta tiếp tục sử dụng máy tính CASIO để định hướng cách giải:

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$F\left(X\right) = 4X^3 + X - \left(X + 1\right)\sqrt{2X + 1}$

- START = 0.
- END = 5.
- STEP = 0.5.

Dựa vào bảng giá trị TABLE ta nhận thấy phương trình có một nghiệm duy nhất nằm trong khoảng $\left(0.5; 1\right)$ nhưng hàm số không phải hàm đơn điệu.

Sử dụng SHIFT CALC với $x = 0.8$ ta có nghiệm $x \approx 0.809016994$.

X	$F\left(X\right)$
0	−1
0.5	−1.121
1	1.5358
1.5	10
2	27.291
2.5	56 426
3	100.41
3.5	162.27
4	245
4.5	51.6
5	485.1

Thay nghiệm $x \approx 0.809016994$ vào căn thức ta được:

$\sqrt{2x+1} \approx 1.618033989 \approx 2x$

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(2x - \sqrt{2x+1}\right)$.

Ta có: $4x^3 + x = (x+1)\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 2x^2 - x + (x+1)\left(2x - \sqrt{2x+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4x^2 - 2x - 1\right) + (x+1)\left(2x - \sqrt{2x+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(2x - \sqrt{2x+1}\right)\left(2x + \sqrt{2x+1}\right) + (x+1)\left(2x - \sqrt{2x+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \sqrt{2x+1}\right)\left(2x^2 + x\sqrt{2x+1}\right) + (x+1)\left(2x - \sqrt{2x+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \sqrt{2x+1}\right)\left(2x^2 + x + 1 + x\sqrt{2x+1}\right) = 0 \quad (*)$$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 + x\sqrt{2x+1} > 0$.

Do đó (*) $\Rightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{2x+1} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

Với $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ ta có $y = x + 1 = x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} + 1 = \dfrac{\sqrt{5}+5}{4}$.

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}, y = \dfrac{\sqrt{5}+5}{4}$.

III. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 17} = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{y + 21} + 1 = 2\sqrt{4y - 3x} \end{cases}$

Đáp số: $x = 0, y = 4$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} - \sqrt{2y} = 2y^2 \\ x^2 + \sqrt[3]{y^4 - x^2} = 2y + 1 \end{cases}$

Đáp số: $x = y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 3: Giải phương trình: $\begin{cases} \sqrt{6x^2 + 1} = \sqrt{y - 1} + y^2 \\ \sqrt{6y^2 + 1} = \sqrt{x - 1} + x^2 \end{cases}$

Đáp số: $x = y = 2$

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2\\ \sqrt{y^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2\end{cases}$

Đáp số: $x=y=3$

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2-5xy-y^2=1\\ y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right)=1\end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT Quốc Gia trên diễn đàn K2pi lần 1 – 2015)

Đáp số: $x=3, y=1.$

IV. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1}\\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1=2\sqrt{4y-3x}\end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Đặt $y=100$ ta có phương trình 1 trở thành:

$x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=100+\sqrt{10001}$

SHIFT CALC với $x=1$ ta có nghiệm $x=96=100-4=y-4.$

Thay $x=y-4$ vào căn thức ta có:

$\sqrt{x^2+8x+17}=\sqrt{(y-4)^2+8(y-4)+17}=\sqrt{y^2+1}$

Vậy liên hợp cần tạo ra là $\left(\sqrt{x^2+8x+17}-\sqrt{y^2+1}\right)$

Điều kiện: $y\ge 0.$

Ta có: $x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1}$

$$\Leftrightarrow (x+4-y)+\left(\sqrt{x^2+8x+17}-\sqrt{y^2+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4-y)+\frac{\left(x^2+8x+17\right)-\left(y^2+1\right)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4-y)+\frac{\left(x^2+8x+16\right)-y^2}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4-y)+\frac{(x+4)^2-y^2}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4-y)+\frac{(x+4-y)(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4-y)\left(1+\frac{x+4+y}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4-y)\frac{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}+x+4+y}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0 \ (*)$$

Vì $y \geq 0$ nên $\sqrt{y^2+1}+y \geq 1 > 0$.

Và $\sqrt{x^2+8x+17}+x+4=\sqrt{(x+4)^2+1}+x+4>|x+4|+x+4 \geq 0$.

Như vậy $\dfrac{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}+x+4+y}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}>0$.

Do đó (*) $\Rightarrow y=x+4$. Thay $y=x+4$ vào phương trình hai ta có:

$x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1=2\sqrt{4y-3x} \Rightarrow x+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+25}+1=2\sqrt{x+16}$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$F(X)=X+\sqrt{X+4}+\sqrt{X+25}+1-2\sqrt{X+16}$

- START = −4
- END = 6
- STEP = 1

Dựa vào bảng giá trị TABLE ta nhận thấy phương trình có một nghiệm duy nhất đó là $x=0$ và đồng thời hàm số đồng biến. Như vậy ta có thể xử lý với một trong hai cách sau:

- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.
- Sử dụng phương pháp liên hợp.

X	$F(X)$
−4	−5.345
−3	−3.52
−2	− .273
−1	−1.114
0	0
1	1.0888
2	2.1603
3	3.2194
4	4.2693
5	5.312
6	6.3492

Cách 1: Phương pháp đánh giá tính đơn điệu của hàm số.

Nhận xét $x=-4$ không phải nghiệm của phương trình.

Xét hàm số: $f(x)=x+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+25}+1-2\sqrt{x+16}$ với $x\in(-4;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{2\sqrt{x+25}}-\frac{1}{\sqrt{x+16}}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{2\sqrt{x+25}}+\frac{\sqrt{x+16}-1}{\sqrt{x+16}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{2\sqrt{x+25}}+\frac{x+15}{\left(\sqrt{x+16}+1\right)\sqrt{x+16}}>0\forall x\in(-4;+\infty).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục với $x\in(-4;+\infty)$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm với $x\in(-4;+\infty)$.

Mặt khác $x=0$ là một nghiệm của phương trình do đó đây chính là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.

Với $x=0$ ta có $y=x+4=4$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0,y=4$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp nhân liên hợp.

Điều kiện: $x\geq -4$.

Ta có: $x+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+25}+1=2\sqrt{x+16}$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+4}-2\right)+\left(\sqrt{x+25}-5\right)+\left(x+8-2\sqrt{x+16}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+4-4}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{x+25-25}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{(x+8)^2-4(x+16)}{x+8+2\sqrt{x+16}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{x}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{x^2+16x+64-4x-64}{x+8+2\sqrt{x+16}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{x}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{x^2+12x}{x+8+2\sqrt{x+16}}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}}\right)=0\ (*)$$

Với $x\geq -4$ ta có $\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}}>0.$

Do đó (*) $\Rightarrow x=0$ (Thỏa mãn điều kiện).

Với $x=0$ ta có $y=x+4=4$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0, y=4$.

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y)+\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}=2y^2 \\ x^2+\sqrt[3]{y^4-x^2}=2y+1 \end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Đặt $y=100$ ta có phương trình 1 trở thành:

$x(x+100)+\sqrt{x+100}-10\sqrt{2}=20000$

SHIFT CALC với $x=1$ ta có nghiệm $x=100=y$.

Thay $x=y$ vào căn thức ta có: $\sqrt{x+y}=\sqrt{2y}$

Vậy liên hợp cần tạo ra là $\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}\right)$

Điều kiện: $y\geq 0,\ x+y\geq 0$

Chú ý rằng $x=y=0$ không phải nghiệm của hệ phương trình do đó:

$$x(x+y)+\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}=2y^2 \Leftrightarrow x^2+xy-2y^2+\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)(x-y)+\frac{x+y-2y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x+2y+\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}\right)=0$$

Vì $y\geq 0,\ x+y\geq 0$ do đó $x+2y+\dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}>0$.

Vì vậy ta có $x=y$. Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$x^2+\sqrt[3]{y^4-x^2}=2y+1 \Leftrightarrow x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$F(X)=X^2+\sqrt[3]{X^4-X^2}-2X-1$

- START $=-5$
- END $=5$
- STEP $=1$

X	$F(X)$
-5	42.434
-4	29.214
-3	18.16
-2	9.2894

Dựa vào bảng giá trị TABLE ta nhận thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt nằm giữa các khoảng $(-1;0)$ và $(1;2)$.

SHIFT CALC với $x=-0.5$ ta thu được nghiệm $x\approx -0.618033988$.

SHIFT CALC với $x=1.5$ ta thu được nghiệm $x\approx 1.618033989$.

-1	2
0	-1
1	-2
2	1.2894
3	6.1601
4	13.214
5	22.434

Thay $x\approx 1.618033989$ vào căn thức ta được: $\sqrt[3]{x^4-x^2}\approx 1.618033989\approx x$

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(\sqrt[3]{x^4-x^2}-x\right)$.

Ta có: $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1 \Leftrightarrow x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}-2x-1=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)+\left(\sqrt[3]{x^4-x^2}-x\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)+\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[3]{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)+\sqrt[3]{x^2}\frac{x^2-x-1}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(1+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}\right)=0$$

$$\text{Vì } 1+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x=y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{6x^2+1}=\sqrt{y-1}+y^2 \\ \sqrt{6y^2+1}=\sqrt{x-1}+x^2 \end{cases}$

Điều kiện: $x,y\geq 1$.

Đây là hệ phương trình đối xứng, chúng ta trừ hai phương trình cho nhau:

$$\begin{cases} \sqrt{6x^2+1}=\sqrt{y-1}+y^2 \\ \sqrt{6y^2+1}=\sqrt{x-1}+x^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{6x^2+1}-\sqrt{6y^2+1}=\left(\sqrt{y-1}+y^2\right)-\left(\sqrt{x-1}+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{6x^2+1}-\sqrt{6y^2+1}\right)+\left(x^2-y^2\right)+\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(6x^2+1\right)-\left(6y^2+1\right)}{\sqrt{6x^2+1}+\sqrt{6y^2+1}}+\left(x-y\right)\left(x+y\right)+\frac{\left(x-1\right)-\left(y-1\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x-y\right)\left(x+y\right)}{\sqrt{6x^2+1}+\sqrt{6y^2+1}}+\left(x-y\right)\left(x+y\right)+\frac{x-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(\frac{x+y}{\sqrt{6x^2+1}+\sqrt{6y^2+1}}+x+y+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}\right)=0\ (*)$$

Vì $x,y\ge 1$ nên $\frac{x+y}{\sqrt{6x^2+1}+\sqrt{6y^2+1}}+x+y+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}>0$

Do đó $(*)\Rightarrow x=y$. Thay $x=y$ vào phương trình một ta được:

$$\sqrt{6x^2+1}=\sqrt{y-1}+y^2\Leftrightarrow\sqrt{6x^2+1}=\sqrt{x-1}+x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{6x^2+1}=0$$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$F\left(X\right)=X^2+\sqrt{X-1}-\sqrt{6X^2+1}$

- START $=1$
- END $=6$
- STEP $=0.5$

Dựa vào bảng giá trị TABLE ta nhận thấy phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=2$ đồng thời hàm số đồng biến và liên tục trong $\left[1;+\infty\right)$.

Do đó bài toán có thể giải với các định hướng như sau:

- Sử dụng nhân liên hợp.
- Đánh giá tính đơn điệu của hàm số chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

X	$F\left(X\right)$
1	−1.645
1.5	−0.85
2	0
2.5	1.2699
3	2.998
3.5	5.1998
4	7.8831
4.5	11.052
5	14.711
5.5	18.862
6	23.505

Cách 1: Nhân liên hợp.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Ta có: $x^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{6x^2+1}=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{6x^2+1}-5\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{6x^2+1-25}{\sqrt{6x^2+1}+5}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{6(x-2)(x+2)}{\sqrt{6x^2+1}+5}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+2+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{6(x+2)}{\sqrt{6x^2+1}+5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+(x+2)\left(1-\frac{6}{\sqrt{6x^2+1}+5}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+(x+2)\frac{\sqrt{6x^2+1}-1}{\sqrt{6x^2+1}+5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{6x^2(x+2)}{\left(\sqrt{6x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{6x^2+1}+5\right)}\right)=0 \quad (*)$$

Vì $x \geq 1$ do đó $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{6x^2(x+2)}{\left(\sqrt{6x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{6x^2+1}+5\right)}>0$.

Vậy $(*) \Rightarrow x=2$ (Thỏa mãn điều kiện). Khi đó $y=x=2$.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm $x=y=2$.

Cách 2: Nhân liên hợp.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Ta có: $x^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{6x^2+1}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(x^2+1-\sqrt{6x^2+1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\left(x^2+1\right)^2-\left(6x^2+1\right)}{x^2+1+\sqrt{6x^2+1}}=0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x^4-4x^2}{x^2+1+\sqrt{6x^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x^2(x-2)(x+2)}{x^2+1+\sqrt{6x^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x^2(x+2)}{x^2+1+\sqrt{6x^2+1}}\right)=0 \ (*)$$

Vì $x \ge 1$ nên $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x^2(x+2)}{x^2+1+\sqrt{6x^2+1}}>0.$

Vậy (*) $\Rightarrow x=2$ (Thỏa mãn điều kiện). Khi đó $y=x=2.$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm $x=y=2.$

Cách 3: Sử dụng đánh giá hàm đơn điệu.

Điều kiện: $x \ge 1.$

Nhận xét: $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình. Do đó $x \in (1;+\infty).$

Xét $f(x)=x^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{6x^2+1}$ với $x \in (1;+\infty).$

Ta có: $f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{6x}{\sqrt{6x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x)=2x\left(1-\frac{3}{\sqrt{6x^2+1}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=2x\left(\frac{\sqrt{6x^2+1}-2}{\sqrt{6x^2+1}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x(6x^2-3)}{\sqrt{6x^2+1}\left(\sqrt{6x^2+1}+2\right)}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>0 \forall x \in (1;+\infty)$$

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục với $x \in (1;+\infty).$

Mặt khác $x=2$ là một nghiệm của phương trình $f(x)=0,$ do đó đây chính là nghiệm duy nhất. Với $x=2$ ta có $y=x=2.$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm $x=y=2.$

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2\\ \sqrt{y^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2\end{cases}$

Điều kiện: $x,y \ge 2.$

Đây là hệ phương trình đối xứng, chúng ta trừ hai phương trình cho nhau:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2\\ \sqrt{y^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x^2+91}-\sqrt{y^2+91}=\sqrt{y-2}-\sqrt{x-2}+y^2-x^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+91}-\sqrt{y^2+91}\right)+\left(x^2-y^2\right)+\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{y-2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2+91\right)-\left(y^2+91\right)}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+(x-y)(x+y)+\frac{(x-2)-(y-2)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+(x-y)(x+y)+\frac{x-y}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+x+y+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}\right)=0\ (*)$$

Vì $x,y\geq 2$ nên $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+x+y+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}>0$.

Do đó $(*)\Rightarrow x=y$. Thay $x=y$ vào phương trình một ta được:

$$\sqrt{x^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2\Rightarrow x^2+\sqrt{x-2}-\sqrt{x^2+91}=0$$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$F(X)=X^2+\sqrt{X-2}-\sqrt{X^2+91}$

- START = 2
- END = 7
- STEP = 0.5

Dựa vào bảng giá trị TABLE ta nhận thấy phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=3$ đồng thời hàm số đồng biến và liên tục trong $[2;+\infty)$.

X	$F(X)$
2	−5.746
2.5	−2.904
3	0
3.5	3.3135
4	7.0701
4.5	11.283
5	15.961
5.5	21.109
6	26.73
6.5	32.827
7	39.403

o đó bài toán có thể giải với các định hướng như sau:

Sử dụng nhân liên hợp.

Đánh giá tính đơn điệu của hàm số chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Cách 1: Nhân liên hợp.

Điều kiện: $x \ge 2$.

Ta có: $x^2+\sqrt{x-2}-\sqrt{x^2+91}=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-9\right)+\left(\sqrt{x-2}-1\right)-\left(\sqrt{x^2+91}-10\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-9\right)+\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{x^2+91-100}{\sqrt{x^2+91}+10}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)+\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x^2+91}+10}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x+3+\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left((x+3)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+91}+10}\right)+\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left((x+3)\frac{\sqrt{x^2+91}+9}{\sqrt{x^2+91}+10}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right)=0 \ (*)$$

Vì $x \ge 2$ do đó $(x+3)\frac{\sqrt{x^2+91}+9}{\sqrt{x^2+91}+10}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}>0$

Vậy $(*) \Rightarrow x=3$. Khi đó $y=x=3$.

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x=y=3$.

Cách 2: Nhân liên hợp.

Điều kiện: $x \ge 2$.

Ta có: $x^2+\sqrt{x-2}-\sqrt{x^2+91}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(x^2+1-\sqrt{x^2+91}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2+91\right)}{x^2+1+\sqrt{x^2+91}}=0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+1+\sqrt{x^2+91}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x+3}{x^2+1+\sqrt{x^2+91}}\right)=0 \ (*)$$

Vì $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{x+3}{x^2+1+\sqrt{x^2+91}}>0$ do $x\ge 2$

Vậy (*) $\Rightarrow x=3$. Khi đó $y=x=3$.

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x=y=3$.

Cách 3: Sử dụng đánh giá bằng hàm đặc trưng.

Điều kiện: $x\ge 2$.

Nhận xét: $x=2$ không phải là nghiệm của phương trình. Vậy $x\in(2;+\infty)$.

Xét $f(x)=x^2+\sqrt{x-2}-\sqrt{x^2+91}$ với $x\in(2;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+91}}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=x\left(2-\frac{1}{\sqrt{x^2+91}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\Leftrightarrow f'(x)=x\left(\frac{2\sqrt{x^2+91}-1}{\sqrt{x^2+91}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x\left(4x^2+363\right)}{\left(2\sqrt{x^2+91}+1\right)\sqrt{x^2+91}}+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}>0\forall x\in(2;+\infty)$$

Do đó $f(x)$ đồng biến và liên tục với $x\in(2;+\infty)$.

Mặt khác $x=3$ là một nghiệm của phương trình $f(x)=0$ do đó đây chính là nghiệm duy nhất. Với $x=3$ ta có $y=x=3$.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm $x=y=3$.

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2-5xy-y^2=1\\ y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right)=1\end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT Quốc Gia trên diễn đàn K2pi lần 1 - 2015)

Điều kiện: $y>0$. Ta có:

$$\begin{cases}2x^2-5xy-y^2=1\\ y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right)=1\end{cases}\Rightarrow 2x^2-5xy-y^2=y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right)$$

Hai vế là hai phương trình có cùng bậc hai nên ta chia hai vế cho y^2:

$$2x^2-5xy-y^2=y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right)$$

$\Rightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)-1=\sqrt{\frac{x}{y}-2}+\sqrt{4-\frac{x}{y}}$. Đặt $\frac{x}{y}=t$, phương trình trở thành:

$$2t^2-5t-1=\sqrt{t-2}+\sqrt{4-t}$$

Để giải phương trình trên ta định hướng các phương pháp như sau:

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$F(X)=2X^2-5X-1-\sqrt{X-2}-\sqrt{4-X}$

- START = 2
- END = 4
- STEP = 0.5

X	$F(X)$
2	−4.414
2.5	−2.931
3	0
3.5	4.0681
4	5.5857

Dựa vào bảng giá trị TABLE ta nhận thấy phương trình có nghiệm duy nhất đó là $t=3$.

Do đó bài toán có thể giải với định hướng như sau sử dụng nhân liên hợp.

Cách 1: Sử dụng nhân liên hợp.

Điều kiện: $2\le t\le 4$.

$$2t^2-5t-1=\sqrt{t-2}+\sqrt{4-t}\Leftrightarrow 2t^2-5t-1-\sqrt{t-2}-\sqrt{4-t}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2t^2-5t-3\right)-\left(\sqrt{t-2}-1\right)+\left(1-\sqrt{4-t}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(t-3)(2t+1)-\frac{t-3}{\sqrt{t-2}+1}+\frac{t-3}{1+\sqrt{4-t}}=0$$

$$\Leftrightarrow(t-3)\left(2t+1-\frac{1}{\sqrt{t-2}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{4-t}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(t-3)\left(2t+\left(1-\frac{1}{\sqrt{t-2}+1}\right)+\frac{1}{1+\sqrt{4-t}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(t-3)\left(2t+\frac{\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{4-t}}\right)=0\ (*)$$

Vì $2 \le t \le 4$ nên $2t + \frac{\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-t}} > 0$.

Do đó (*) $\Rightarrow t = 3$ hay $x = 3y$.

Với $x = 3y$ thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$$2x^2 - 5xy - y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 18y^2 - 15y^2 - y^2 = 1 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 3$$

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x = 3, y = 1$.

Cách 2: Sử dụng nhân liên hợp.

Điều kiện: $2 \le t \le 4$.

$$2t^2 - 5t - 1 = \sqrt{t-2} + \sqrt{4-t} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t - 1 - \sqrt{t-2} - \sqrt{4-t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2t^2 - 6t\right) + \left(t - 2 - \sqrt{t-2}\right) + \left(1 - \sqrt{4-t}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t\left(t-3\right) + \sqrt{t-2}\left(\sqrt{t-2} - 1\right) + \frac{t-3}{1+\sqrt{4-t}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t\left(t-3\right) + \sqrt{t-2}\frac{t-3}{\sqrt{t-2}+1} + \frac{t-3}{1+\sqrt{4-t}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t-3\right)\left(2t + \frac{\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-t}}\right) = 0 \quad (*)$$

Vì $2 \le t \le 4$ nên $2t + \frac{\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-t}} > 0$.

Do đó (*) $\Rightarrow t = 3$ hay $x = 3y$.

Với $x = 3y$ thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$$2x^2 - 5xy - y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 18y^2 - 15y^2 - y^2 = 1 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 3$$

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x = 3, y = 1$.

CHỦ ĐỀ 10: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP NHÂN LIÊN HỢP HAI BIẾN HỮU TỶ

I. Đặt vấn đề.

- Trong chủ đề trước chúng ta đã đề cập đến cách giải hệ phương trình bằng phương pháp nhân liên hợp. Phương pháp này giúp chúng ta tiếp cận được những bài toán hệ phương trình vô tỷ dễ dàng hơn. Tuy nhiên trong chủ đề trước, các hệ phương trình chỉ chứa một mối quan hệ nhất định của x và y

  Chúng ta đặt ra một câu hỏi rằng liệu có hay không hệ phương trình mà tại đó có nhiều hơn một mối quan hệ x,y?
- Trong chủ đề này chúng ta sẽ tiếp cận cách giải các bài toán về hệ phương trình mà tại đó có hai mối quan hệ của x,y độc lập với nhau.

II. Ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}\\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3}\end{cases}$

(Trích đề tuyển sinh Đại học Khối B – 2014)

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình 1. Đặt $x=100$ ta được:

$(1-y)\sqrt{100-y}+98+(y-99)\sqrt{y}=0$

SHIFT CALC với $y=100$ ta được nghiệm $y=1$.

Xét phương trình $\dfrac{(1-y)\sqrt{100-y}+98+(y-99)\sqrt{y}}{y-1}=0$, sử dụng SHIFT CALC với $y=100$ ta được nghiệm $y=99$.

Vậy phương trình 1 có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=99=100-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=x-1\end{array}\right.$

Nhận thấy trong nhân tử $(1-y)\sqrt{x-y}$ đã có sẵn nhân tử $(1-y)$ do đó để có nhân tử $(x-y-1)$, ta sử dụng liên hợp $\left(\sqrt{x-y}-1\right)$.

Trong nhân tử $(x-y-1)\sqrt{y}$ đã có sẵn nhân tử $(x-y-1)$ do đó để có nhân từ $(y-1)$, ta sử dụng liên hợp $\left(\sqrt{y}-1\right)$.

Vậy các nhân tử liên hợp cần tìm là $\left(\sqrt{x-y}-1\right)$ và $\left(\sqrt{y}-1\right)$.

Điều kiện: $x \ge 2y \ge 0$.

Ta có: $(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow (1-y)\left(\sqrt{x-y}-1\right)=(x-y-1)\left(\sqrt{y}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow (1-y)\frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}+1}=(x-y-1)\frac{y-1}{\sqrt{y}+1}$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\frac{y-1}{\sqrt{y}+1}+(y-1)\frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)(y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{x-y}+1}\right)=0$$

Do đó $x=y+1$ hoặc $y=1$ vì $\frac{1}{\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{x-y}+1}>0$.

Với $y=1$, thay vào phương trình 2 ta được:

$9-3x=2\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8} \Leftrightarrow 9-3x=0 \Leftrightarrow x=3$

Với $x=y+1$ thay vào phương trình 2 ta được:

$2y^2+3y-2=2\sqrt{1-y}-\sqrt{1-y} \Leftrightarrow 2y^2+3y-2-\sqrt{1-y}=0$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X)=2X^2+3X-2-\sqrt{1-X}$

- START = -3
- END = 1
- STEP = 0.5

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có các nghiệm nằm trong các khoảng $(-2.5;-2)$ và $(0.5;1)$.

X	$F(X)$
-3	5
-2.5	1.1291
-2	-1.732
-1.5	-3.581
-1	-4.414
-0.5	-4.224
0	-3
0.5	-0.707
1	3

Xét $2y^2+3y-2-\sqrt{1-y}=0$

Sử dụng SHIFT CALC với $y=-2.3$ ta được nghiệm $y \approx -2.322875656$

Sử dụng SHIFT CALC với $y = 0.8$ ta được nghiệm $y \approx 0.618033988$.

Tuy nhiên trong phương trình 1, ta có điều kiện $y \geq 0$ nên nghiệm duy nhất của phương trình chính là $y \approx 0.618033988$ và khi sử dụng nhân liên hợp nghiệm vô tỷ ta phải kết hợp với điều kiện $y \geq 0$.

Thay $y \approx 0.618033988$ vào căn thức ta được: $\sqrt{1-y} \approx 0.6180339887 \approx y$.

Vậy liên hợp cần tìm là: $\left(y - \sqrt{1-y}\right)$.

Ta có: $2y^2 + 3y - 2 - \sqrt{1-y} = 0 \Leftrightarrow \left(2y^2 + 2y - 2\right) + \left(y - \sqrt{1-y}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(y^2 + y - 1\right) + \left(y - \sqrt{1-y}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(y^2 - (1-y)\right) + \left(y - \sqrt{1-y}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(y - \sqrt{1-y}\right)\left(y + \sqrt{1-y}\right) + \left(y - \sqrt{1-y}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(y - \sqrt{1-y}\right)\left(2y + 2\sqrt{1-y} + 1\right) = 0$ (*)

Vì $y \geq 0$ nên $2y + 2\sqrt{1-y} + 1 > 0$ do đó (*) $\Rightarrow y = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$

Do đó $y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x = y + 1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Kết luận: Hệ phương trình có hai cặp nghiệm đó là:

$$(x;y) \in \left\{(3;1); \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right\}$$

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x+y} + x + 3y = 6 + (x+y-4)\sqrt{y} \\ \sqrt{x-2y} - \sqrt{x+1} = \dfrac{5}{x-y-7} \end{cases}$

Đáp số: $x = 3, y = 1$

Bài 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 5x + 2 = 3y(x+1) + (2x-y+1)\sqrt{y-x} \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y} \end{cases}$$

Đáp số: $(x;y) \in \{(0;1);(1;2)\}$

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x-y}+\sqrt{3y}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\ x^2+2x+\sqrt{y^2-x}=3y+2\end{cases}$

Đáp số: $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

Bài 4: Giải phương trình: $\begin{cases}\sqrt{xy}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{8x-y+5}\\ \sqrt{8x-y+5}+\sqrt{x+y-1}=3\sqrt{x}+2\end{cases}$

Đáp số: $(x;y)=(1;4)$

Bài 5: Giải phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^4-x^2y^2+4y^4}+\sqrt{x^4+20x^2y^2+4y^4}=7xy\\ x^2-xy+y^2=1\end{cases}$

Đáp số: $(x;y)\in\left\{(1;1),(-1;-1),\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}};\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

VII. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x+y}+x+3y=6+(x+y-4)\sqrt{y}\\ \sqrt{x-2y}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{x-y-7}\end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình 1. Đặt $x=100$ ta được:

$(1-y)\sqrt{100+y}+3y+94-(y+96)\sqrt{y}=0$

SHIFT CALC với $y=100$ ta được nghiệm $y=1$.

Xét phương trình $\dfrac{(1-y)\sqrt{100+y}+3y+94-(y+96)\sqrt{y}}{y-1}=0$, sử dụng SHIFT CALC với $y=100$ ta thu được kết quả là CAN'T SOLVE.

Tuy nhiên nhận thấy rằng $\sqrt{x+y}$ vẫn chưa có liên hợp nào cần tìm do đó ta chuyển hướng đặt lại $y=100$ cho phương trình 1 ta được:

$-99\sqrt{x+100}+x+300-6-10(x+96)=0$

SHIFT CALC với $x=100$ ta được nghiệm $x=-96$.

Vậy phương trình 1 có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} y=1 \\ x=-96=4-100 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ x+y-4=0 \end{array}\right.$

Nhận thấy trong nhân tử $(1-y)\sqrt{x+y}$ đã có sẵn nhân tử $(1-y)$ do đó để có nhân tử $(x+y-4)$, ta sử dụng liên hợp $\left(\sqrt{x+y}-2\right)$.

Trong nhân tử $(x+y-4)\sqrt{y}$ đã có sẵn nhân tử $(x+y-4)$ do đó để có nhân tử $(y-1)$, ta sử dụng liên hợp $\left(\sqrt{y}-1\right)$.

Vậy các nhân tử liên hợp cần tìm là $\left(\sqrt{x+y}-2\right)$ và $\left(\sqrt{y}-1\right)$.

Điều kiện: $x \ge 2y \ge 0$.

Ta có: $(1-y)\sqrt{x+y}+x+3y=6+(x+y-4)\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow x+3y-6=(x+y-4)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x+y}$

$\Leftrightarrow (x+y-4)\left(\sqrt{y}-1\right)+(y-1)\left(\sqrt{x+y}-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)\frac{y-1}{\sqrt{y}+1}+(y-1)\frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)(y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+y}+2}\right)=0$$

Do đó ta có $y=4-x$ hoặc $y=1$ vì $\frac{1}{\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+y}+2}>0$.

Với $y=1$ thay vào phương trình 2 ta được: $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=\frac{5}{x-8}$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X)=\sqrt{X-2}-\sqrt{X+1}-\frac{5}{X-8}$

- START = 2
- END = 10
- STEP = 1

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=3$ nhưng khi $x>10$ phương trình có dấu hiệu còn nghiệm vì trong đoạn này hàm số đang tăng.

X	$F(X)$
2	−0.898
3	0
4	0.4281
5	0.9492
6	1.8542
7	4.4076
8	ERROR
9	−5.516
10	−2.988

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=\sqrt{X-2}-\sqrt{X+1}-\frac{5}{X-8}$$

- START = 11
- END = 10
- STEP = 1

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất là, còn lại trong khoảng $(8;+\infty)$ hàm số đồng biến nhưng không có nghiệm.

X	$F(X)$
11	-2.13
12	-1.693
13	-1.425
14	-1.242
15	-1.108
16	-1.006
17	-0.925
18	-0.858
19	-0.803

Do vậy định hướng giải bài là xét tính đơn điệu và vẽ bảng biến thiên từ đó đánh giá số nghiệm của phương trình.

Xét $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}-\frac{5}{x-8}$ với $x\in[2;+\infty)\setminus\{8\}$.

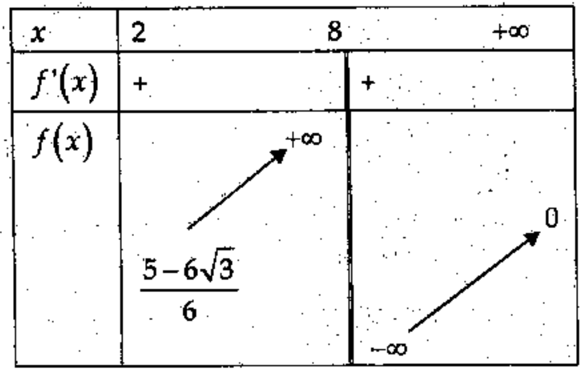
Ta có $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{5}{(x-8)^2}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}}+\frac{5}{(x-8)^2}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{(x+1)-(x-2)}{2\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}+\frac{5}{(x-8)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}+\frac{5}{(x-8)^2}>0\forall x\in[2;+\infty)\setminus\{8\}$$

Do đó hàm số đồng biến nhưng liên tục trên hai khoảng độc lập đó là các khoảng $[2;8)$ và $(8;+\infty)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số như sau:



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số như trên, ta thấy trong $\left[2;8\right)$ phương trình có một nghiệm duy nhất, đó chính là $x=3$. Còn trong khoảng $\left(8;+\infty\right)$ phương trình vô nghiệm.

Với $y=4-x$ thay vào phương trình hai ta được:

$$\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}=\frac{5}{2x-11}$$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f\left(X\right)=\sqrt{3X-8}-\sqrt{X+1}=\frac{5}{2X-11}$

- START = 3
- END = 9
- STEP = 0.5

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=3$ và $x=8$ nằm trong hai khoảng độc lập của hàm số là $\left[\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)$ và $\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$.

Do đó định hướng giải bài là xét tính đơn điệu của hàm số từ đó đánh giá số nghiệm của phương trình.

X	$F\left(X\right)$
3	0
3.5	0.7098
4	1.4305
4.5	2.5
5	5.1962
5.5	ERROR
6	−4.483
6.5	−1847
7	−0.889
7.5	−0.357
8	0
8.5	0.2677
9	0.4823

Xét $f\left(x\right)=\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\frac{5}{2x-11}$ với $x\in\left[\frac{8}{3};+\infty\right)\setminus\left\{\frac{11}{2}\right\}$.

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{3}{2\sqrt{3x-8}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{10}{\left(2x-11\right)^2}=\frac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-8}}{2\sqrt{3x-8}\sqrt{x+1}}+\frac{10}{\left(2x-11\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\frac{6x+17}{2\sqrt{3x-8}\sqrt{x+1}\left(3\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-8}\right)}+\frac{10}{\left(2x-11\right)^2}$$

Vì $\frac{6x+17}{2\sqrt{3x-8}\sqrt{x+1}\left(3\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-8}\right)}+\frac{10}{\left(2x-11\right)^2}>0\forall x\in\left[\frac{8}{3};+\infty\right)\setminus\left\{\frac{11}{2}\right\}$

Do đó hàm số đồng biến nhưng liên tục trên hai khoảng độc lập đó là các khoảng $\left[\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)$ và $\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$\frac{8}{3}$		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	|	+	
$f(x)$	$\frac{45-17\sqrt{33}}{51}$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số như trên, ta thấy trong $\left[\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)$ phương trình có một nghiệm duy nhất, đó chính là $x=3, y=1$. Còn trong khoảng $\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$ phương trình cũng có một nghiệm duy nhất đó là $x=8$, khi đó $y=-4$ (Không thỏa mãn điều kiện ban đầu).

Kết luận: Vậy hệ có cặp nghiệm duy nhất đó là $x=3, y=1$.

Bài 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+5x+2=3y(x+1)+(2x-y+1)\sqrt{y-x} \\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} \end{cases}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình 1. Đặt $x=100$ ta được:

$$20502+y^2-303y+(y-201)\sqrt{y-100}=0$$

SHIFT CALC với $y=100$ ta được nghiệm $y=201$.

Xét phương trình $\frac{20502+y^2-303y+(y-201)\sqrt{y-100}}{y-201}=0$, sử dụng SHIFT CALC với $y=100$ ta được nghiệm $y=101$.

Vậy phương trình 1 có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} y=201=2.100+1 \\ y=101=100+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x+1 \\ y=x+1 \end{array}\right.$

Nhận thấy trong nhân tử $(2x-y+1)\sqrt{y-x}$ đã có sẵn nhân tử $(y-2x-1)$ do đó để có nhân tử $(y-x-1)$, ta sử dụng liên hợp $\left(\sqrt{y-x}-1\right)$.

Điều kiện:

Ta có: $2x^2+y^2+5x+2=3y(x+1)+(2x-y+1)\sqrt{y-x}$

$\Leftrightarrow 2x^2+y^2+5x+2-3xy-3y+(y-2x-1)\sqrt{y-x}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+y^2+3x+1-3xy-2y+(y-2x-1)\left(\sqrt{y-x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (y-x-1)(y-2x-1)+(y-2x-1)\left(\sqrt{y-x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-x}-1\right)\left(\sqrt{y-x}+1\right)(y-2x-1)+(y-2x-1)\left(\sqrt{y-x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-x}-1\right)(y-2x-1)\left(\sqrt{y-x}+2\right)=0$

Vì $\sqrt{y-x}+2>0$ do đó $\left[\begin{array}{l} y-2x-1=0 \\ \sqrt{y-x}-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x+1 \\ y=x+1 \end{array}\right.$

Với $y=2x+1$ thay vào phương trình thứ hai ta có:

$3x+\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}-3=0$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X)=3X+\sqrt{4X+1}+\sqrt{9X+4}-3$

- START = –0.25
- END = 1.5
- STEP = 0.25

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy hàm số là đồng biến và có nghiệm duy nhất $x=0$.

X	$F(X)$
–0.25	–2.427
0	0
0.25	1.6642
0.5	3.1475
0.75	4.5287
1	5.8416
1.25	7.1046
1.5	8.329

Ta xét $f(x)=3x+\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}$ với $x\ge-\frac{1}{4}$.

Ta có: $f'(x)=3+\frac{2}{\sqrt{4x+1}}+\frac{9}{2\sqrt{9x+4}}>0\forall x>-\frac{1}{4}$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ khi đó $y=1$.

Với $y=x+1$ thay vào phương trình thứ hai ta được:

$3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f\left(X\right)=3X^2-X+3-\sqrt{3X+1}-\sqrt{5X+4}$

- START = 0
- END = 4.5
- STEP = 0.5

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=0$ và $x=1$.

Sử dụng phương pháp liên hợp hai nghiệm hữu tỷ ta được các liên hợp cần tìm là $\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right),\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)$.

X	$F\left(X\right)$
0	0
0.5	−0.88
1	0
1.5	2.5136
2	6.6125
2.5	12.272
3	19.478
3.5	28.222
4	38.495
4.5	50.294

Ta có: $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

$$\Leftrightarrow 3x^2-x+3-\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{\left(x+1\right)^2-\left(3x+1\right)}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{\left(x+2\right)^2-\left(5x+4\right)}{x+2+\sqrt{5x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{x^2-x}{x+2+\sqrt{5x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0\ (*)$$

Vì $x\ge-\frac{1}{3}$ do đó $3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}>0$.

Vậy (*) $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=1\\x=1,y=2\end{array}\right.$.

Kết luận: Hệ phương trình có hai cặp nghiệm $\left(x;y\right)\in\left\{\left(0;1\right);\left(1;2\right)\right\}$

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x-y}+\sqrt{3y}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\x^2+2x+\sqrt{y^2-x}=3y+2\end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình 1. Đặt $x = 100$ ta được:

$$\sqrt{200-y}+\sqrt{3y}=10+\sqrt{2y+100}$$

SHIFT CALC với $y=100$ ta được nghiệm $y=100$.

Xét phương trình $\dfrac{\sqrt{200-y}+\sqrt{3y}-10-\sqrt{2y+100}}{y-100}=0$, sử dụng SHIFT CALC với $y=1$ ta được nghiệm $y=\dfrac{100}{3}$.

Vậy phương trình 1 có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{100}{3}=\dfrac{x}{3} \\ y=100=x \end{array}\right.$

Thay $y=x$ vào phương trình 1 ta được $\begin{cases} \sqrt{2x-y}=\sqrt{x} \\ \sqrt{x+2y}=\sqrt{3x} \\ \sqrt{3y}=\sqrt{3x} \end{cases}$

Do đó các liên hợp cần tìm là: $\left(\sqrt{2x-y}-\sqrt{x}\right)$ và $\left(\sqrt{3y}-\sqrt{x+2y}\right)$.

Điều kiện: $x,y \geq 0$.

Nhận thấy $x=y=0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Do đó x,y không đồng thời bằng 0.

Ta có: $\sqrt{2x-y}+\sqrt{3y}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-y}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{3y}-\sqrt{x+2y}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-y-x}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}}+\frac{3y-x-2y}{\sqrt{3y}+\sqrt{x+2y}}=0 \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}}+\frac{y-x}{\sqrt{3y}+\sqrt{x+2y}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{3y}+\sqrt{x+2y}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\frac{\sqrt{3y}+\sqrt{x+2y}-\sqrt{2x-y}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3y}+\sqrt{x+2y}\right)}=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Thay $x=3y$ vào các căn thức ta được: $\begin{cases}\sqrt{x+2y}=\sqrt{5y}\\ \sqrt{2x-y}=\sqrt{5y}\\ \sqrt{x}=\sqrt{3y}\end{cases}$

Do đó các liên hợp cần tìm là $\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{2x-y}\right)$ và $\left(\sqrt{3y}-\sqrt{x}\right)$.

Do đó: $(x-y)\dfrac{\sqrt{3y}+\sqrt{x+2y}-\sqrt{2x-y}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3y}+\sqrt{x+2y}\right)}=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\dfrac{\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{2x-y}\right)+\left(\sqrt{3y}-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3y}+\sqrt{x+2y}\right)}=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{2x-y}\right)+\left(\sqrt{3y}-\sqrt{x}\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(\dfrac{x+2y-2x+y}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{2x-y}}+\dfrac{3y-x}{\sqrt{3y}+\sqrt{x}}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(\dfrac{3y-x}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{2x-y}}+\dfrac{3y-x}{\sqrt{3y}+\sqrt{x}}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(3y-x)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{2x-y}}+\dfrac{1}{\sqrt{3y}+\sqrt{x}}\right)=0$ (*)

Vì $\dfrac{1}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{2x-y}}+\dfrac{1}{\sqrt{3y}+\sqrt{x}}>0$ với x,y không đồng thời bằng 0.

Do đó (*) $\Rightarrow x=y \vee x=3y$.

Trường hợp 1: Với $x=y$, thay vào phương trình 2 ta được:

$x^2-x-2+\sqrt{x^2-x}=0$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X)=X^2-X-2+\sqrt{X^2-X}$

- START = 1
- END = 5.5
- STEP = 0.5

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng

X	$F(X)$
1	−2
1.5	−0.383
2	1.4142
2.5	3.6864
3.	6.4494

3.5	9.708
4	13.464
4.5	17.718
5	22.472
5.5	27.724

giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất trong $(1.5;2)$ đồng thời hàm số đồng biến và liên tục trên $(1;+\infty)$.

Do đó có thể giải phương trình trên bằng phương pháp nhân liên hợp hoặc có thể sử dụng tính đơn điệu của hàm số đánh giá phương trình có nghiệm duy nhất.

Sử dụng SHIFT CALC với $x = 1.6$ ta được nghiệm $x \approx 1.618033989$.

Thay vào căn thức ta được: $\sqrt{x^2-x} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Cách 1: Sử dụng nhân liên hợp nghiệm vô tỷ:

Ta có: $x^2 - x - 2 + \sqrt{x^2-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 + \left(\sqrt{x^2-x} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + \frac{x^2-x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right) = 0 \ (*)$$

Vì $1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} > 0$ do đó (*) $\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-x} = 1 \\ x \ge 0\end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Với $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ta có $y = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá hàm số đơn điệu:

Ta có: $\begin{cases}x \ge 0 \\ x^2 - x \ge 0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0 \\ x \ge 1\end{array}\right.$. Vì $x = 0$ và $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình do đó điều kiện cần tìm là $x > 1$.

Xét $f(x) = x^2 - x - 2 + \sqrt{x^2-x}, x \in (1;+\infty)$.

Ta có: $f'(x) = 2x - 1 + \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = (2x-1)\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x}}\right) > 0 \forall x \in (1;+\infty)$

Do đó $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $(1;+\infty)$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ là một nghiệm của phương trình nên $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.

Với $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ta có $y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Cách 3: Đặt ẩn phụ đưa về phương trình cơ bản:

Đặt $\sqrt{x^2-x}=t$ với $t\geq 0$. Khi đó phương trình trở thành:

$t^2+t-2=0\Leftrightarrow t=1\vee t=-2$.

Vì $t\geq 0$ do đó $t=1\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-x}=1\\ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Với $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ta có $y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Trường hợp 2: Với $y=\frac{x}{3}$, thay vào phương trình 2 ta được:

$$x^2+x-2+\frac{\sqrt{x^2-9x}}{3}=0$$

Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-9x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x\geq 9\end{array}\right.$. Vì $x=0$ và $x=9$ không phải là nghiệm của phương trình nên điều kiện của bài toán là $x>9$.

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=X^2+X-2+\frac{\sqrt{X^2-9X}}{3}$$

- START = 9
- END = 13.5
- STEP = 0.5

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình vô nghiệm đồng thời hàm số đồng biến và liên tục trên $(9;+\infty)$.

Do đó có thể giải phương trình trên bằng phương pháp đánh giá tính đơn điệu.

X	$F(X)$
9	88
9.5	98.476
10	109.05
10.5	120.07
11	131.56
11.5	143.53
12	156
12.5	168.95
13	182.4
13.5	196.34

Xét $f\left(x\right)=x^2+x-2+\dfrac{\sqrt{x^2-9x}}{3}, x\in\left(9;+\infty\right)$

Ta có: $f'\left(x\right)=2x+1+\dfrac{2x-9}{6\sqrt{x^2-9x}}>0\forall x\in\left(9;+\infty\right)$.

Do đó $f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên $\left(9;+\infty\right)$.

Do đó với $x>9$ thì $f\left(x\right)>f\left(9\right)$. Mà $f\left(9\right)=88>0$.

Do đó $f\left(x\right)>0\forall x\in\left(9;+\infty\right)$. Vậy phương trình $f\left(x\right)=0$ vô nghiệm.

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{xy}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{8x-y+5} & (1)\\ \sqrt{8x-y+5}+\sqrt{x+y-1}=3\sqrt{x}+2 & (2)\end{cases}$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình (2). Đặt $x=100$ ta được:

$\sqrt{805-y}+\sqrt{y+99}=32$

SHIFT CALC với $y=100$ ta được nghiệm $y=-95$.

Xét phương trình $\dfrac{\sqrt{805-y}+\sqrt{y+99}-32}{y+95}=0$, sử dụng SHIFT CALC với $y=100$ ta được nghiệm $y=801$.

Vậy phương trình 1 có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l}y=-95=5-100=5-x\\ y=801=800+1=8x+1\end{array}\right.$

Thay $y=5-x$ vào phương trình 2 ta được $\begin{cases}\sqrt{8x-y+5}=3\sqrt{x}\\ \sqrt{x+y-1}=2\end{cases}$

Do đó các liên hợp cần tìm là: $\left(\sqrt{8x-y+5}-3\sqrt{x}\right)$ và $\left(\sqrt{x+y-1}-2\right)$.

Điều kiện: $x>0, y\geq 0$.

Ta có: $\sqrt{8x-y+5}+\sqrt{x+y-1}=3\sqrt{x}+2$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{8x-y+5}-3\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x+y-1}-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{8x-y+5-9x}{\sqrt{8x-y+5}+3\sqrt{x}}+\frac{x+y-1-4}{\sqrt{x+y-1}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-y+5}{\sqrt{8x-y+5}+3\sqrt{x}}+\frac{x+y-5}{\sqrt{x+y-1}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-5)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y-1}+2}-\frac{1}{\sqrt{8x-y+5}+3\sqrt{x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-5)\frac{\sqrt{8x-y+5}+3\sqrt{x}-\sqrt{x+y-1}-2}{\left(\sqrt{x+y-1}+2\right)\left(\sqrt{8x-y+5}+3\sqrt{x}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-5)\left(\sqrt{8x-y+5}+3\sqrt{x}-\sqrt{x+y-1}-2\right)=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Thay $y=8x+1$ vào các căn thức ta được: $\begin{cases}\sqrt{8x-y+5}=2\\ \sqrt{x+y-1}=3\sqrt{x}\end{cases}$

Do đó các liên hợp cần tìm là $\left(\sqrt{8x-y+5}-2\right)$ và $\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x+y-1}\right)$.

Do đó: $(x+y-5)\left(\sqrt{8x-y+5}+3\sqrt{x}-\sqrt{x+y-1}-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x+y-5)\left[\left(\sqrt{8x-y+5}-2\right)+\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x+y-1}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-5)\left(\frac{8x-y+5-4}{\sqrt{8x-y+5}+2}+\frac{9x-x-y+1}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+y-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-5)\left(\frac{8x+1-y}{\sqrt{8x-y+5}+2}+\frac{8x+1-y}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+y-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-5)(8x+1-y)\left(\frac{1}{\sqrt{8x-y+5}+2}+\frac{1}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+y-1}}\right)=0\ (*)$$

Vì $\dfrac{1}{\sqrt{8x-y+5}+2}+\dfrac{1}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+y-1}}>0$

Do đó (*) $\Rightarrow y=5-x \vee y=8x+1$

Trường hợp 1: $y=5-x$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$\sqrt{xy}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{8x-y+5}\Rightarrow \sqrt{x}\sqrt{5-x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3\sqrt{x}\Rightarrow x\sqrt{5-x}+1=3x$$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f\left(X\right)=3X-X\sqrt{5-X}-1$

- START = 0
- END = 5
- STEP = 0.5

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$ đồng thời hàm số đồng biến và liên tục trên $\left(0;5\right)$.

Do đó có thể giải phương trình trên bằng phương pháp đánh giá tính đơn điệu hoặc sử dụng nhân liên hợp.

X	$F\left(X\right)$
0	−1
0.5	−0.56
1	0
1.5	0.6937
2	1.5358
2.5	2.5471
3	3.7573
3.5	5.2133
4	7
4.5	9.318
5	14

Cách 1: Sử dụng nhân liên hợp:

Ta có: $x\sqrt{5-x}+1=3x\Leftrightarrow 3x-x\sqrt{5-x}-1=0\Leftrightarrow x\left(2-\sqrt{5-x}\right)+\left(x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{x\left(4-5+x\right)}{2+\sqrt{5-x}}+\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{x}{2+\sqrt{5-x}}+1\right)\left(x-1\right)=0\ (*)$$

Vì $\dfrac{x}{2+\sqrt{5-x}}+1>0\forall x>0$ do đó (*) $\Rightarrow x=1\Rightarrow y=4$

Cách 2: Đánh giá hàm số đơn điệu:

Vì $x=5$ không phải nghiệm của phương trình

Do đó xét hàm số $f\left(x\right)=3x-x\sqrt{5-x}-1$ với $x\in\left(0;5\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\left(3-\sqrt{5-x}\right)+\dfrac{x}{2\sqrt{5-x}}=\dfrac{x+4}{3+\sqrt{5-x}}+\dfrac{x}{2\sqrt{5-x}}>0\forall x\in\left(0;5\right)$

Do đó $f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên $\left(0;5\right)$.

Do đó trong $\left(0;5\right)$ phương trình $f\left(x\right)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác trong $\left(0;5\right)$ phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm $x=1$.

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f\left(x\right)=0$.

Với $x=1$ ta có $y=4$.

Trường hợp 2: $y=8x+1$, thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$$\sqrt{xy}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{8x-y+5}\Rightarrow\sqrt{x}\sqrt{8x+1}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2\Rightarrow x\sqrt{8x+1}+1=2\sqrt{x}$$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f\left(X\right)=X\sqrt{8X+1}+1-2\sqrt{X}$

- START = 0
- END = 5
- STEP = 0.5

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình vô nghiệm đồng thời hàm số đồng biến và liên tục trên $\left(0.5;5\right)$.

X	$F\left(X\right)$
0	1
0.5	0.7038
1	2
1.5	3.9588
2	6.4177
2.5	9.2941
3	12.535
3.5	16.106
4	19.978
4.5	24.129
5	28.543

Chú ý rằng:

$$\begin{cases} x>0 \\ x\sqrt{8x+1}+1=2\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x}>1 \Rightarrow x>\frac{1}{4}$$

Do đó để định hướng rõ hơn ta xét:

$f\left(X\right)=X\sqrt{8X+1}+1-2\sqrt{X}$

- START = 0.25
- END = 2
- STEP = 0.25

Đến đây ta nhận thấy rõ ràng nếu sử dụng điều kiện $x>\frac{1}{4}$ thì hàm số chắc chắn sẽ đồng biến và vô nghiệm.

X	$F\left(X\right)$
0.25	0.433
0.5	0.7038
0.75	1.2522
1	2
1.25	2.9097
1.5	3.9588
1.75	5.1319
2	6.4177

Xét phương trình: $x\sqrt{8x+1}+1=2\sqrt{x}$

Ta có: $\begin{cases} x>0 \\ x\sqrt{8x+1}+1=2\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x}>1 \Rightarrow x>\frac{1}{4}$

Xét hàm số $f\left(x\right)=x\sqrt{8x+1}+1-2\sqrt{x}$ với $x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\sqrt{8x+1}+\frac{4x}{\sqrt{8x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Để đánh giá $f'\left(x\right)>0$ lúc này rất khó và không dễ dàng để xử lý. Do đó ta tiếp tục định hướng phương trình:

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=\sqrt{8X+1}+\frac{4X}{\sqrt{8X+1}}-\frac{1}{\sqrt{X}}$$

- START = 0.25
- END = 3
- STEP = 0.25

Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy rõ ràng $f'(x)>0$ và đồng biến với $x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Do đó để chứng minh $f'(x)>0$ ta xét tiếp đến $f''(x)$ và chứng minh $f''(x)>0$.

X	$F(X)$
0.25	0.3094
0.5	1.7162
0.75	2.6249
1	3.3333
1.25	3.9297
1.5	4.4531
1.75	4.9244
2	5.3562
2.25	5.7569
2.5	6.1322
2.75	6.4864
3	6.8226

Vì $f'(x)=\sqrt{8x+1}+\frac{4x}{\sqrt{8x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ do đó ta có:

$$f''(x)=\frac{4}{\sqrt{8x+1}}+\frac{4\sqrt{8x+1}-4x\frac{4}{\sqrt{8x+1}}}{8x+1}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow f''(x)=\frac{4}{\sqrt{8x+1}}+\frac{4\left(\sqrt{8x+1}-\frac{4x}{\sqrt{8x+1}}\right)}{8x+1}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow f''(x)=\frac{4}{\sqrt{8x+1}}+\frac{4(8x+1-4x)}{(8x+1)\sqrt{8x+1}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow f''(x)=\frac{4}{\sqrt{8x+1}}+\frac{4(4x+1)}{(8x+1)\sqrt{8x+1}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}>0\forall x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$$

Vậy $f'(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục với $x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Vì $x>\frac{1}{4}$ nên $f'(x)>f'\left(\frac{1}{4}\right)$. Vì $f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4\sqrt{3}-6}{3}>0$

Do đó $f'(x)>0$ với $x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$ nên $f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$. Với $x>\frac{1}{4}$ ta có: $f(x)>f\left(\frac{1}{4}\right)$.

Vì $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}>0$ do đó $f\left(x\right)>0$ với $x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Vậy phương trình $x\sqrt{8x+1}+1=2\sqrt{x}$ vô nghiệm với $x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Kết luận: Vậy hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;4\right)$.

Bài 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x^4-x^2y^2+4y^4}+\sqrt{x^4+20x^2y^2+4y^4}=7xy\\ x^2-xy+y^2=1\end{cases}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Xét phương trình (1). Đặt $y=100$ ta được:

$$\sqrt{x^4-10000x^2+400000000}+\sqrt{x^4+200000x^2+400000000}-700x=0$$

SHIFT CALC với $x=100$ ta được nghiệm $x=100$.

Xét phương trình:

$$\frac{\sqrt{x^4-10000x^2+400000000}+\sqrt{x^4+200000x^2+400000000}-700x=0}{x-100}=0$$

Sử dụng SHIFT CALC với $x=1$ ta được nghiệm $x=200$.

Vậy phương trình 1 có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l}x=100=y\\ x=200=2y\end{array}\right.$

Thay $x=200, y=100$ vào phương trình 1 ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{x^4-x^2y^2+4y^4}=40000=2.100.200=2xy\\ \sqrt{x^4+20x^2y^2+4y^4}=100000=5.100.200=5xy\end{cases}$$

Do đó các liên hợp cần tìm là:

$$\left(\sqrt{x^4-x^2y^2+4y^4}-2xy\right)\text{ và }\left(\sqrt{x^4+20x^2y^2+4y^4}-5xy\right).$$

Điều kiện: $xy\geq 0$.

Vì $x=y=0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình. Do đó x,y không đồng thời bằng 0.

Do đó: $\sqrt{x^4-x^2y^2+4y^4}+\sqrt{x^4+20x^2y^2+4y^4}=7xy$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^4-x^2y^2+4y^4}-2xy\right)+\left(\sqrt{x^4+20x^2y^2+4y^4}-5xy\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^4-x^2y^2+4y^4-4x^2y^2}{\sqrt{x^4-x^2y^2+4y^4}+2xy}+\frac{x^4+20x^2y^2+4y^4-25x^2y^2}{\sqrt{x^4+20x^2y^2+4y^4}+5xy}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^4-5x^2y^2+4y^4}{\sqrt{x^4-x^2y^2+4y^4}+2xy}+\frac{x^4-5x^2y^2+4y^4}{\sqrt{x^4+20x^2y^2+4y^4}+5xy}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^4-5x^2y^2+4y^4\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2y^2+4y^4}+2xy}+\frac{1}{\sqrt{x^4+20x^2y^2+4y^4}+5xy}\right)=0$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2y^2+4y^4}+2xy}+\frac{1}{\sqrt{x^4+20x^2y^2+4y^4}+5xy}>0$

Do đó $x^4-5x^2y^2+4y^4=0\Leftrightarrow(x+2y)(x-2y)(x+y)(x-y)=0$

Vì $xy\ge 0$ và x,y không đồng thời bằng 0 do đó $\begin{cases}x+2y\ne 0\\ x+y\ne 0\end{cases}$

Vậy $x=y\vee x=2y$.

Với $x=y$, thay vào phương trình (2) ta được: $x^2=1\Rightarrow x=y=\pm 1$

Với $x=2y$, thay vào phương trình (2) ta được: $y^2=\frac{1}{3}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vì $x=2y$ nên ta có $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

Kết luận: Hệ phương trình có 4 cặp nghiệm là:

$$(x;y)\in\left\{(1;1),(-1;-1),\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{-2}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

CHỦ ĐỀ 11: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA NGHIỆM KÉP VÔ TỶ

I. Đặt vấn đề.

- Như vậy qua 10 chủ đề trước, chúng ta đã đề cập đến các phương pháp giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình bằng rất nhiều các kỹ thuật khác nhau. Trong chủ đề này, chúng ta sẽ đề cập đến một trường hợp đặc biệt của nghiệm kép, đó là nghiệm kép vô tỷ.
- Khác với nghiệm kép hữu tỷ $(x-a)^2$ với a là nghiệm hữu tỷ, các bài toán nghiệm kép vô tỷ cần phải có kết quả của nhân tử dưới dạng $(x^2+ax+b)^2$ trong đó x^2+ax+b là phương trình bậc hai chứa nghiệm vô tỷ tìm được.

II. Ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải phương trình: $x^2+5x = x\sqrt{3x-1}+(x+1)\sqrt{5x}$

*** Phân tích:**

Nhìn thoáng qua ta thấy phương trình không có gì đặc biệt, tuy nhiên vấn đề khó nằm ở chỗ bài toán này lại chứa nghiệm vô tỷ dưới dạng nghiệm kép. Để kiểm tra vấn đề này chúng ta làm theo các bước sau:

Đầu tiên nhẩm một nghiệm của phương trình:

SHIFT CALC với $x=1$ ta được nghiệm $x \approx 2.618033728$.

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép bằng TABLE:

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO với:

$F(X) = X^2+5X-X\sqrt{3X-1}-(X+1)\sqrt{5X}$

Xét các giá trị:

- START = 2.1
- END = 3.
- STEP = 0.1

Khi đó dựa vào bảng giá trị TABLE như hình bên ta kết luận như sau:

- Điểm thấp nhất trong bảng giá trị nằm trong khoảng $(2.6; 2.7)$.

X	$F(X)$
2.1	0.0302
2.2	0.0206
2.3	0.0124
2.4	6.1027. 10^{-3}
2.5	1.8569. 10^{-3}
2.6	4.49069. 10^{-5}
2.7	9.5912.

		10^{-4}
	2.8	4.48784. 10^{-3}
	2.9	0.012
	3	0.0227

- Điều này có thể hiểu được bởi đây chính là dấu hiệu của nghiệm kép $x \approx 2.618033728$.

Tuy nhiên khi thay giá trị $x \approx 2.618033728$ vào các căn thức ta thấy:

$$\begin{cases}\sqrt{3x-1} \approx 2.618033839 \approx x \\ \sqrt{5x} \approx 3.618033808 \approx x+1\end{cases}$$

Vì vậy ta nhận thấy có thể tạo được hằng đẳng thức với phương trình này.

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{3}$.

Ta có: $x^2+5x = x\sqrt{3x-1}+(x+1)\sqrt{5x} \Leftrightarrow x^2+5x-x\sqrt{3x-1}-(x+1)\sqrt{5x}=0$

$$\Leftrightarrow 2x^2+10x-2x\sqrt{3x-1}-2(x+1)\sqrt{5x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\sqrt{3x-1}+3x-1\right)+\left(x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{5x}+5x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3x-1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{5x}\right)^2=0$$

Vì $\begin{cases}\left(x-\sqrt{3x-1}\right)^2 \geq 0 \\ \left(x+1-\sqrt{5x}\right)^2 \geq 0\end{cases}$ do đó $\left(x-\sqrt{3x-1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{5x}\right)^2 \geq 0$.

Vì vậy $\left(x-\sqrt{3x-1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{5x}\right)^2=0$ xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x=\sqrt{3x-1} \\ x+1=\sqrt{5x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \geq \frac{1}{3} \\ x^2-3x+1=0\end{cases} \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: Phương trình hai nghiệm phân biệt $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bất đẳng thức AM – GM.

Ngoài phương pháp tạo hằng đẳng thức như trên, ta có thể giải bài toán bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức AM – GM như sau:

Ta có: $\begin{cases} x\sqrt{3x-1} \le \dfrac{x^2+3x-1}{2} \\ (x+1)\sqrt{5x} \le \dfrac{(x+1)^2+5x}{2} \end{cases} \Rightarrow x\sqrt{3x-1}+(x+1)\sqrt{5x} \le x^2+5x$

Do đó $x^2+5x = x\sqrt{3x-1}+(x+1)\sqrt{5x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3x-1} \\ x+1=\sqrt{5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: Phương trình hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Cách 3: Phân tích nhân tử:

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{3}$.

Ta có: $x^2+5x = x\sqrt{3x-1}+(x+1)\sqrt{5x} \Leftrightarrow x^2+5x-x\sqrt{3x-1}-(x+1)\sqrt{5x}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+10x-2x\sqrt{3x-1}-2(x+1)\sqrt{5x}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-1}+1-\sqrt{5x}\right)^2\left(4x+\sqrt{3x-1}\sqrt{5x}\right)$

Cách phân tích nhân tử với các biểu thức chứa căn như trên sẽ được hướng dẫn chi tiết trong Chủ đề 12.

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $x^2+4x+2=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}$

Đáp số: $x=1+\sqrt{2}$

Bài 2: Giải phương trình: $x^4-2x^3+3x+2=2x\sqrt{x+1}$

Đáp số: $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Bài 3: Giải phương trình: $x^2-x+4=(x-1)\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+x^2-4x+6}$

Đáp số: $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

Bài 4: Giải phương trình: $x^3 - x^2 + x - 2 - 2(x-1)\sqrt{x^2+x} + 2x\sqrt{1-x} = 0$

Đáp số: $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 5: Giải bất phương trình: $3(x^2-2) + \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}} > \sqrt{x}\left(\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x^2-1}\right)$

(Trích đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – Lần 1 – THPT Chu Văn An Hà Nội)

Đáp số: $x \in [1;+\infty) \setminus \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

VII. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $x^2 + 4x + 2 = \left(\left(1+\sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng SHIFT CALC với $x = 1$ ta thu được nghiệm $x \approx 2.414237499$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F(X) = X^2 - 4X - 2 - \left(\left(1+\sqrt{2}\right)X + \sqrt{2}\right)\sqrt{2X+1}$$

Xét các giá trị:

- START = 2.1
- END = 3
- STEP = 0.1

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 2.4 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành. Vì vậy nghiệm $x \approx 2.414237499$ chính là nghiệm kép của phương trình.

X	$F(X)$
2.1	0.024
2.2	0.0113
2.3	$3.294.10^{-3}$
2.4	$5.187.10^{-5}$
2.5	$1.919.10^{-3}$
2.6	$9.144.10^{-3}$
2.7	0.0219
2.8	0.0405
2.9	0.0652
3	0.0961

Chú ý rằng ta có thể viết lại phương trình như sau:

$$x^2 + 4x + 2 = \left(\left(1+\sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = \left(x + \sqrt{2}(x+1)\right)\sqrt{2x+1}$$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2=x\sqrt{2x+1}+(x+1)\sqrt{4x+2}$

Thay $x\approx 2.414237499$ vào căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{2x+1}\approx 2.414223477\approx x\\ \sqrt{4x+2}\approx 3.414227584\approx x+1\end{cases}$$

Vậy ta sẽ tạo hằng đẳng thức để có $\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2$ và $\left(x+1-\sqrt{4x+2}\right)^2$.

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức.

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{2}$.

Ta có: $x^2+4x+2=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2=\left(x+\sqrt{2}(x+1)\right)\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2=x\sqrt{2x+1}+(x+1)\sqrt{4x+2}$

$\Leftrightarrow 2x^2+8x+4=2x\sqrt{2x+1}+2(x+1)\sqrt{4x+2}$

$\Leftrightarrow 2x^2+8x+4-2x\sqrt{2x+1}-2(x+1)\sqrt{4x+2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\sqrt{2x+1}+2x+1\right)+\left(x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{4x+2}+4x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\left((x+1)^2-2(x+1)\sqrt{4x+2}+4x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{4x+2}\right)^2=0$

Vì $\begin{cases}\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2\ge 0\\ \left(x+1-\sqrt{4x+2}\right)^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow \left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{4x+2}\right)^2\ge 0$

Do đó $\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\left(x+1-\sqrt{4x+2}\right)^2=0$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x=\sqrt{2x+1}\\ x+1=\sqrt{4x+2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2x-1=0\end{cases}\Rightarrow x=1+\sqrt{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt{2}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM.

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $x^2+4x+2=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2=\left(x+\sqrt{2}\left(x+1\right)\right)\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2=x\sqrt{2x+1}+\left(x+1\right)\sqrt{4x+2}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases} x\sqrt{2x+1} \leq \dfrac{x^2+2x+1}{2} \\ \left(x+1\right)\sqrt{4x+2} \leq \dfrac{x^2+2x+1+4x+2}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow x\sqrt{2x+1}+\left(x+1\right)\sqrt{4x+2} \leq x^2+4x+2$

Vậy $x^2+4x+2=x\sqrt{2x+1}+\left(x+1\right)\sqrt{4x+2}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2x+1} \\ x+1=\sqrt{4x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-2x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1+\sqrt{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt{2}$.

Cách 3: Phân tích nhân tử.

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $x^2+4x+2=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+2-\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)\sqrt{2x+1}=0$

$\Leftrightarrow \left[\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{2x+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}\right]=0$

Vì $x \geq -\dfrac{1}{2}$ nên $\sqrt{2x+1}=\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{2} \Rightarrow x=1+\sqrt{2}$.

Bài 2: Giải phương trình: $x^4-2x^3+3x+2=2x\sqrt{x+1}$

PHÂN TÍCH CASIO

Bài toán này thoạt nhìn qua thì không khó, tuy nhiên nếu nhẩm nghiệm bằng phương pháp SHIFT CALC thông thường ta không thể tìm được nghiệm. Chính vì vậy để truy tìm miền chứa nghiệm ta sử dụng công cụ TABLE với hàm số:

$$F(X)=X^4-2X^3+3X+2-2X\sqrt{X+1}$$

Xét các giá trị:

- START = -0.5
- END = 4
- STEP = 0.5

X	$F(X)$
-0.5	1.5196
0	2
0.5	2.0877
1	1.1715
1.5	0.069
2	1.0717
2.5	7.9583
3	26
3.5	1 963
4	124.11

Dựa vào bảng giá trị TABLE ta nhận thấy nghiệm được dự đoán nằm trong khoảng $(1;2)$ vì hàm số có dấu hiệu cắt trục hoành nhưng chưa biết chính xác bằng bao nhiêu.

Do đó tiếp tục sử dụng công cụ TABLE với:

$$F(X)=X^4-2X^3+3X+2-2X\sqrt{X+1}$$

Xét các giá trị:

- START = 1
- END = 2
- STEP = 0.1

Dựa vào bảng giá trị TABLE ta nhận thấy rõ ràng hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành hay còn gọi là phương trình có nghiệm kép. Nghiệm kép này vô tỷ và ta sử dụng SHIFT CALC $x=1.6$ tìm nghiệm.

X	$F(X)$
1	1.1715
1.1	0.9139
1.2	0.6578
1.3	0.419
1.4	0.2158
1.5	0.069
1.6	$1.75504.\ 10^{-3}$
1.7	0.0393
1.8	0.2096
1.9	0.5429
2	1.0717

Sử dụng SHIFT CALC với $x=1.6$ ta thu được nghiệm $x\approx 1.618033636$

Thay $x\approx 1.618033636$ vào căn thức ta được:

$\sqrt{x+1}\approx 1.61803388\approx x$

Vậy ta sẽ tạo hằng đẳng thức để có $\left(x-\sqrt{x+1}\right)^2$.

Cách 1: Sử dụng hằng đẳng thức.

Điều kiện: $x \geq -1$.

Ta có: $x^4 - 2x^3 + 3x + 2 = 2x\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 3x + 2 - 2x\sqrt{x+1} = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 + \left(x^2 - 2x\sqrt{x+1} + x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 1\right)^2 + \left(x - \sqrt{x+1}\right)^2 = 0$$

Vì $\begin{cases} \left(x^2 - x - 1\right)^2 \geq 0 \\ \left(x - \sqrt{x+1}\right)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(x^2 - x - 1\right)^2 + \left(x - \sqrt{x+1}\right)^2 \geq 0$

Vậy $\left(x^2 - x - 1\right)^2 + \left(x - \sqrt{x+1}\right)^2 = 0$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x = \sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá AM – GM.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $2x\sqrt{x+1} \leq x^2 + x + 1$.

Do đó: $x^4 - 2x^3 + 3x + 2 \leq x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 1\right)^2 \leq 0 \Rightarrow \left(x^2 - x - 1\right)^2 = 0 \text{ vì } \left(x^2 - x - 1\right)^2 \geq 0 \forall x.$$

Vậy đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x = \sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Bài 3: Giải phương trình: $x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + 6}$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng SHIFT CALC với $x = 3$ ta thu được nghiệm $x \approx 3.302774567$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F(X) = X^2 - X + 4 - (X-1)\sqrt{X+2} - \sqrt{X^3 + X^2 - 4X + 6}$$

X	$F(X)$
3.1	0.0228
3.2	$5.919.\ 10^{-3}$
3.3	$4.346.\ 10^{-6}$

3.4	$5.366.\ 10^{-3}$
3.5	0.0222
3.6	0.0507
3.7	0.0911
3.8	0.1435
3.9	0.208
4	0.2849

Xét các giá trị:

- START = 3.1
- END = 4
- STEP = 0.1

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 3.3 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành. Vì vậy nghiệm $x \approx 3.302774567$ chính là nghiệm kép của phương trình.

Chú ý rằng ta có thể viết lại phương trình như sau:

$$x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + 6}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\sqrt{x+3}$$

Thay $x \approx 3.302774567$ vào căn thức ta được:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} \approx 2.302775405 \\ \sqrt{x+3} \approx 2.510532726 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2} \approx 2.510531957 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} \approx x - 1 \\ \sqrt{x+3} \approx \sqrt{x^2 - 2x + 2} \end{cases}$$

Vậy ta tạo hằng đẳng thức để có các biểu thức lần lượt là $\left(x - 1 - \sqrt{x+2}\right)^2$

và $\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)^2$.

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức.

Điều kiện: $x \geq -2$

Ta có: $x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + 6}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x+3)}$$

Vì $x \geq -2$ do đó $x + 3 > 0$ do đó $\sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x+3)} = \sqrt{x+3}\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

Khi đó: $x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x+3)}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 8 - 2(x-1)\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}\sqrt{x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left((x-1)^2 - 2(x-1)\sqrt{x+2} + x + 2\right) + \left(x^2 - 2x + 2 - 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}\sqrt{x+3} + x + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)^2+\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)^2=0$$

$$\begin{cases}\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)^2\geq 0\\ \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)^2+\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)^2\geq 0$$

Do đó $\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)^2+\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)^2=0$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x-1=\sqrt{x+2}\\ \sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-2x+2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x^2-3x-1=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM.

Ta có: $x^2-x+4=(x-1)\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+x^2-4x+6}$

$$\Leftrightarrow x^2-x+4=(x-1)\sqrt{x+2}+\sqrt{\left(x^2-2x+2\right)(x+3)}$$

Vì $x\geq -2$ do đó $x+3>0$ do đó $\sqrt{\left(x^2-2x+2\right)(x+3)}=\sqrt{x+3}\sqrt{x^2-2x+2}$.

Khi đó: $x^2-x+4=(x-1)\sqrt{x+2}+\sqrt{\left(x^2-2x+2\right)(x+3)}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases}(x-1)\sqrt{x+2}\leq\dfrac{x^2-2x+1+x+2}{2}\\ \sqrt{\left(x^2-2x+2\right)(x+3)}\leq\dfrac{x^2-2x+2+x+3}{2}\end{cases}$$

Cộng hai vế của hai bất phương trình trên ta được:

$$x^2-x+4\geq(x-1)\sqrt{x+2}+\sqrt{\left(x^2-2x+2\right)(x+3)}$$

Do đó $x^2-x+4=(x-1)\sqrt{x+2}+\sqrt{\left(x^2-2x+2\right)(x+3)}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x-1=\sqrt{x+2}\\ \sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-2x+2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x^2-3x-1=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 4: Giải phương trình: $x^3-x^2+x-2-2(x-1)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng SHIFT CALC với $x=0$ ta thu được nghiệm $x\approx 0.6180338563$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F(X)=X^3-X^2+X-2-2(X-1)\sqrt{X^2+X}$$
$$+2X\sqrt{1-X}$$

Xét các giá trị:

- START = 0.1
- END = 1
- STEP = 0.1

X	$F(X)$
0.1	-1.122
0.2	-0.69
0.3	-0.386
0.4	-0.178
0.5	-0.051
0.6	$-1.2\ 10^{-3}$
0.7	-0.026
0.8	-0.132
0.9	-0.35
1	-1

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 0.6 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành. Vì vậy nghiệm $x\approx 0.6180338563$ chính là nghiệm kép của phương trình.

Thay $x\approx 0.6180338563$ vào căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x}\approx 0.99999998519\approx 1\\ \sqrt{1-x}\approx 0.6180340959\approx x\end{cases}$$

Vậy ta tạo hằng đẳng thức $\left(\sqrt{x^2+x}-1\right)^2$ và $\left(x-\sqrt{1-x}\right)^2$.

Cách 1: Tạo hằng đẳng thức.

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ x\le -1\end{array}\right.$

Ta có: $x^3-x^2+x-2-2(x-1)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}=0$

$$\Leftrightarrow -x^3+x^2-x+2-2(1-x)\sqrt{x^2+x}-2x\sqrt{1-x}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left(x^2+x-2\sqrt{x^2+x}+1\right)+\left(x^2-2x\sqrt{1-x}+1-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left(\sqrt{x^2+x}-1\right)^2+\left(x-\sqrt{1-x}\right)^2=0$$

Với $\left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ x\le -1\end{array}\right.$ ta có: $\begin{cases}(1-x)\left(\sqrt{x^2+x}-1\right)^2\ge 0\\ \left(x-\sqrt{1-x}\right)^2\ge 0\end{cases}$

Do đó $(1-x)\left(\sqrt{x^2+x}-1\right)^2+\left(x-\sqrt{1-x}\right)^2=0$ khi và chỉ khi: $\begin{cases}\sqrt{x^2+x}=1\\ x=\sqrt{1-x}\end{cases}$ (*)

Giải (*) và kết hợp điều kiện ta được $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Cách 2: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM.

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ x\le -1\end{array}\right.$

Ta có: $x^3-x^2+x-2-2(x-1)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}=0$

$\Leftrightarrow -x^3+x^2-x+2-2(1-x)\sqrt{x^2+x}-2x\sqrt{1-x}=0$

$\Leftrightarrow -x^3+x^2-x+2=2(1-x)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$\begin{cases}2(1-x)\sqrt{x^2+x}\le(1-x)\left(1+x^2+x\right)\\ 2x\sqrt{1-x}\le x^2+1-x\end{cases}$

Cộng hai vế của hai bất phương trình lại ta có:

$2(1-x)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}\le(1-x)\left(1+x^2+x\right)+x^2+1-x$

$\Leftrightarrow 2(1-x)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}\le -x^3+x^2-x+2$

Vậy $2(1-x)\sqrt{x^2+x}+2x\sqrt{1-x}=-x^3+x^2-x+2$ khi: $\begin{cases}\sqrt{x^2+x}=1\\ x=\sqrt{1-x}\end{cases}$ (*)

Giải (*) và kết hợp điều kiện ta được $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 5: Giải bất phương trình:

$$3\left(x^2-2\right)+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}>\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+3\sqrt{x^2-1}\right)$$

(Trích đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – Lần 1 – THPT Chu Văn An Hà Nội)

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng SHIFT CALC với $x=1$ ta thu được nghiệm $x\approx 1.618034484$

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F(X)=3\left(X^2-2\right)+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{X^2-X+1}}$$

$$-\sqrt{X}\left(\sqrt{X-1}+3\sqrt{X^2-1}\right)$$

Xét các giá trị:

- START = 1.1
- END = 2
- STEP = 0.1

X	$F(X)$
1.1	1.2257
1.2	0.7301
1.3	0.4022
1.4	0.1828
1.5	0.0522
1.6	$1.194.\ 10^{-3}$
1.7	0.0242
1.8	0.1174
1.9	0.2779
2	0.5033

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 1.6 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành. Vì vậy nghiệm $x\approx 1.618034484$ chính là nghiệm kép của phương trình.

Chú ý bất phương trình trên có thể viết lại như sau:

$$3\left(x^2-2\right)+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}>\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+3\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-2\right)+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}-\sqrt{x^2-x}-3\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}>0$$

Thay $x\approx 1.618034484$ vào căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-x}\approx 1.0000000554\approx 1\\ \sqrt{x}\approx 1.272019844\\ \sqrt{x^2-1}\approx 1.272020279\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-x}\approx 1\\ \sqrt{x}\approx\sqrt{x^2-1}\end{cases}$$

Vậy ta tạo hằng đẳng thức $\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2$ và $\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2$.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Ta có: $3\left(x^2-2\right)+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}} > \sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+3\sqrt{x^2-1}\right)$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-2\right)+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}-\sqrt{x^2-x}-3\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}>0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x^2-2\right)+\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}-2\sqrt{x^2-x}-6\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}>0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x-10+\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}+\left(x^2-x-2\sqrt{x^2-x}+1\right)+3\left(x-2\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}+x^2-1\right)>0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x-5+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)+\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2+3\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2>0$$

Đến đây vấn đề khó nằm ở biểu thức bên ngoài không chứa hằng đẳng thức. Để định hướng cho nhóm biểu thức này ta cần tư duy như sau:

Rõ ràng rằng phương trình có nghiệm kép, và chính xác nghiệm kép đó là:

$$\sqrt{x^2-x}=1 \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Chính vì vậy nếu rất khó để xử lý dưới dạng hằng đẳng thức, ta sẽ tiến hành khảo sát hàm số $f\left(x\right)=x^2-x-5+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}$ để xuất hiện cực trị.

Tất nhiên điều này không phải chỉ có thể nhận định bằng lý luận thông thường, mà có thể được nhìn thấy thông qua công cụ TABLE:

Kiểm tra điều kiện nghiệm kép. Xét:

$$F\left(X\right)=X^2-X-5+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{X^2-X+1}}$$

Xét các giá trị:

- START = 1.1
- END = 2
- STEP = 0.1

Qua bảng giá trị trên, ta nhận thấy nghiệm nằm trong lân cận giá trị 1.6 đồng thời hàm số có dấu hiệu tiếp xúc với trục hoành. Vì vậy

X	$F(X)$
1.1	0.4792
1.2	0.32
1.3	0.188
1.4	0.0891
1.5	0.0261
1.6	$6.1017.10^{-3}$
1.7	0.0125

nghiệm $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ chính là nghiệm kép của phương trình.

1.8	0.0614
1.9	0.1462
2	0.2659

Ta có: $2\left(x^2-x-5+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)+\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2+3\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2>0$

Đặt $t=x^2-x\ge 0$ và xét hàm số $f(t)=t-5+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}}$ ta có:

$$f'(t)=1-\frac{2\sqrt{2}}{(t+1)\sqrt{t+1}}=\frac{(t+1)\sqrt{t+1}-2\sqrt{2}}{(t+1)\sqrt{t+1}}=\frac{\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{2}\right)\left(t+1+\sqrt{2}\sqrt{t+1}+2\right)}{(t+1)\sqrt{t+1}}$$

Do đó: $f'(t)=\frac{\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{2}\right)\left(t+3+\sqrt{2}\sqrt{t+1}\right)}{(t+1)\sqrt{t+1}.}=\frac{(t-1)\left(t+3+\sqrt{2}\sqrt{t+1}\right)}{\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{2}\right)(t+1)\sqrt{t+1}}$

Vì $t\ge 0$ nên $f(t)=0\Leftrightarrow t=1$. Ta có bảng xét dấu:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		−	0	+	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(t)\ge f(1)=0$.

Như vậy: $x^2-x-5+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}\ge 0, \left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2\ge 0, \left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2\ge 0$

Do đó $2\left(x^2-x-5+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)+\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2+3\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2>0$

Khi và chỉ khi: $\begin{cases} t=x^2-x\ne 1 \\ \sqrt{x^2-x}\ne 1 \\ \sqrt{x^2-1}\ne\sqrt{x} \end{cases}\Rightarrow x\ne\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Kết luận: Bất phương trình có tập nghiệm $x\in\left[1;+\infty\right)\setminus\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$

CHỦ ĐỀ 12: BÀI TOÁN NGHIỆM BỘI CHUYÊN SÂU

I. Đặt vấn đề.

- Trong những chủ đề trước chúng ta đã phân tích các bài toán phương trình, bất phương trình bằng những hướng đi khác nhau với sự trợ giúp của máy tính cầm tay. Trong chủ đề này, tôi sẽ đi sâu hơn về các bài toán nghiệm bội lớn với mục đích tham khảo cho các bạn học sinh khá giỏi.
- ***Nghiệm bội là gì?*** Nghiệm bội là những nghiệm của bài toán được lặp lại. Ví dụ như phương trình $(x-1)^3(x-2)^2=0$ sẽ có nghiệm $x=1$ lặp lại 3 lần và $x=2$ lặp lại 2 lần. Vậy ta coi như phương trình trên có nghiệm $x=1$ bội 3 và nghiệm $x=2$ bội 2 (nghiệm bội kép).
- Đây là một dạng toán mới, lạ, hay và đặc biệt là rất khó nếu ta không định hướng đúng đường đi của bài toán phương trình, bất phương trình và hệ phương trình.
- Bên cạnh đó, chúng ta còn định hướng những cách tư duy dựa trên nghiệm bội trong những bài toán bất đẳng thức, cực trị.

II. Kiến thức cơ bản.

Cách nhận dạng nghiệm bội của một phương trình như thế nào?

Chú ý:

Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=x_0$ bội n khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f\left(x_0\right)=0 \\ f'\left(x_0\right)=0 \\ f''\left(x_0\right)=0 \\ \dots \\ f^{(n-1)}\left(x_0\right)=0 \end{cases}$$

Với $f^{(n)}\left(x_0\right)$ là giá trị của đạo hàm cấp n của $f(x)$ tại $x=x_0$.

Các bước kiểm tra nghiệm bội trên máy tính CASIO:

Bước 1: Tìm các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ bằng máy tính CASIO.

Bước 2: Lưu các nghiệm vào các biến $A,B,C,...$ (Chẳng hạn muốn lưu giá trị $x\approx 1.618033989$ vào biến A, ta sử dụng cấu trúc X SHIFT RCL A để máy tính hiển thị dưới dạng $X\to A$).

Bước 3: Tính đạo hàm cấp 1, cấp 2, cấp 3 của hàm số $f(x)$ và tính:

$f'(A)$	$f'(B)$	$f'(C)$	...
$f''(A)$	$f''(B)$	$f''(C)$	...
$f'''(A)$	$f'''(B)$	$f'''(C)$	....

Bước 4 : Cách phân loại nghiệm bội thường gặp:

a) Nghiệm $x = A$ bội kép: $\begin{cases} f'(A) = 0 \\ f''(A) \neq 0 \\ f'''(A) \neq 0 \end{cases}$

b) Nghiệm $x = A$ bội 3: $\begin{cases} f'(A) = 0 \\ f''(A) = 0 \\ f'''(A) \neq 0 \end{cases}$

c) Nghiệm $x = A$ bội 4: $\begin{cases} f'(A) = 0 \\ f''(A) = 0 \\ f'''(A) = 0 \end{cases}$

Cần làm gì sau khi đã định hướng được bản chất của nghiệm bội?

Sau khi kiểm tra thành công, chúng ta thường có hai hướng lựa chọn để giải quyết bài toán như sau:

- **Cách 1:** Nhân liên hợp để tạo $(x-A)^n$.
- **Cách 2:** Phân tích thành nhân tử bằng máy tính CASIO.
- Ngoài ra chúng ta có thể sử dụng bất đẳng thức để giải quyết các bài toán nghiệm bội kép hoặc bội 4, dùng phương pháp đánh giá để giải quyết các bài toán bội 3.

III. Ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải phương trình: $2x^2 + x + 1 - 7(x-1)\sqrt{x-1} = 0$

Phân tích:

Tìm nghiệm của phương trình.

Điều kiện xác định: $x \in [1; +\infty)$.

Bước đầu tiên cho mỗi bài toán luôn là tìm các nghiệm của phương trình.

Tìm các nghiệm của phương trình vô tỷ như sau:

Bước 1: Nhập biểu thức: $2x^2 + x + 1 - 7(x-1)\sqrt{x-1} = 0$.

Bước 2: Ấn SHIFT CALC để vào chức năng tìm nghiệm.

Bước 3: Máy hỏi X? Máy yêu cầu mình nhập trước một giá trị của X để máy tính tìm nghiệm gần nhất với nghiệm đó. Chúng ta nhập cho $X=-10$ để tìm nghiệm gần -10 nhất. Máy cho nghiệm $X=5$.

Bước 4: Lặp lại bước 2 và 3 nhưng nhập cho $X=0$ để tìm nghiệm gần 0 nhất. Máy cho nghiệm $X=5$.

Bước 5: Lặp lại bước 2 và 3 nhưng nhập cho $X=10$ để tìm nghiệm gần 10 nhất. Máy cho nghiệm $X=5$.

Vậy sử dụng máy tính CASIO ta nhận thấy nghiệm duy nhất của bài toán là $x=5$.

Kiểm tra nghiệm bội của phương trình.

Để biết nghiệm bội $x=5$ có bản chất như thế nào ta tính theo các bước sau:

$f(x)=2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}$	$f(5)=0$
$f'(x)=4x+1-\dfrac{21}{2}\sqrt{x-1}$	$f'(5)=0$
$f''(x)=4-\dfrac{21}{4\sqrt{x-1}}$	$f''(5)=\dfrac{11}{8}$
$f'''(x)=\dfrac{21}{8\sqrt{(x-1)^3}}$	$f'''(5)=\dfrac{21}{64}$

Như vậy: $\begin{cases} f'(5)=0 \\ f''(5)\neq 0 \\ f'''(5)\neq 0 \end{cases}$ nên phương trình có nghiệm $x=5$ bội kép.

Phân tích hướng giải:

Cả nhân liên hợp và phân tích nhân tử đều cần nhân tử để nhóm. Vậy làm thế nào để nhóm nhân tử với nghiệm kép?

Giả sử ta tìm $g(x)=\sqrt{x-1}+ax+b$ để thỏa mãn có nghiệm $x=5$ bội kép.

Khi đó theo bổ đề ta sẽ có:

$$\begin{cases} g(5)=0 \\ g'(5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-1}+5a+b=0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{5-1}}+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy nhân tử (biểu thức cần nhóm) của bài toán là:

$$\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

Từ nhân tử trên ta có các cách làm sau:

Bài giải:

Cách 1: Nhân liên hợp hoàn toàn.

Điều kiện: $x \ge 1$

Ta có: $2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-7(x-1)\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x-5)^2\left(1+\frac{7(x-1)}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)=0 \Leftrightarrow (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x=5$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 2: Nhân liên hợp không hoàn toàn.

Điều kiện: $x \ge 1$

Ta có: $2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-7(x-1)\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -4\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)\left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)-7(x-1)\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(4\sqrt{x-1}-x-3\right)\left(\sqrt{x-1}+2x-1\right)=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}=x+3$$

$$\Leftrightarrow 16(x-1)=(x+3)^2 \Leftrightarrow (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x=5$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 3: Phân tích thành nhân tử không hoàn toàn:

Chú ý: Nhân tử $\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)$ có thể chuyển thành $\left(4\sqrt{x-1}-x-3\right)$

Điều kiện: $x \ge 1$

Thực hiện chia biểu thức bằng máy tính CASIO:

$$\frac{2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}}{4\sqrt{x-1}-x-3}$$

CHIA BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẰNG MÁY TÍNH CASIO

Các bước thực hiện như sau:

Nhận thấy $x=3$ thì $\sqrt{x-1}=\sqrt{2}\notin Q$

Do đó ta viết biểu thức sau vào máy tính CASIO:

$$\frac{2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}}{4\sqrt{x-1}-x-3}$$

Sau đó ấn CALC để gán giá trị. Cho $X=3$ ta được kết quả là:

$$\frac{2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}}{4\sqrt{x-1}-x-3}=-5-\sqrt{2}$$

Vậy hệ số của $\sqrt{x-1}$ là -1. Tiếp tục viết biểu thức:

$$\frac{2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}}{4\sqrt{x-1}-x-3}+\sqrt{x-1}$$

Ấn CALC để gán cho $X=1000$ ta được:

$$\frac{2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}}{4\sqrt{x-1}-x-3}+\sqrt{x-1}=-1999$$

Nhận thấy $1999=2x-1$ nên ta có:

$$\frac{2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}}{4\sqrt{x-1}-x-3}+\sqrt{x-1}=-2x+1$$

Như vậy: $2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}=\left(-\sqrt{x-1}-2x+1\right)\left(4\sqrt{x-1}-x-3\right)$

Điều kiện: $x\ge 1$

Ta có: $2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}=0$

$$\Leftrightarrow\left(-\sqrt{x-1}-2x+1\right)\left(4\sqrt{x-1}-x-3\right)=0$$

Với $x\ge 1$ ta có $\sqrt{x-1}+2x-1\ge 1>0$.

Do đó : $\left(-\sqrt{x-1}-2x+1\right)\left(4\sqrt{x-1}-x-3\right)=0\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}-x-3=0$

$$\Leftrightarrow 16(x-1)=(x+3)^2\Leftrightarrow(x-5)^2=0\Leftrightarrow x=5$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bên cạnh các phương pháp trên, chúng ta có thể giải bài toán theo các phương pháp khác như sau:

Cách 4: Phân tích thành nhân tử hoàn toàn:

Điều kiện: $x \ge 1$. Ta có:

$$2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-2\right)^2\left(\sqrt{x-1}+2x-1\right)=0$$

Với $x \ge 1$ ta có $\sqrt{x-1}+2x-1 \ge 1 > 0$.

Do đó: $\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2\left(\sqrt{x-1}+2x-1\right)=0 \Rightarrow \sqrt{x-1}=2 \Rightarrow x=5$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 5: Sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy:

Điều kiện: $x \ge 1$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2.\sqrt{x-1} \le \frac{x-1+4}{2} \Rightarrow \sqrt{x-1} \le \frac{x+3}{4}$$

Như vậy: $7(x-1)\sqrt{x-1} \le \dfrac{7(x-1)(x+3)}{4}$

Do đó: $2x^2+x+1 \le \dfrac{7(x-1)(x+3)}{4}$

$$\Leftrightarrow 8x^2+4x+4 \le 7(x-1)(x+3) \Leftrightarrow (x-5)^2 \le 0.$$

Vì $(x-5)^2 \ge 0 \forall x$ do đó $(x-5)^2 \le 0$ khi và chỉ khi $x=5$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 6: Tạo hằng đẳng thức.

Điều kiện: $x \ge 1$.

Ta có: $2x^2+x+1-7(x-1)\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow 8x^2+4x+4-28(x-1)\sqrt{x-1}=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-10x+25\right)+7\left(x^2-2x+1-4(x-1)\sqrt{x-1}+4x-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2+\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)^2=0$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (x-5)^2 \ge 0 \\ \left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow (x-5)^2+\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)^2 \ge 0$$

Vậy $\left(x-5\right)^2+\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)^2=0$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} x=5 \\ x-1=2\sqrt{x-1} \end{cases} \Rightarrow x=5$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 7: Bình phương hai vế:

Điều kiện: $x\geq 1$.

Ta có: $2x^2+x+1=7\left(x-1\right)\sqrt{x-1}\Rightarrow\left(2x^2+x+1\right)^2=49\left(x-1\right)^3$

$\Leftrightarrow 4x^4-45x^3+152x^2-145x+50=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Chúng ta có thể chia đa thức nhanh bằng cách bấm vào máy tính:

$$\frac{4X^4-45X^3+152X^2-145X+50}{\left(X-5\right)^2}$$

Bấm CALC nhập giá trị 100 ta được kết quả là 39502

Do đó:

$$\frac{4X^4-45X^3+152X^2-145X+50}{\left(X-5\right)^2}=3.10000+\left(100-5\right).100+2=4X^2-5X+$$

Như vậy $4x^4-45x^3+152x^2-145x+50=\left(4x^2-5x+2\right)\left(x-5\right)^2$

Chú ý: Sở dĩ ta biết nhân tử khi chia là $\left(x-5\right)^2$ bởi phương trình có nghiệm kép duy nhất $x=5$.

$\Leftrightarrow\left(4x^2-5x+2\right)\left(x-5\right)^2=0$

Vì $4x^2-5x+2>0\forall x$ do đó $\left(x-5\right)^2=0\Leftrightarrow x=5$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 8 : Đặt ẩn phụ hoàn toàn:

Điều kiện: $x\geq 1$.

Xét phương trình $2x^2+x+1=7\left(x-1\right)\sqrt{x-1}$

Đặt $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow x=t^2+1, t\geq 0$.

Khi đó ta có: $2x^2+x+1=7\left(x-1\right)\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 2\left(t^2+1\right)^2+t^2+2-7t^3=0$

$\Leftrightarrow 2t^4-7t^3+5t^2+4=0\Leftrightarrow\left(2t^2+t+1\right)\left(t-2\right)^2=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Chúng ta có thể chia đa thức nhanh bằng cách bấm vào máy tính:

$$\frac{2X^4-7X^3+5X^2+4}{(X-2)^2}$$

Bấm CALC nhập giá trị 100 ta được kết quả là 20101

Do đó: $\frac{2X^4-7X^3+5X^2+4}{(X-2)^2}=2.10000+100+1=2X^2+X+1$

Như vậy $2t^4-7t^3+5t^2+4=(2t^2+t+1)(t-2)^2$

Chú ý: Sở dĩ ta biết nhân tử khi chia là $(t-2)^2$ bởi phương trình có nghiệm kép duy nhất $t=2$.

Vì $2t^2+t+1>0\forall t$ do đó $(t-2)^2=0\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 9 : Đặt ẩn phụ không toàn toàn:

Điều kiện: $x\ge 1$.

Xét phương trình $2x^2+x+1=7(x-1)\sqrt{x-1}$

Đặt $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow x=t^2+1,t\ge 0$.

Khi đó ta có: $2x^2+x+1=7(x-1)\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 2x^2+5x-3-4t^2=7t(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x^2+5x-3-7t(x-1)-4t^2=0\Leftrightarrow(x-4t+3)(2x+t-1)=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Sở dĩ ta phân tích được nhân tử như trên vì đặt $t=100$ ta có:

$2x^2+5x-3-7t(x-1)-4t^2=0\Leftrightarrow 2x^2+5x-3-700(x-1)-40000=0$

$\Leftrightarrow(x-397)(2x+99)=0\Leftrightarrow(x-400+3)(2x+100-1)=0$

Thay 100 bởi t ta được: $2x^2+5x-3-7t(x-1)-4t^2=(x-4t+3)(2x+t-1)$

Do đó: $(x-4t+3)(2x+t-1)=0\Leftrightarrow\left(-\sqrt{x-1}-2x+1\right)\left(4\sqrt{x-1}-x-3\right)=0$

Với $x\ge 1$ ta có $\sqrt{x-1}+2x-1\ge 1>0$.

Do đó : $\left(-\sqrt{x-1}-2x+1\right)\left(4\sqrt{x-1}-x-3\right)=0\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}-x-3=0$

$\Leftrightarrow 16(x-1)=(x+3)^2\Leftrightarrow(x-5)^2=0\Leftrightarrow x=5$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 10 : Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình:

Điều kiện: $x \ge 1$.

Xét phương trình $2x^2 + x + 1 = 7(x-1)\sqrt{x-1}$

Đặt $y = 4\sqrt{x-1} - 3$. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 1 = \dfrac{7(x-1)(y+3)}{4} \\ (y+3)^2 = 16(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 7xy - 17x + 7y + 25 = 0 \\ y^2 - 16x + 6y + 25 = 0 \end{cases}$$

Trừ hai vế của hai phương trình trong hệ ta có:

$$\begin{cases} 8x^2 - 7xy - 17x + 7y + 25 = 0 \\ y^2 - 16x + 6y + 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(8x^2 - 7xy - 17x + 7y + 25\right) - \left(y^2 - 16x + 6y + 25\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (8x + y - 1)(x - y) = 0 \Leftrightarrow \left(8x + 4\sqrt{x-1} - 3 - 1\right)\left(x - 4\sqrt{x-1} + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-\sqrt{x-1} - 2x + 1\right)\left(4\sqrt{x-1} - x - 3\right) = 0$$

Với $x \ge 1$ ta có $\sqrt{x-1} + 2x - 1 \ge 1 > 0$.

Do đó: $\left(-\sqrt{x-1} - 2x + 1\right)\left(4\sqrt{x-1} - x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} - x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 16(x-1) = (x+3)^2 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

IV. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình:

$$20x^2 + 14x + 9 - (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1} = 0$$

Đáp số: $x = 2, x = \dfrac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$

Bài 2: Giải phương trình:

$$2x + 4 + 2\sqrt{x^2 - 1} - (2x - 3)\sqrt{x-1} - (2x + 3)\sqrt{x+1} = 0$$

Đáp số: $x = \dfrac{5}{4}$

Bài 3: Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{\frac{x^2 + x + 1}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2 + 2} - x - \frac{4}{3} = 0$$

Đáp số: $x = 1$

Bài 4: Giải phương trình:

$$2(x+5)\sqrt{3-x}+16\sqrt{x+2}+3x^2-11x-36=0$$

Đáp số: $x=2$

Bài 5: Giải phương trình:

$$5x^2+24x+11-(x^2+14x+13)\sqrt{x+1}+(2x-6)\sqrt{x-2}=0$$

Đáp số: $x=3$

Bài 6: Giải phương trình:

$$x^3-9x-8+(3x+8)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}-5x\sqrt{x+1}-x\sqrt{2x+1}=0$$

Đáp số: $x=0$

Bài 7: Giải phương trình:

$$9x+18-(x+14)\sqrt{x+2}-(x+2)\sqrt{x-1}=0$$

Đáp số: $x=2$

Bài 8: Giải phương trình:

$$x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4(x+6)\sqrt{x+2}=0$$

Đáp số: $x=2$

Bài 9: Giải phương trình:

$$20x-16+(14x+5)\sqrt{x-1}-3(6x-5)\sqrt{x+1}-12\sqrt{x^2-1}=0$$

Đáp số: $x=\frac{5}{4}$

Bài 10: Giải phương trình:

$$x^2+14x+45-4(x+7)\sqrt{x+3}+\frac{8}{\sqrt{x^2-2x+5}}=0$$

Đáp số: $x=1$

Bài 11: Giải phương trình:

$$9x^4-12x^3-7x^2-6x-16+4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}=0$$

Đáp số: $x=1\vee x=-\frac{1}{3}$

Bài 12: Giải phương trình:

$$50x+124+(59x+18)\sqrt{x-1}-(66x+48)\sqrt{x+2}=0$$

Đáp số: $x=2\vee x=\frac{146}{25}$

Bài 13: Giải phương trình:

$$11x+30-(x+2)\sqrt{x-1}-(x+28)\sqrt{x+1}+2\sqrt{x^2-1}=0$$

Đáp số: $x=\dfrac{10+4\sqrt{3}}{3}$

V. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}=0$

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

PHÂN TÍCH NGHIỆM

Ta tìm các nghiệm của phương trình vô tỷ như sau:

Bước 1: Nhập biểu thức : $20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}=0$. Ấn "=" để lưu biểu thức. Mỗi khi muốn sử dụng lại ta ấn nút Up

Bước 2: Ấn Shift + Solve để vào chức năng tìm nghiệm.

Bước 3: Máy hỏi X? Chúng ta nhập cho $X=-10$ để tìm nghiệm gần -10 nhất. Máy cho nghiệm $X=-0.370828694$. Lưu nghiệm vào biến A bằng cách ấn Alpha X + Shift STO + A

Bước 4: Lặp lại bước 2 và 3 nhưng nhập cho $X=0$ để tìm nghiệm gần 0 nhất. Máy cho nghiệm $X=2$

Bước 5: Lặp lại bước 2 và 3 nhưng nhập cho $X=10$ để tìm nghiệm gần 10 nhất. Máy cho nghiệm $X=3.370828694$. Lưu nghiệm vào biến B bằng cách ấn Alpha X + Shift STO + B

Bước 6: Tìm nghiệm phương trình: $\dfrac{20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}{(x-2)(x-A)(x-B)}=0$.

Ta thấy máy báo Can't Solve, tức đã hết nghiệm

Vậy ba nghiệm của bài toán là $x=A$, $x=B$ và $x=2$

Thành thử thấy $A+B=3\in\mathbb{Q}$ nên các nghiệm ta tìm được bao gồm:

- $x=2$
- $x=A=\dfrac{A+B-\sqrt{(A-B)^2}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{14}}{2}$
- $x=B=\dfrac{A+B+\sqrt{(A-B)^2}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{14}}{2}$

Kết luận: Phương trình đã cho chỉ có ba nghiệm: $\left\{2,\dfrac{3-\sqrt{14}}{2},\dfrac{3+\sqrt{14}}{2}\right\}$

KIỂM TRA YẾU TỐ NGHIỆM BỘI

Để kiểm tra yếu tố nghiệm bội của phương trình ta lập bảng tính như sau:

$f(x)=20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}$	$f(2)=0$	$f(A)=0$	$f(B)=0$
$f'(x)=40x+14-\frac{2(28x^2+11x+7)}{\sqrt{2x^2+1}}$	$f'(2)=0$	$f'(A)=$ -12.8264	$f'(B)=$ 0.0992
$f''(x)=40-\frac{2(56x^3+42x+11)}{\sqrt{(2x^2+1)^3}}$	$f''(2)=-\frac{2}{9}$	$f''(A)=$ 50.3220	$f''(B)=$ 0.2384
$f'''(x)=\frac{12(11x-7)}{\sqrt{(2x^2+1)^5}}$	$f'''(2)=\frac{20}{27}$	$f'''(A)=$ -72.4247	$f'''(B)=$ 0.1316

Ta có: $\begin{cases} f'(2)=0 \\ f''(2)\neq 0 \\ f'''(2)\neq 0 \end{cases}$ nên phương trình có nghiệm $x=2$ bội kép.

PHÂN TÍCH HƯỚNG GIẢI

Thứ ta cần vẫn là nhân tử. Bạn có thể trình bày như bài 1 hoặc có thể tìm nhân tử nhanh hơn bằng máy tính cầm tay:

Giả sử nhân tử của bài toán là $\left(\sqrt{2x^2+1}+ax+b\right)$ thì khi đó ta luôn có:

$$\begin{cases} a=-\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x^2+1}\right)\Big|_{x=2}=-\frac{4}{3} \\ b=\left(-\sqrt{2x^2+1}-ax\right)\Big|_{x=2}=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy nhân tử cần tìm là: $\left(\sqrt{2x^2+1}-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)$.

Bước khó nhất của bài toán đã được gỡ bỏ, bây giờ nhiệm vụ của chúng ta chỉ còn là nhóm hợp lý.

Cách 1 : Nhân liên hợp hoàn toàn.

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $20x^2 + 14x + 9 - (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} - (14x + 11)\left(\sqrt{2x^2 + 1} - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(x-2)^2\left(2 - \frac{14x + 11}{3\sqrt{2x^2 + 1} + 4x + 1}\right) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2\left(2\sqrt{2x^2 + 1} - 2x - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \begin{cases} 2x + 3 \ge 0 \\ 4(2x^2 + 1) = (2x + 3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{14}}{2} \end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 2, x = \dfrac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$.

Cách 2 : Phân tích thành nhân tử.

Chú ý nhân tử $\left(\sqrt{2x^2 + 1} - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)$ chính là: $\left(3\sqrt{2x^2 + 1} - 4x - 1\right)$.

Thực hiện chia đa thức bằng máy tính CASIO như sau:

$$\frac{20x^2 + 14x + 9 - (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1}}{3\sqrt{2x^2 + 1} - 4x - 1}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Nhận thấy $x = 1$ thì $\sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ nên ta viết biểu thức sau vào máy tính CASIO:

$$\frac{20x^2 + 14x + 9 - (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1}}{3\sqrt{2x^2 + 1} - 4x - 1}$$

Cho $X = 1$ ta được kết quả là:

$$\frac{20x^2 + 14x + 9 - (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1}}{3\sqrt{2x^2 + 1} - 4x - 1} = -5 + 2\sqrt{3}$$

Vậy hệ số của $\sqrt{2x^2 + 1}$ là 2. Tiếp tục viết biểu thức:

$$\frac{20x^2 + 14x + 9 - (14x + 11)\sqrt{2x^2 + 1}}{3\sqrt{2x^2 + 1} - 4x - 1} - 2\sqrt{2x^2 + 1}$$

Ấn CALC để gán cho $X = 1000$ ta được:

$$\frac{20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}{3\sqrt{2x^2+1}-4x-1}-2\sqrt{2x^2+1}=-2003$$

Nhận thấy $2003 = 2x+3$ nên ta có:

$$\frac{20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}{3\sqrt{2x^2+1}-4x-1}-2\sqrt{2x^2+1}=-2x-3$$

Như vậy nhân tử sau khi được phân tích có dạng sau:

$$20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}=\left(3\sqrt{2x^2+1}-4x-1\right)\left(2\sqrt{2x^2+1}-2x-3\right)$$

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}=0$

$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{2x^2+1}-4x-1\right)\left(2\sqrt{2x^2+1}-2x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3\sqrt{2x^2+1}=4x+1\\2\sqrt{2x^2+1}=2x+3\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $3\sqrt{2x^2+1}=4x+1 \Rightarrow 9(2x^2+1)=(4x+1)^2 \Rightarrow x=2$

Trường hợp 2: $2\sqrt{2x^2+1}=2x+3 \Rightarrow 4(2x^2+1)=(2x+3)^2 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{14}}{2}$

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x=2, x=\frac{3\pm\sqrt{14}}{2}$.

Cách 3 : Bình phương hai vế:

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}=0$

$$\Rightarrow \left(20x^2+14x+9\right)^2=(14x+11)^2\left(2x^2+1\right)$$

PHÂN TÍCH CASIO

Chúng ta có thể chia đa thức nhanh bằng cách bấm vào máy tính:

$$\frac{\left(20X^2+14X+9\right)^2-(14X+11)^2\left(2X^2+1\right)}{(X-2)^2}$$

Bấm CALC nhập giá trị 100 ta được kết quả là 77590.

Do đó: $\dfrac{\left(20X^2+14X+9\right)^2-\left(14X+11\right)^2\left(2X^2+1\right)}{\left(X-2\right)^2}=7.10000+75.100+90$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(20X^2+14X+9\right)^2-\left(14X+11\right)^2\left(2X^2+1\right)}{\left(X-2\right)^2}=7x^2+\left(100-25\right)100+x-10$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(20X^2+14X+9\right)^2-\left(14X+11\right)^2\left(2X^2+1\right)}{\left(X-2\right)^2}=7x^2+\left(x-25\right)x+x-10$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(20X^2+14X+9\right)^2-\left(14X+11\right)^2\left(2X^2+1\right)}{\left(X-2\right)^2}=8x^2-24x-10$$

Như vậy:

$$\left(20x^2+14x+9\right)^2-\left(14x+11\right)^2\left(2x^2+1\right)=2\left(4x^2-12x-5\right)\left(x-2\right)^2$$

Chú ý: Sở dĩ ta biết nhân tử khi chia là $\left(x-2\right)^2$ bởi phương trình có nghiệm kép duy nhất $x=2$.

Như vậy: $\left(20x^2+14x+9\right)^2=\left(14x+11\right)^2\left(2x^2+1\right)$

$$\Leftrightarrow 2\left(4x^2-12x-5\right)\left(x-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2} \end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x=2, x=\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}$.

Cách 4 : Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$

Đặt $\sqrt{2x^2+1}=t$ ta có: $20x^2+14x+9-\left(14x+11\right)\sqrt{2x^2+1}=0$

$$\Leftrightarrow 6t^2+8x^2+14x+3=\left(14x+11\right)t \Leftrightarrow \left(3t-4x-1\right)\left(2t-2x-3\right)=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Sở dĩ ta phân tích được nhân tử như trên vì đặt $t = 100$ ta có:

$$6t^2 + 8x^2 + 14x + 3 = (14x+11)t \Leftrightarrow 60000 + 8x^2 + 14x + 3 = (14x+11)100$$

$$\Leftrightarrow (2x-197)(4x-299) = 0 \Leftrightarrow (2x-200+3)(4x-300+1) = 0$$

Thay 100 bởi t ta được:

$$6t^2 + 8x^2 + 14x + 3 = (14x+11)t \Leftrightarrow (2x-2t+3)(4x-3t+1) = 0$$

Do đó: $(2x-2t+3)(4x-3t+1) = 0$. Thay $\sqrt{2x^2+1} = t$ ta có:

$$\left(3\sqrt{2x^2+1} - 4x - 1\right)\left(2\sqrt{2x^2+1} - 2x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{2x^2+1} = 4x+1 \\ 2\sqrt{2x^2+1} = 2x+3 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $3\sqrt{2x^2+1} = 4x+1 \Rightarrow 9\left(2x^2+1\right) = (4x+1)^2 \Rightarrow x = 2$

Trường hợp 2: $2\sqrt{2x^2+1} = 2x+3 \Rightarrow 4\left(2x^2+1\right) = (2x+3)^2 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 2, x = \dfrac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$.

Cách 5 : Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình:

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$

Đặt $y = \dfrac{3\sqrt{2x^2+1} - 1}{4}$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 20x^2 + 14x + 9 = (14x+11)\left(\dfrac{4}{3}y + \dfrac{1}{3}\right) \\ (4y+1)^2 = 9\left(2x^2+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60x^2 - 56xy + 28x - 44y + 16 = 0 \\ 18x^2 - 16y^2 - 8y + 8 = 0 \end{cases}$$

Trừ hai vế của hai phương trình cho nhau ta được:

$$24x^2 - 56xy + 32y^2 + 28x - 28y = 0 \Leftrightarrow 4(x-y)(6x-8y+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x - \frac{3\sqrt{2x^2+1} - 1}{4}\right)\left(6x - 8\frac{3\sqrt{2x^2+1} - 1}{4} + 7\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{2x^2+1} - 4x - 1\right)\left(2\sqrt{2x^2+1} - 2x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{2x^2+1} = 4x+1 \\ 2\sqrt{2x^2+1} = 2x+3 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $3\sqrt{2x^2+1}=4x+1 \Rightarrow 9\left(2x^2+1\right)=\left(4x+1\right)^2 \Rightarrow x=2$

Trường hợp 2: $2\sqrt{2x^2+1}=2x+3 \Rightarrow 4\left(2x^2+1\right)=\left(2x+3\right)^2 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}$

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x=2, x=\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}$.

Bài 2: Giải phương trình:

$$2x+4+2\sqrt{x^2-1}-\left(2x-3\right)\sqrt{x-1}-\left(2x+3\right)\sqrt{x+1}=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO với:

$$F\left(X\right)=2X+4+2\sqrt{X^2-1}$$
$$-\left(2X-3\right)\sqrt{X-1}-\left(2X+3\right)\sqrt{X+1}$$

Xét các giá trị:

- START = 1
- END = 5
- STEP = 0.5

X	$F(X)$
1	−1.071
1.5	−0.25
2	−1.66
2.5	−3.833
3	−6.585
3.5	−9.829
4	−13.51
4.5	−17.59
5	−22.04

Nhìn bảng giá trị trên ta thấy chưa biết phương trình liệu có nghiệm hay không? Để trả lời chính xác câu hỏi này ta chú ý đến khoảng $(1;2)$ đây là vị trí gần với trục hoành nhất vì vậy có thể hàm số có nghiệm trong khu vực này.

Xét các giá trị:

- START = 1
- END = 2
- STEP = 0.125

X	$F(X)$
1	−1.071
1.125	−0.107
1.25	0
1.375	−0.07
1.5	−0.25
1.625	−0.512
1.75	−0.839
1.875	−1.224
2	−1.66

Đến đây đã sáng tỏ, phương trình có nghiệm bội $x=\dfrac{5}{4}$. Tuy nhiên nghiệm này bội kép hay bội ba ta cần phải kiểm tra tiếp tục.

KIỂM TRA TÍNH CHẤT NGHIỆM BỘI

Lập bảng giá trị như sau:

$f(x)=2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}$	$f\left(\frac{5}{4}\right)=0$
$f'(x)=2-\frac{(6x-7)\sqrt{x+1}+(6x+7)\sqrt{x-1}-4x}{2\sqrt{x^2-1}}$	$f'\left(\frac{5}{4}\right)=0$
$f''(x)=-\frac{2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}-\frac{6x-5}{4\sqrt{(x-1)^3}}-\frac{6x+5}{4\sqrt{(x+1)^3}}$	$f''\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{32}{3}$
$f'''(x)=\frac{6x}{\sqrt{(x^2-1)^5}}+\frac{3(2x-1)}{8\sqrt{(x-1)^5}}+\frac{3(2x+1)}{8\sqrt{(x+1)^5}}$	$f'''\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{448}{9}$

Ta có: $\begin{cases} f'\left(\frac{5}{4}\right)=0 \\ f''\left(\frac{5}{4}\right)\neq 0 \\ f'''\left(\frac{5}{4}\right)\neq 0 \end{cases}$ nên phương trình có nghiệm $x=\frac{5}{4}$ bội kép.

Khác với những bài toán trên, bài toán này vừa có nghiệm bội kép, vừa có nhiều căn thức. Vậy ta sẽ sử lý từng căn thức một để tìm biểu thức cần nhân liên hợp. Tương tự bài 1, ta tìm được các biểu thức cần nhân liên hợp như sau:

- $\left(\sqrt{x^2-1}-\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}\right)$
- $\left(\sqrt{x-1}-x+\frac{3}{4}\right)$
- $\left(\sqrt{x+1}-\frac{1}{3}x-\frac{13}{12}\right)$

Vấn đề bây giờ là cần xử lý khéo léo bởi bài toán có nhiều liên hợp lại chứa rất nhiều căn thức.

Cách 1 : Nhân liên hợp hoàn toàn.

Điều kiện xác định: $x \in [1,+\infty)$.

Ta có : $2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{20x}{3}-\frac{25}{6}-\frac{8}{3}x^2+2\left(\sqrt{x^2-1}-\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}\right)$$

$$-(2x-3)\left(\sqrt{x-1}-x+\frac{3}{4}\right)-(2x+3)\left(\sqrt{x+1}-\frac{1}{3}x-\frac{13}{12}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}(4x-5)^2\left(1+\frac{4}{3\sqrt{x^2-1}+5x-4}+\frac{3(2x-3)}{2\left(4\sqrt{x-1}+4x-3\right)}+\frac{2x+3}{2\left(12\sqrt{x+1}+4x+13\right)}\right)=0$$

Trường hợp 1: Nếu $x \geq \frac{3}{2}$:

Khi đó $1+\frac{4}{3\sqrt{x^2-1}+5x-4}+\frac{3(2x-3)}{2\left(4\sqrt{x-1}+4x-3\right)}+\frac{2x+3}{2\left(12\sqrt{x+1}+4x+13\right)}>0$

Trường hợp 2: Nếu $1 \leq x < \frac{3}{2}$:

Khi đó: $\frac{4}{3\sqrt{x^2-1}+5x-4} > \frac{4}{\frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{7}{5}} > \frac{1}{2}$.

Đặt $A=1+\frac{4}{3\sqrt{x^2-1}+5x-4}+\frac{3(2x-3)}{2\left(4\sqrt{x-1}+4x-3\right)}+\frac{2x+3}{2\left(12\sqrt{x+1}+4x+13\right)}$

Ta có: $A > \frac{3(2x-3)}{2\left(4\sqrt{x-1}+4x-3\right)}+\frac{3}{2} \Rightarrow A > \frac{3\left(3x-3+2\sqrt{x-1}\right)}{4\sqrt{x-1}+4x-3} \geq 0$

Như vậy với mọi $x \in [1,+\infty)$ thì:

$$1+\frac{4}{3\sqrt{x^2-1}+5x-4}+\frac{3(2x-3)}{2\left(4\sqrt{x-1}+4x-3\right)}+\frac{2x+3}{2\left(12\sqrt{x+1}+4x+13\right)}>0$$

Do đó $x=\frac{5}{4}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{5}{4}$.

Bình luận:

Việc khó nhất của bài toán nằm ở biểu thức còn lại trong ngoặc. Chia khoảng giá trị để đánh giá là một cách hay thường dùng trong phương pháp nhân liên hợp. Vậy còn phân tích nhân tử? Liệu bài toán này có phân tích thành nhân tử được không? Chúng ta sẽ tiếp tục phân tích cách tiếp theo đó là phân tích nhân tử.

Cách 2: Phân tích nhân tử.

PHÂN TÍCH CASIO

Bài toán này thường có nhân tử thường có dạng:

$\left(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x-1}+c\right)$

Phổ biến hơn cả là nhân tử dạng $\left(\sqrt{x+1}+m\sqrt{x-1}+n\right)$, tức có chứa cả hai căn thức. Bên cạnh đó, điểm quan trọng chúng ta cần ghi nhớ là nhân tử này sẽ chứa nghiệm bội kép của bài toán.

Vậy khi đó xét hàm $g(x)=\sqrt{x+1}+m\sqrt{x-1}+n$ ta sẽ luôn có:

$$\begin{cases} g\left(\frac{5}{4}\right)=0 \\ g'\left(\frac{5}{4}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}+\frac{1}{2}m+n=0 \\ \frac{1}{3}+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{1}{3} \\ n=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy nhân tử của bài toán này là $\left(\sqrt{x+1}-\frac{1}{3}\sqrt{x-1}-\frac{4}{3}\right)$ hay rút gọn lại là :

$\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)$. Tiếp tục sẽ là chia biểu thức bằng máy tính cầm tay.

$$\frac{2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4}$$

$$=ax+b+c\sqrt{x-1}+d\sqrt{x+1}+e\sqrt{x^2-1}$$

$$=ax+b+c\sqrt{x-1}+\left(d+e\sqrt{x-1}\right)\sqrt{x+1}$$

Chúng ta cần tìm các hệ số a,b,c,d,e. Ta có:

CALC cho $x=1$ để $\sqrt{x-1}$ chẵn, $\sqrt{x+1}$ lẻ ta được:

$$\frac{2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4}=-3-\sqrt{2}$$

tức hệ số của $\sqrt{x+1}$ là -1 hay $d+e\sqrt{x-1}=-1$ tại $x=1$

Từ đó ta tìm được $d=-1$

CALC cho $x=2$ để $\sqrt{x-1}$ chẵn, $\sqrt{x+1}$ lẻ ta được:

$$\frac{2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4}=-5-2\sqrt{3}$$

tức hệ số của $\sqrt{x+1}$ là -2 hay $d+e\sqrt{x-1}=-2$ tại $x=2$

Từ đó ta tìm được $e=-1$

Vậy lấy :

$$\frac{2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}$$

để tìm $ax+b+c\sqrt{x-1}$.

Đơn giản như các bài toán trên, ta CALC cho $x=3$ để $\sqrt{x-1}$ lẻ, ta được:

$$\frac{2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}$$

$$=-5-\sqrt{2}$$

tức hệ số của $\sqrt{x-1}$ là -1 hay $c=-1$

Bước cuối cùng : thêm $\sqrt{x-1}$ và CALC cho x=1000 ta được :

$$\frac{2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}$$

$$=-1002=-x-2$$

Đáp số: $2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}$

$$=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}+x+2\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)$$

Điều kiện xác định: $x\in[1,+\infty)$.

Ta có: $2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}=0$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}+x+2\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0$$

Vì $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}+x+2>0\forall x\in[1,+\infty)$

Do đó: $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}+x+2\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4=0 \Rightarrow 9(x+1)=\left(\sqrt{x-1}+4\right)^2 \Leftrightarrow 8x-6=8\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow (8x-6)^2=64(x-1) \Leftrightarrow 2\left(2\sqrt{x-1}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{5}{4}$.

Bình luận:

Phương pháp phân tích thành nhân tử không hẳn lúc nào cũng phân tích được. Việc phân tích thành nhân tử một phần tùy thuộc vào ý tưởng người ra đề.

Cách 3 : Sử dụng tính đơn điệu của hàm số biện luận số nghiệm.

Điều kiện xác định: $x\in[1,+\infty)$.

Nhận xét: $x=1$ không phải nghiệm của phương trình.

Do đó ta xét $x\in(1,+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}$

Ta có: $f'(x)=2+\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{2x-3}{2\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x-1}-\frac{2x+3}{2\sqrt{x+1}}-2\sqrt{x+1}$

Ta có $f''(x)=-\frac{2}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}-\frac{6x-5}{4\sqrt{(x-1)^3}}-\frac{6x+5}{4\sqrt{(x+1)^3}}<0\forall x>1$.

Do đó hàm số $f'(x)$ là hàm nghịch biến và liên tục với $x\in(1,+\infty)$

Vậy $f'(x)=0$ có tối đa một nghiệm. Dễ thấy nghiệm đó là $x=\frac{5}{4}$.

Lập trục xét dấu ta được $f(x)\le f\left(\frac{5}{4}\right)=0$. Dấu "=" khi và chỉ khi $x=\frac{5}{4}$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{5}{4}$.

Cách 4 : Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình:

Điều kiện xác định: $x\in[1,+\infty)$.

Đặt $a=\sqrt{x-1}$ và $b=\sqrt{x+1}$ ta được:

Ta có: $2x+4+2\sqrt{x^2-1}-(2x-3)\sqrt{x-1}-(2x+3)\sqrt{x+1}=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2+2=0 \\ 2a^3+2b^3-a^2-2ab-b^2-a+b-4=0 \end{cases}$$

Trừ hai vế của hai phương trình ta được:

$$\left(2a^3+2b^3-a^2-2ab-b^2-a+b-4\right)-\left(a^2-b^2+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2a^3-2a^2-\left(2b+1\right)a+\left(2b^3+b-6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(b+a\right)\left(a-3b+4\right)\left(a-3b-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(3\sqrt{x+1}+2-\sqrt{x-1}\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(2+\frac{9\left(x+1\right)-\left(x-1\right)}{3\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(2+\frac{8x+10}{3\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0 \quad (*)$$

Vì $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(2+\frac{8x+10}{3\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)>0\forall x\in\left[1,+\infty\right)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow 3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4=0 \Rightarrow 9\left(x+1\right)=\left(\sqrt{x-1}+4\right)^2$

$$\Leftrightarrow 8x-6=8\sqrt{x-1} \Rightarrow \left(8x-6\right)^2=64\left(x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2\sqrt{x-1}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{5}{4}$.

Cách 5 : Phân tích thành nhân tử hoàn toàn:

Điều kiện xác định: $x\in\left[1,+\infty\right)$.

Ta có: $2x+4+2\sqrt{x^2-1}-\left(2x-3\right)\sqrt{x-1}-\left(2x+3\right)\sqrt{x+1}=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}+x+2\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(3\sqrt{x+1}+2-\sqrt{x-1}\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(2+\frac{9\left(x+1\right)-\left(x-1\right)}{3\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(2+\frac{8x+10}{3\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0\ (*)$$

Vì $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(2+\frac{8x+10}{3\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)>0\forall x\in\left[1,+\infty\right)$

Do đó $(*)\Leftrightarrow 3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4=0\Rightarrow 9\left(x+1\right)=\left(\sqrt{x-1}+4\right)^2$

$$\Leftrightarrow 8x-6=8\sqrt{x-1}\Rightarrow\left(8x-6\right)^2=64\left(x-1\right)\Leftrightarrow 2\left(2\sqrt{x-1}-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{5}{4}$.

Bình luận:

Hy vọng qua 2 bài toán cơ bản trên, bạn đọc có thể hình dung cho mình các hướng đi đúng đắn nhất. Các bài toán từ bài 3 đến bài 19 sẽ chỉ đề cập đến 2 hướng chính:

- Nhân liên hợp.
- Phân tích thành nhân tử.

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2}-x-\frac{4}{3}=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO với:

$$F\left(X\right)=\sqrt[3]{\frac{X^2+X+1}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{6X^2+2}-X-\frac{4}{3}$$

Xét các giá trị:

- START = −1
- END = 3
- STEP = 0.5

Nhìn bảng giá trị trên ta thấy phương trình có một nghiệm duy nhất $x=1$

X	$F\left(X\right)$
−1	1.6933
−0.5	0.8088
0	0.1999
0.5	0.0144
1	0
1.5	$-5.59.10^{-3}$
2	−0.031
2.5	−0.081
3	−0.152

KIỂM TRA TÍNH CHẤT NGHIỆM BỘI

$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2}-x-\frac{4}{3}$	$f(1)=0$
$f'(x)=\frac{2x+1}{9\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+x+1}{3}\right)^2}}+\frac{8x}{3\sqrt[3]{\left(6x^2+2\right)^2}}-1$	$f'(1)=0$
$f''(x)=-\frac{2(x+2)(x-1)}{81\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+x+1}{3}\right)^5}}-\frac{16(x-1)(x+1)}{3\sqrt[3]{\left(6x^2+2\right)^5}}$	$f''(1)=0$
$f'''(x)=\frac{(4x+2)\left(2x^2+2x-13\right)}{729\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+x+1}{3}\right)^8}}+\frac{128x\left(x^2-3\right)}{3\sqrt[3]{\left(6x^2+2\right)^8}}$	$f'''(1)=-\frac{11}{27}$

Ta có : $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f''(1)=0 \\ f'''(1)\neq 0 \end{cases}$ nên phương trình có nghiệm $x=1$ bội ba.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Nếu như bội hai là nhân liên hợp căn thức với $ax+b$ thì bội ba sẽ cao cấp hơn, nhân liên hợp căn thức với ax^2+bx+c

- $g(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}+ax^2+bx+c$ chứa nghiệm $x=1$ bội ba.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} g(1)=0 \\ g'(1)=0 \\ g''(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b+c=0 \\ \frac{1}{3}+2a+b=0 \\ 2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-\frac{1}{3} \\ c=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}-\frac{x+2}{3}\right)$$

$h(x)=\sqrt[3]{6x^2+2}+ax^2+bx+c$ chứa nghiệm $x=1$ bội ba.

hi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} h(1)=0 \\ h'(1)=0 \\ h''(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+a+b+c=0 \\ 1+2a+b=0 \\ 2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là:

$$\left(\sqrt[3]{6x^2+2}-x-1\right)$$

Vậy các nhân tử cần tạo ra cho biểu thức liên hợp là:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}-\frac{x+2}{3}\right) \text{ và } \left(\sqrt[3]{6x^2+2}-x-1\right)$$

Cách 1 : Nhân liên hợp hoàn toàn.

Điều kiện: $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2}-x-\frac{4}{3}=0$

$$\Leftrightarrow x+\frac{4}{3}=\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2}$$

Vì $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}>0, \sqrt[3]{6x^2+2}>0$ do đó ta có điều kiện: $x\in\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$.

Ta có: $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2}-x-\frac{4}{3}=0$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}-\frac{x+2}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{6x^2+2}-x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{27}(x-1)^3(A+B)=0 \text{ (*)}$$

Trong đó: $$\begin{cases} A=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2+x+1}{3}\right)^2}+\dfrac{x+2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{3}}+\left(\dfrac{x+2}{3}\right)^2} \\ B=\dfrac{18}{\sqrt[3]{6x^2+2}+(x+1)\sqrt[3]{6x^2+2}+(x+1)^2} \end{cases}$$

Vì với mọi giá trị $x \in \left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$ ta có $A > 0, B > 0$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách 2 : Sử dụng phương pháp đánh giá

Điều kiện: $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2} - x - \frac{4}{3} = 0$

$\Leftrightarrow x + \frac{4}{3} = \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2}$

Vì $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}} > 0, \sqrt[3]{6x^2+2} > 0$ do đó ta có điều kiện: $x \in \left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$.

Ta có: $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2} - x - \frac{4}{3} = 0$. Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $x > 1$ thì:

- $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}} < \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{3} < \frac{(x+2)^3}{27} \Leftrightarrow (x-1)^3 > 0$ (Luôn đúng)
- $\sqrt[3]{6x^2+2} < x+1 \Leftrightarrow 6x^2+2 < (x+1)^3 \Leftrightarrow (x-1)^3 > 0$ (Luôn đúng)
- Vậy $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2} - x - \frac{4}{3} < 0$ (Vô lý).

Trường hợp 2: Nếu $-\frac{4}{3} < x < 1$ thì:

- $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}} > \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{3} > \frac{(x+2)^3}{27} \Leftrightarrow (x-1)^3 < 0$ (Luôn đúng)
- $\sqrt[3]{6x^2+2} > x+1 \Leftrightarrow 6x^2+2 > (x+1)^3 \Leftrightarrow (x-1)^3 < 0$ (Luôn đúng)
- Vậy $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2} - x - \frac{4}{3} > 0$ (Vô lý).

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 4: Giải phương trình: $2(x+5)\sqrt{3-x}+16\sqrt{x+2}+3x^2-11x-36=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO với:

$F(X)=2(X+5)\sqrt{3-X}+16\sqrt{X+2}$

$+3X^2-11Xx-36$

Xét các giá trị:

- $\text{START}=-2$
- $\text{END}=3$
- $\text{STEP}=0.5$

Nhìn bảng giá trị trên ta thấy phương trình có một nghiệm duy nhất $x=2$.

Tuy nhiên nhìn qua nghiệm này là một nghiệm đơn nhưng để biết chính xác ta cần đánh giá như dưới đây.

X	$F(X)$
-2	11.416
-1.5	13.412
-1	10
-0.5	6.6833
0	3.9479
0.5	1.9407
1	0.6833
1.5	0.1049
2	0
2.5	-0.202
3	-6.222

KIỂM TRA ĐIỀU KIỆN NGHIỆM BỘI

$f(x)=2(x+5)\sqrt{3-x}+16\sqrt{x+2}+3x^2-11x-36$	$f(2)=0$
$f'(x)=-\dfrac{3x-1}{\sqrt{3-x}}+\dfrac{8}{\sqrt{x+2}}+6x-11$	$f'(2)=0$
$f''(x)=\dfrac{3x-17}{2\sqrt{(3-x)^3}}-\dfrac{4}{\sqrt{(x+2)^3}}+6$	$f''(2)=0$
$f'''(x)=\dfrac{3(x-11)}{4\sqrt{(3-x)^5}}+\dfrac{6}{\sqrt{(x+2)^5}}$	$f'''(2)=-\dfrac{105}{16}$

Ta có : $\begin{cases} f'(2)=0 \\ f''(2)=0 \\ f'''(2)\neq 0 \end{cases}$ nên phương trình có nghiệm $x=2$ bội ba.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Trước tiên, ta cũng sẽ đi tìm biểu thức cần nhân liên hợp:

- $g(x)=\sqrt{3-x}+ax^2+bx+c$ chứa nghiệm $x=2$ bội ba.

Khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} g(2)=0 \\ g'(2)=0 \\ g''(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4a+2b+c=0 \\ -\frac{1}{2}+4a+b=0 \\ -\frac{1}{4}+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{8} \\ b=0 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là:

$$\left(\sqrt{3-x}+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)$$

- $h(x)=\sqrt{x+2}+ax^2+bx+c$ chứa nghiệm $x=2$ bội ba.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} h(2)=0 \\ h'(2)=0 \\ h''(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+4a+2b+c=0 \\ \frac{1}{4}+4a+b=0 \\ -\frac{1}{32}+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{64} \\ b=-\frac{5}{16} \\ c=-\frac{23}{16} \end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là :

$$\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{64}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{23}{16}\right)$$

Vậy các liên hợp cần tìm là:

$$\left(\sqrt{3-x}+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right) \text{ và } \left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{64}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{23}{16}\right)$$

PHÂN TÍCH VỀ DẤU

Kiểm tra các liên hợp vừa tìm được ta nhận thấy đã có bội ba cho nghiệm $x=2$ như sau:

$$\left(\sqrt{3-x}+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)\left(\sqrt{3-x}-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}\right)=-\frac{(x+6)(x-2)^3}{64}$$

$$\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{64}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{23}{16}\right)\left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{64}x^2+\frac{5}{16}x+\frac{23}{16}\right)=-\frac{(x-34)(x-2)^3}{4096}$$

Tuy nhiên vấn đề hiện đang nằm ở chỗ ta chưa biết dấu của các nhóm biểu thức $\left(\sqrt{3-x}-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}\right)$ và $\left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{64}x^2+\frac{5}{16}x+\frac{23}{16}\right)$ nên chưa thể vội vàng sử dụng nhân liên hợp trong tình huống này.

Vì vậy để đối phó với trường hợp này, ta có thể sử dụng ứng dụng của phương pháp phân tích nhân tử và nhân liên hợp như sau:

$$\sqrt{3-x}+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}=\frac{\left(\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{3-x}-1\right)^3}{8}=-\frac{\left(\sqrt{3-x}+3\right)(x-2)^3}{8\left(\sqrt{3-x}+1\right)^3}$$

$$\sqrt{x+2}+\frac{1}{64}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{23}{16}=\frac{\left(\sqrt{x+2}+6\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)^3}{64}=\frac{\left(\sqrt{x+2}+6\right)(x-2)^3}{64\left(\sqrt{x+2}+2\right)^3}$$

Như vậy đây chính là những liên hợp cần phải tạo ra.

Điều kiện: $x\in[-2;3]$. Ta có : $2(x+5)\sqrt{3-x}+16\sqrt{x+2}+3x^2-11x-36=0$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x-2)^3-2(x+5)\left(\sqrt{3-x}+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)-16\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{64}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{23}{16}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x-2)^3-(x+5)\frac{\left(\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{3-x}-1\right)^3}{4}-\frac{\left(\sqrt{x+2}+6\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)^3}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x-2)^3+\frac{(x+5)\left(\sqrt{3-x}+3\right)(x-2)^3}{4\left(\sqrt{3-x}+1\right)^3}-\frac{\left(\sqrt{x+2}+6\right)(x-2)^3}{4\left(\sqrt{x+2}+2\right)^3}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x-2)^3\left(1+\frac{(x+5)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{\left(\sqrt{3-x}+1\right)^3}-\frac{\sqrt{x+2}+6}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)^3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x-2)^3\left(1+\frac{(x+5)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{\left(\sqrt{3-x}+1\right)^3}-\frac{\sqrt{x+2}+6}{(x+14)\sqrt{x+2}+6x+20}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x-2)^3\left(\frac{(x+5)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{\left(\sqrt{3-x}+1\right)^3}+\frac{(x+13)\sqrt{x+2}+6x+14}{(x+14)\sqrt{x+2}+6x+20}\right)=0\ (*)$$

Với $x\in[-2;3]$ ta có: $\frac{(x+5)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{\left(\sqrt{3-x}+1\right)^3}+\frac{(x+13)\sqrt{x+2}+6x+14}{(x+14)\sqrt{x+2}+6x+20}>0$

Do đó (*) $\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x-2)^3=0\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 5: Giải phương trình:

$$5x^2+24x+11-\left(x^2+14x+13\right)\sqrt{x+1}+\left(2x-6\right)\sqrt{x-2}=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Điều kiện xác định: $x\in\left[2,+\infty\right)$.

Sử dụng máy tính CASIO để tìm nghiệm giống như bài 4, ta thấy phương trình vô tỷ này có nghiệm duy nhất $x=3$ và là nghiệm bội ba.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

- $g\left(x\right)=\sqrt{x-2}+ax^2+bx+c$ chứa nghiệm $x=3$ bội ba.

Khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}g\left(3\right)=0\\ g'\left(3\right)=0\\ g''\left(3\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+9a+3b+c=0\\ \dfrac{1}{2}+6a+b=0\\ -\dfrac{1}{4}+2a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{8}\\ b=-\dfrac{5}{4}\\ c=\dfrac{13}{8}\end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là:

$$\left(\sqrt{x-2}+\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{13}{8}\right)$$

- $h\left(x\right)=\sqrt{x+1}+ax^2+bx+c$ chứa nghiệm $x=3$ bội ba.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}h\left(3\right)=0\\ h'\left(3\right)=0\\ h''\left(3\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+9a+3b+c=0\\ \dfrac{1}{4}+6a+b=0\\ -\dfrac{1}{32}+2a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{64}\\ b=-\dfrac{11}{32}\\ c=-\dfrac{71}{64}\end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là :

$$\left(\sqrt{x+1}+\frac{1}{64}x^2-\frac{11}{32}x-\frac{71}{64}\right)$$

Vậy các nhân tử liên hợp cần tìm là:

$$\left(\sqrt{x-2}+\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{13}{8}\right)\text{ và }\left(\sqrt{x+1}+\frac{1}{64}x^2-\frac{11}{32}x-\frac{71}{64}\right)$$

Các nhân tử này được phân tích như sau:

- $\sqrt{x-2}+\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{13}{8}=\frac{\left(\sqrt{x-2}+3\right)\left(\sqrt{x-2}-1\right)^3}{8}$
- $\sqrt{x+1}+\frac{1}{64}x^2-\frac{11}{32}x-\frac{71}{64}=\frac{\left(\sqrt{x+1}+6\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)^3}{64}$

Điều kiện xác định: $x\in\left[2,+\infty\right)$.

Ta có: $5x^2+24x+11-\left(x^2+14x+13\right)\sqrt{x+1}+\left(2x-6\right)\sqrt{x-2}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{64}\left(x-3\right)^3\left(x-15\right)-\left(x^2+14x+13\right)\left(\sqrt{x+1}+\frac{1}{64}x^2-\frac{11}{32}x-\frac{71}{64}\right)$$

$$+\left(2x-6\right)\left(\sqrt{x-2}+\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{13}{8}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{64}\left(x-3\right)^3\left(x-15-\frac{\left(x^2+14x+13\right)\left(\sqrt{x+1}+6\right)}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^3}+\frac{16\left(x-3\right)\left(\sqrt{x-2}+3\right)}{\left(\sqrt{x-2}+1\right)^3}\right)=0$$

Ta thấy: $\frac{16\left(x-3\right)\left(\sqrt{x-2}+3\right)}{\left(\sqrt{x-2}+1\right)^3}=\frac{16\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}+3\right)}{\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2}<16$

Suy ra: $x-15-\frac{\left(x^2+14x+13\right)\left(\sqrt{x+1}+6\right)}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^3}+\frac{16\left(x-3\right)\left(\sqrt{x-2}+3\right)}{\left(\sqrt{x-2}+1\right)^3}$

$$<x+1-\frac{\left(x^2+14x+13\right)\left(\sqrt{x+1}+6\right)}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^3}=\left(x+1\right)\left(1-\frac{\left(x+13\right)\left(\sqrt{x+1}+6\right)}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^3}\right)$$

Hay $A<\frac{-64\left(x+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^3}<0$

Với $A=x-15-\frac{\left(x^2+14x+13\right)\left(\sqrt{x+1}+6\right)}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^3}+\frac{16\left(x-3\right)\left(\sqrt{x-2}+3\right)}{\left(\sqrt{x-2}+1\right)^3}$

Vậy $\left(x-3\right)^3=0$ hay $x=3$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 6: Giải phương trình:

$$x^3-9x-8+\left(3x+8\right)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}-5x\sqrt{x+1}-x\sqrt{2x+1}=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Điều kiện xác định: $x\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Sử dụng máy tính CASIO để tìm nghiệm và kiểm tra, ta thấy phương trình vô tỷ này có nghiệm duy nhất $x=0$ bội ba.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Nhận thấy hệ số của $\sqrt{x+1}$ và $\sqrt{2x+1}$ đều chứa nghiệm.

- $g\left(x\right)=\sqrt{2x+1}+ax+b$ chứa nghiệm $x=0$ bội kép.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}g\left(0\right)=0\\g'\left(0\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+b=0\\1+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là:

$$\left(\sqrt{2x+1}-x-1\right)$$

- $h\left(x\right)=\sqrt{x+1}+ax+b$ chứa nghiệm $x=0$ bội kép.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}h\left(0\right)=0\\h'\left(0\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+b=0\\\frac{1}{2}+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=-1\end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là:

$$\left(\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}x-1\right)$$

- $k\left(x\right)=\sqrt{2x+1}\sqrt{x+1}+ax^2+bx+c$ chứa nghiệm $x=0$ bội ba.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}k\left(0\right)=0\\k'\left(0\right)=0\\k''\left(0\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+c=0\\\frac{3}{2}+b=0\\-\frac{1}{4}+2a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{8}\\b=-\frac{3}{2}\\c=-1\end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là:

$$\left(\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x-1\right)$$

Vậy các nhân tử cần tìm là:

$$\left(\sqrt{2x+1}-x-1\right),\ \left(\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}x-1\right) \text{ và } \left(\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x-1\right)$$

Chú ý:

- $\sqrt{2x+1}-x-1=-\dfrac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2}{2}$
- $\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{2}x-1=-\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}{2}$

Vấn đề còn lại của bài toán là xử lý nhóm biểu thức:

$$\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x-1$$

Điều kiện xác định: $x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $x>0$ thì $\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{3}{2}x-1>0$.

Khi đó: $x^3-9x-8+(3x+8)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}-5x\sqrt{x+1}-x\sqrt{2x+1}$

$$>x^3-9x-8+(3x+8)\left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}+1\right)-5x\sqrt{x+1}-x\sqrt{2x+1}$$

Hay: $A>x^3\left(\dfrac{7}{4}+\dfrac{5}{2\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}+\dfrac{4}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2}\right)>0$

Trong đó $A=x^3-9x-8+(3x+8)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}-5x\sqrt{x+1}-x\sqrt{2x+1}$.

Trường hợp 2: Nếu $-\dfrac{1}{2}\le x<0$ thì $\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{3}{2}x-1<0$.

Khi đó: $x^3-9x-8+(3x+8)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}-5x\sqrt{x+1}-x\sqrt{2x+1}$

$$<x^3-9x-8+(3x+8)\left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}+1\right)-5x\sqrt{x+1}-x\sqrt{2x+1}$$

Hay: $A < x^3\left(\dfrac{7}{4}+\dfrac{5}{2\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}+\dfrac{4}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2}\right) < 0$

Trong đó $A = x^3 - 9x - 8 + (3x+8)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} - 5x\sqrt{x+1} - x\sqrt{2x+1}$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Kết luận: Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài 7: Giải phương trình: $9x + 18 - (x+14)\sqrt{x+2} - (x+2)\sqrt{x-1} = 0$

PHÂN TÍCH CASIO

Điều kiện xác định: $x \in [1, +\infty)$.

Sử dụng máy tính CASIO để tìm nghiệm, ta thấy phương trình vô tỷ này có nghiệm duy nhất $x = 2$ và là nghiệm bội ba.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

- $g(x) = \sqrt{x+2} + ax^2 + bx + c$ chứa nghiệm $x = 2$ bội ba.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} g(2) = 0 \\ g'(2) = 0 \\ g''(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 4a + 2b + c = 0 \\ \dfrac{1}{4} + 4a + b = 0 \\ -\dfrac{1}{32} + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{64} \\ b = -\dfrac{5}{16} \\ c = -\dfrac{23}{16} \end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là:

$$\left(\sqrt{x+2} + \frac{1}{64}x^2 - \frac{5}{16}x - \frac{23}{16}\right)$$

- $h(x) = \sqrt{x-1} + ax^2 + bx + c$ chứa nghiệm $x = 2$ bội ba.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} h(2) = 0 \\ h'(2) = 0 \\ h''(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4a + 2b + c = 0 \\ \dfrac{1}{4} + 4a + b = 0 \\ -\dfrac{1}{4} + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{8} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là:

$$\left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{8}x^2-x+\frac{1}{2}\right)$$

Vậy các nhân tử liên hợp cần tìm:

$$\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{64}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{23}{16}\right) \text{ và } \left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{8}x^2-x+\frac{1}{2}\right)$$

Chú ý:

- $\sqrt{x+2}+\frac{1}{64}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{23}{16}=\frac{\left(\sqrt{x+2}+6\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)^3}{64}$
- $\sqrt{x-1}+\frac{1}{8}x^2-x+\frac{1}{2}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+3\right)\left(\sqrt{x-1}-1\right)^3}{8}$

Điều kiện xác định: $x\in\left[1,+\infty\right)$.

Ta có: $9x+18-(x+14)\sqrt{x+2}-(x+2)\sqrt{x-1}$

$$=\frac{9(x-2)^3}{64}-\frac{(x+14)\left(\sqrt{x+2}+6\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)^3}{64}-\frac{(x+2)\left(\sqrt{x-1}+3\right)\left(\sqrt{x-1}-1\right)^3}{8}$$

$$=\frac{9(x-2)^3}{64}-(x+14)\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{64}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{23}{16}\right)-(x+2)\left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{8}x^2-x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(x-2)^3}{64}\left(9-\frac{(x+14)\left(\sqrt{x+2}+6\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)^3}-\frac{8(x+2)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^3}\right)$$

Do đó: $9x+18-(x+14)\sqrt{x+2}-(x+2)\sqrt{x-1}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^3}{64}\left(9-\frac{(x+14)\left(\sqrt{x+2}+6\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)^3}-\frac{8(x+2)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^3}{64}\left(\left(1-\frac{(x+14)\left(\sqrt{x+2}+6\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)^3}\right)+8\left(1-\frac{(x+2)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^3}\right)\right)=0 \text{ (*)}$$

Ta có: $$\begin{cases} 1-\dfrac{(x+14)\left(\sqrt{x+2}+6\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)^3}=\dfrac{-64}{(x+14)\sqrt{x+2}+6x+20}<0\forall x\in\left[1,+\infty\right) \\ 1-\dfrac{(x+2)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^3}=\dfrac{-5}{(x+2)\sqrt{x-1}+3x}<0\forall x\in\left[1,+\infty\right) \end{cases}$$

Do đó $$\left(1-\frac{(x+14)\left(\sqrt{x+2}+6\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)^3}\right)+8\left(1-\frac{(x+2)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^3}\right)<0\forall x\in\left[1,+\infty\right)$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^3}{64}=0\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 8: Giải phương trình: $x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4(x+6)\sqrt{x+2}=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Điều kiện xác định: $x\in\left[1,+\infty\right)$.

Sử dụng máy tính CASIO để tìm nghiệm, ta thấy phương trình vô tỷ này có nghiệm duy nhất $x=2$ và kiểm tra ta thấy đây là nghiệm bội bốn.

Nghiệm bội ba là một trong những bài toán khó nhất của phương trình tuy nhiên để có thể giúp học sinh tiếp cận tới những dạng bài toán khó nhất, chúng ta sẽ đề cập đến dạng bài toán có nghiệm tới bội bốn này.

Để bắt đầu vào bài toán này chúng ta vẫn tiếp tục sử dụng tư duy về nghiệm bội và cách tìm liên hợp về nghiệm bội.

Nếu tiếp tục tư duy theo hướng nghiệm bội ba thì bài toán sẽ trở nên rất lớn và cồng kềnh.

Để ý ta thấy bội bốn là bình phương của bội kép.

Thay vì tìm nhân tử $\sqrt{x-1}+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ (nếu bạn đạo hàm, bạn sẽ được $a=\dfrac{5}{128};b=-\dfrac{3}{8};c=\dfrac{23}{16};d=-3;e=\dfrac{13}{8}$ tuy nhiên việc sử dụng nhân liên hợp như thế này khiến bài toán trở nên rất khó xử lý), bạn hãy tìm nhân tử chứa nghiệm bội kép rồi bình phương lên.

- $g(x)=\sqrt{x-1}+ax+b$ chứa nghiệm $x=2$ bội kép.

Khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} g(2)=0 \\ g'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2a+b=0 \\ \dfrac{1}{2}+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=0 \end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là :

$$\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}x\right)$$

- $h(x)=\sqrt{x+2}+ax+b$ chứa nghiệm $x=2$ bội kép.

Khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} h(2)=0 \\ h'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2a+b=0 \\ \dfrac{1}{4}+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là :

$$\left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\right)$$

Chú ý rằng nếu bình phương các nhân tử kia lên ta sẽ được:

- $\left(\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{2}x\right)^2=\dfrac{1}{4}x^2+x-1-x\sqrt{x-1}$
- $\left(\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{x^2+28x+68}{16}-\dfrac{(x+6)\sqrt{x+2}}{2}$

Vậy các liên hợp ta cần tạo ra sẽ là:

$$\left(\frac{1}{4}x^2+x-1-x\sqrt{x-1}\right) \text{ và } \left(\frac{x^2+28x+68}{16}-\frac{(x+6)\sqrt{x+2}}{2}\right)$$

Điều kiện xác định: $x\in[1,+\infty)$.

Ta có : $x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4(x+6)\sqrt{x+2}=0$

$$\Leftrightarrow x^2+16x+32+2\left(\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}x\right)^2-\frac{1}{4}x^2-x+1\right)$$

$$+8\left(\left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{x^2+28x+68}{16}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}x\right)^2+8\left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\right)^2=0$$

Vì $\begin{cases}\left(\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{2}x\right)^2\ge 0\\ \left(\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}\right)^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow 2\left(\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{2}x\right)^2+8\left(\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}\right)^2\ge 0$

Do đó $2\left(\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{2}x\right)^2+8\left(\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}\right)^2=0$ khi và chỉ khi:

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}x\\ \sqrt{x+2}=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$

Bài 9: Giải phương trình:

$$20x-16+(14x+5)\sqrt{x-1}-3(6x-5)\sqrt{x+1}-12\sqrt{x^2-1}=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Điều kiện xác định: $x\in[1,+\infty)$.

Sử dụng máy tính CASIO để tìm nghiệm, ta thấy phương trình vô tỷ này có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5}{4}$. Đây là nghiệm bội bốn.

Từ kinh nghiệm xử lý trong bài toán trước, chúng ta thống nhất quan điểm rằng những bài toán bội bốn cần thiết phải được đi theo hai bước như sau:

- Bước 1: Tìm nghiệm bội kép.
- Bước 2: Bình phương liên hợp bội kép tìm được.

Khi đó ta có:

- $g(x)=\sqrt{x+1}+a\sqrt{x-1}+b$ chứa nghiệm $x=\dfrac{5}{4}$ bội kép.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}g\left(\dfrac{5}{4}\right)=0\\ g'\left(\dfrac{5}{4}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}a+b=0\\ \dfrac{1}{3}+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{3}\\ b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

Nhân tử của chúng ra là:

$\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)$

- Chia biểu thức bằng máy tính CASIO ta được:

$$\frac{20x-16+(14x+5)\sqrt{x-1}-3(6x-5)\sqrt{x+1}-12\sqrt{x^2-1}}{3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4}$$

$=10x-8-6\sqrt{x^2-1}$

Điều kiện xác định: $x\in\left[1,+\infty\right)$.

Ta có: $20x-16+(14x+5)\sqrt{x-1}-3(6x-5)\sqrt{x+1}-12\sqrt{x^2-1}=0$

$\Leftrightarrow\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)\left(10x-8-6\sqrt{x^2-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)\left(\sqrt{x+1}-3\sqrt{x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\sqrt{x+1}=\sqrt{x-1}+4\\ \sqrt{x+1}=3\sqrt{x-1}\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $3\sqrt{x+1}=\sqrt{x-1}+4\Leftrightarrow\begin{cases}9(x+1)=x-1+16+8\sqrt{x-1}\\ x\geq 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-3=4\sqrt{x-1}\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4x-3)^2=16(x-1)\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$ (Thỏa mãn điều kiện)

Trường hợp 2: $\sqrt{x+1}=3\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x+1=9(x-1)\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5}{4}$.

Bài 10: Giải phương trình: $x^2+14x+45-4(x+7)\sqrt{x+3}+\dfrac{8}{\sqrt{x^2-2x+5}}=0$

PHÂN TÍCH CASIO

Điều kiện xác định: $x\in\left[-3,+\infty\right)$.

Sử dụng máy tính CASIO để tìm nghiệm, ta thấy phương trình vô tỷ này có nghiệm duy nhất $x=1$ và đó là nghiệm bội bốn.

Đầu tiên ta sẽ tìm biểu thức liên hợp của $\sqrt{x+3}$ trước:

- $g(x)=\sqrt{x+3}+ax+b$ chứa nghiệm $x=1$ bội kép.

Khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} g(1)=0 \\ g'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+a+b=0 \\ \dfrac{1}{4}+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Vậy nhân tử của chúng ta là :

$$\left(\sqrt{x+3}-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}\right)$$

Bình phương bội kép ta được bội bốn:

$$\left(\sqrt{x+3}-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{x^2+30x+97}{16}-\frac{x+7}{2}\sqrt{x+3}$$

Do đó ta có: $x^2+14x+45-4(x+7)\sqrt{x+3}+\dfrac{8}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

$$=8\left(\sqrt{x+3}-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{8}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{1}{2}x^2-x-\frac{7}{2}$$

Việc còn lại là xử lý nhóm biểu thức $\dfrac{8}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{7}{2}$.

Tương tự các ví dụ trên, ta có thể phân tích thành nhân tử biểu thức trên thành: $\dfrac{8}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{7}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x+5}+4\right)\left(\sqrt{x^2-2x+5}-2\right)^2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}$

Điều kiện xác định: $x\in[-3,+\infty)$.

Ta có: $x^2+14x+45-4(x+7)\sqrt{x+3}+\dfrac{8}{\sqrt{x^2-2x+5}}=0$

$$\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{x+3}-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+5}+4\right)\left(\sqrt{x^2-2x+5}-2\right)^2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}=0$$

Vì $\left(\sqrt{x+3}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{7}{4}\right)^2\geq 0,\left(\sqrt{x^2-2x+5}-2\right)^2\geq 0$

Đồng thời $\sqrt{x^2-2x+5}+4>0,\sqrt{x^2-2x+5}>0$

Do đó: $8\left(\sqrt{x+3}-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+5}+4\right)\left(\sqrt{x^2-2x+5}-2\right)^2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}\geq 0$

Vậy $8\left(\sqrt{x+3}-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+5}+4\right)\left(\sqrt{x^2-2x+5}-2\right)^2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+3}=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}\\\sqrt{x^2-2x+5}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\sqrt{x+3}=x+7\\x^2-2x+5=4\end{cases}\Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 11: Giải phương trình:

$$9x^4-12x^3-7x^2-6x-16+4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Sử dụng máy tính CASIO để tìm nghiệm, ta thấy phương trình vô tỷ này có nghiệm $x=1$ và $x=-\frac{1}{3}$.

Kiểm tra điều kiện nghiệm bội ta thấy $x=1$ và $x=-\frac{1}{3}$ đều là các nghiệm bội kép. Như vậy nhân tử của biểu thức liên hợp có dạng $(x-1)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Đầu tiên, ta cần tìm nhân tử chứa cả 2 nghiệm $x=1$ và $x=-\frac{1}{3}$.

Nhân tử có dạng: $\left(\sqrt{x^2+x+2}+ax+b\right)$

Thay 2 nghiệm $x=1$ và $x=-\frac{1}{3}$ vào nhóm biểu thức trên ta có hệ phương trình như sau: $\begin{cases}2+a+b=0\\\frac{4}{3}-\frac{a}{3}+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=-\frac{3}{2}\end{cases}$

Nhân tử của bài toán sẽ là: $\left(2\sqrt{x^2+x+2}-x-3\right)^2$

Chia biểu thức bằng máy tính CASIO ta được:

$$\frac{9x^4-12x^3-7x^2-6x-16+4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}}{\left(2\sqrt{x^2+x+2}-x-3\right)^2}$$

$$=4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}+5x^2+10x+16$$

Sử dụng phương pháp đổi dấu trước căn ta thấy:

$$-4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}+5x^2+10x+16=\left(-2\sqrt{x^2+x+2}+x+2\right)\left(-2\sqrt{x^2+x+2}+x+4\right.$$

Chứng tỏ rằng ta luôn có:

$$4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}+5x^2+10x+16$$

$$=\left(2\sqrt{x^2+x+2}+x+2\right)\left(2\sqrt{x^2+x+2}+x+4\right)$$

Vậy bài toán ban đầu được phân tích thành nhân tử như sau:

$$9x^4-12x^3-7x^2-6x-16+4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}$$

$$=\left(2\sqrt{x^2+x+2}-x-3\right)^2\left(2\sqrt{x^2+x+2}+x+2\right)\left(2\sqrt{x^2+x+2}+x+4\right)$$

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $9x^4-12x^3-7x^2-6x-16+4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x^2+x+2}-x-3\right)^2\left(2\sqrt{x^2+x+2}+x+2\right)\left(2\sqrt{x^2+x+2}+x+4\right)=0$$

Trường hợp 1: $2\sqrt{x^2+x+2}=x+3$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\4\left(x^2+x+2\right)=(x+3)^2\end{cases}\Rightarrow x=1\vee x=-\frac{1}{3}$$

Trường hợp 2: $2\sqrt{x^2+x+2}=-(x+2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -2\\4\left(x^2+x+2\right)=(x+2)^2\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

Trường hợp 3: $2\sqrt{x^2+x+2}=-(x+4)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -4\\4\left(x^2+x+2\right)=(x+4)^2\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

Kết luận: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $x=1\vee x=-\frac{1}{3}$.

Bài 12: Giải phương trình:

$$50x+124+(59x+18)\sqrt{x-1}-(66x+48)\sqrt{x+2}=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Điều kiện xác định: $x\geq 1$.

Sử dụng máy tính CASIO để tìm nghiệm, ta thấy phương trình vô tỷ này có nghiệm $x=2$ và $x=\frac{146}{25}$.

Kiểm tra điều kiện nghiệm bội ta thấy phương trình này có nghiệm $x=2$ bội kép và $x=\frac{146}{25}$ cũng bội kép. Chứng tỏ có một nhân tử bình phương chứa cả hai nghiệm $x=2$ và $x=\frac{146}{25}$.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Đầu tiên, ta cần tìm nhân tử chứa cả hai nghiệm $x=2$ và $x=\frac{146}{25}$.

Nhân tử có dạng:

$$\left(\sqrt{x-1}+a\sqrt{x+2}+b\right)$$

Thay các nghiệm $x=2$ và $x=\frac{146}{25}$ vào biểu thức trên, khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1+2a+b=0\\ \frac{11}{5}+\frac{14}{5}a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\\ b=2\end{cases}$$

Nhân tử của bài toán sẽ là:

$$\left(2\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+2}+4\right)^2$$

Chia biểu thức bằng máy tính CASIO ta được:

$$\frac{50x+124+(59x+18)\sqrt{x-1}-(66x+48)\sqrt{x+2}}{\left(2\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+2}+4\right)^2}$$

$$=\sqrt{x-1}+6\sqrt{x+2}+6$$

Điều kiện xác định: $x\geq 1$

Ta có: $50x+124+(59x+18)\sqrt{x-1}-(66x+48)\sqrt{x+2}=0$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+2}+4\right)^2\left(\sqrt{x-1}+6\sqrt{x+2}+6\right)=0$$

Trường hợp 1: $2\sqrt{x-1}+4=3\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-1)+16+16\sqrt{x-1}=9(x+2) \\ x \geq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16\sqrt{x-1}=5x+6 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 256(x-1)=25x^2+60x+36 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \vee x=\frac{146}{25}$$

Trường hợp 2: $\sqrt{x-1}+6\sqrt{x+2}+6=0$. Trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt đó là $x=2$ và $x=\frac{146}{25}$.

Bài 13: Giải phương trình:

$$11x+30-(x+2)\sqrt{x-1}-(x+28)\sqrt{x+1}+2\sqrt{x^2-1}=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Điều kiện xác định: $x \geq 1$.

Sử dụng máy tính CASIO ta thu được nghiệm $x=\frac{10+4\sqrt{3}}{3}$.

Kiểm tra điều kiện nghiệm bội ta nhận thấy nghiệm $x=\frac{10+4\sqrt{3}}{3}$ là nghiệm bội kép. Nghiệm vô tỷ mà bội kép thì chứng tỏ bình phương của phương trình bậc 2 chứa nó là một nhân tử của phương trình. Bài toán này có hai dạng căn thức nên chắc chắn bình phương nhân tử dạng $\left(\sqrt{x-1}+a\sqrt{x+1}+b\right)$ là một phần của bài toán.

PHÂN TÍCH NHÂN TỬ LIÊN HỢP

Đầu tiên, ta cần tìm nhân tử chứa nghiệm $x=\frac{10+4\sqrt{3}}{3}$.

Nhân tử có dạng: $\left(\sqrt{x-1}+a\sqrt{x+1}+b\right)$

Thay nghiệm $x=\frac{10+4\sqrt{3}}{3}$ vào nhóm biểu thức trên ta có:

$$1+\frac{2\sqrt{3}}{3}+a\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+b=0 \Leftrightarrow 1+2a+b+\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{a}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+2a+b=0 \\ \dfrac{2}{3}+\dfrac{a}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$$

Vậy nhân tử của bài toán sẽ là: $\left(\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+1}+3\right)^2$

Chia biểu thức bằng máy tính CASIO ta được:

$$\frac{11x+30-(x+2)\sqrt{x-1}-(x+28)\sqrt{x+1}+2\sqrt{x^2-1}}{\left(\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+1}+3\right)^2}=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-1$$

Như vậy: $11x+30-(x+2)\sqrt{x-1}-(x+28)\sqrt{x+1}+2\sqrt{x^2-1}$

$$=\left(\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+1}+3\right)^2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-1\right)$$

Điều kiện: $x\ge 1$.

Ta có: $11x+30-(x+2)\sqrt{x-1}-(x+28)\sqrt{x+1}+2\sqrt{x^2-1}=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+1}+3\right)^2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-1\right)=0$$

Với điều kiện $x\ge 1$ ta có $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-1\ge\sqrt{2}-1>0$.

Do đó $\sqrt{x-1}+3=2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+9+6\sqrt{x-1}=4(x+1) \\ x\ge 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{x-1}=3x-4 \\ x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36(x-1)=(3x-4)^2 \\ x\ge\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{10+4\sqrt{3}}{3}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{10+4\sqrt{3}}{3}$.

VI. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Giải phương trình:

$$x^2+8-4(x-2)\sqrt{x+1}=0$$

Bài 2: Giải phương trình:

$$12x^2-15x+4+(8x-3)\sqrt{3x-1}=0$$

Bài 3: Giải phương trình:

$$2x^2-3x+4-2(x+1)\sqrt{x-1}=0$$

Bài 4: Giải phương trình:

$$8x^2+21x+9+(12x+9)\sqrt{2x+1}=0$$

Bài 5: Giải phương trình:

$$9x^2-17x-38-(3x-37)\sqrt{x+1}=0$$

Bài 6: Giải phương trình:

$$x^2+5x+6-(x+2)\sqrt{x^2+3x+3}=0$$

Bài 7: Giải phương trình:

$$x^3-3x^2+x-1-\left(2x^2-5x+1\right)\sqrt{x^2-x+1}=0$$

Bài 8: Giải phương trình:

$$26x^3-9x^2+7x-1-\left(22x^2-7x+1\right)\sqrt{x^2+1}=0$$

Bài 9: Giải phương trình:

$$2+(2x-3)\sqrt{3-x}-(6x-5)\sqrt{1-x}=0$$

Bài 10: Giải phương trình:

$$16x+46+11\sqrt{x+2}-13\sqrt{x+3}-16\sqrt{x^2+5x+6}=0$$

Bài 11: Giải phương trình:

$$x^2-7x+16+(3x-8)\sqrt{x+2}-(3x+8)\sqrt{x-1}+6\sqrt{x^2+x-2}=0$$

Bài 12: Giải phương trình:

$$\frac{148x}{15}-\frac{373}{30}+2\sqrt{x^2-4}-(2x-3)\sqrt{x-2}-(2x+3)\sqrt{x+2}=0$$

Bài 13: Giải phương trình:

$$8x^3-12x^2+10x=\sqrt[3]{24x^2+2}+\sqrt[3]{12x^2-6x+1}$$

Bài 14: Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{2x\left(3x^4-11x^2+12\right)}+x^2-3x-2-\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}\,(2x-1)=0$$

Bài 15: Giải phương trình:

$$x^2+12x+23-(2x-10)\sqrt{x-1}-(4x+16)\sqrt{x+4}=0$$

Bài 16: Giải phương trình:

$$x^3-7x^2-x-14+(x+2)\sqrt{x-1}+(5x+6)\sqrt{x+2}=0$$

Bài 17: Giải phương trình:

$$21x+28-\sqrt{x-3}x\sqrt{2x+1}+(x-36)\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}x=0$$

Bài 18: Giải phương trình:

$$(x+8)\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}-2(x+4)\sqrt{x-1}-2(x+3)\sqrt{x+2}+12=0$$

Bài 19: Giải phương trình:

$$6x+14-2(x+5)\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}-(x+13)\sqrt{x+1}+4(x+5)\sqrt{3-x}=0$$

Bài 20: Giải phương trình:

$$6x+2+2\sqrt{x-1}-(3+x)\sqrt{x+2}-3\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}=0$$

Bài 21: Giải phương trình:

$$3x-8+(x-4)\sqrt{x-4}-x\sqrt{x-3}=0$$

Bài 22: Giải phương trình:

$$x^2+18x+40+(x+10)\sqrt{x-2}-8(x+3)\sqrt{x+3}=0$$

Bài 23: Giải phương trình:

$$x^2+32x+73-3(x+13)\sqrt{x+4}-6(x+3)\sqrt{x-1}=0$$

Bài 24: Giải phương trình:

$$x^4+4x^3+7x^2+14x+18-4(x+3)\sqrt{x+2}=0$$

Bài 25: Giải phương trình:

$$5x+16-4\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}-12\sqrt{x+2}+6\sqrt{x-1}=0$$

Bài 26: Giải phương trình:

$$6x+24+6\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}-(x+29)\sqrt{x+1}-(x+7)\sqrt{x-2}=0$$

Bài 27: Giải phương trình:

$$\frac{2}{\sqrt{2x^2-8x+12}}+\frac{21}{2}x^2-2x-7-2(5x-2)\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}=0$$

Bài 28: Giải phương trình:

$$\frac{8}{\sqrt{2x^2-4x+6}}+2x^2+28x+94-8(x+7)\sqrt{x+3}=0$$

Bài 29: Giải phương trình:

$$x^4+9x^2+4x^3+12x+14-\left(x^3+4x^2+7x+8\right)\sqrt{x^2+3}=0$$

Bài 30: Giải phương trình:

$$x^2+5x+6-4(x+2)\sqrt{x-1}-2(x+3)\sqrt{x+1}+8\sqrt{x^2-1}=0$$

Bài 31: Giải phương trình:

$$x^2+4x-5-2(x+5)\sqrt{x-2}-4(x-1)\sqrt{x+1}+8\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}=0$$

Bài 32: Giải phương trình:

$$19x+31-(41x-31)\sqrt{x+1}+8(5x-1)\sqrt{x-2}-8\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}=0$$

VII. Mở rộng: Sử dụng yếu tố nghiệm bội trong bài toán giải bất đẳng thức, cực trị.

Chúng ta đã đề cập đến các dạng bài toán về phương trình vô tỷ nghiệm bội với rất nhiều các phương pháp đã được đưa ra. Điều quan trọng là mỗi ứng dụng để được dựa trên quan điểm lý thuyết về hàm số, về cực trị, về sự tiếp xúc của các đồ thị đối với nhau.

Tuy nhiên bên cạnh các ứng dụng trong bài toán phương trình, bất phương trình, nghiệm bội còn có ứng dụng rất sâu sắc trong việc định hướng phương pháp giải bất đẳng thức.

Chắc hẳn trong số các bạn độc giả đã từng biết đến một trong các phương pháp giải bất đẳng thức là phương pháp tiếp tuyến. Thực chất tiếp tuyến là một dạng của nghiệm bội. Để có thể tìm hiểu rõ hơn, chúng ta sẽ cùng đến với các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=a^3+b^3+c^3-(a-1)\sqrt{a+3}-(b-1)\sqrt{b+3}-(c-1)\sqrt{c+3}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Trong bài toán này, nếu chúng ta muốn tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P, ta có thể đưa ra một suy nghĩ đơn giản là làm thế nào để so sánh P với biểu thức $(a+b+c)$ bởi ta đã có đẳng thức $a+b+c=3$.

Nghiệm bội phản ánh một phương trình hay một hàm số có giá trị tương đương với một hằng đẳng thức. Vì vậy nếu tạo ra được một hàm số đánh giá giữa các biến a,b,c với từng biến riêng biệt ta sẽ giải quyết được bài toán trên.

Chẳng hạn ta có:

$$\begin{cases} a^2+1\ge 2a \\ b^2+1\ge 2b \Rightarrow a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3 \\ c^2+1\ge 2c \end{cases}$$

Các biểu thức đánh giá ở trên được phân tích dựa vào yếu tố nghiệm bội

$x=1$ cho hàm số $f\left(x\right)=x^2+1-2x$. Như vậy ta hình dung được cách giải bất đẳng thức bằng nghiệm bội như sau:

Dữ kiện: Cho biết $A\left(x\right)+A\left(y\right)+A\left(z\right)=\alpha$.

Yêu cầu: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $P=B\left(x\right)+B\left(y\right)+B\left(z\right)$.

Xét hàm số: $f\left(x\right)=m.A\left(x\right)-n.B\left(x\right)+p$.

Mục tiêu: Cần tìm các hệ số m,n,p sao cho $f\left(x\right)$ có nghiệm bội là q trong đó q là nghiệm của phương trình: $3A\left(x\right)=\alpha$ (Người ta còn gọi q là điểm rơi).

Xét phương trình $f\left(x\right)=x^3-\left(x-1\right)\sqrt{x+3}+mx+n=0$ có nghiệm bội $x=1$ (chính là điểm rơi của bài toán).

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}f\left(1\right)=0\\ f'\left(1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+m+n=0\\ 1+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\ n=0\end{cases}$$

Vậy biểu thức cần phân tích của chúng ta là:

$$f\left(x\right)=x^3-\left(x-1\right)\sqrt{x+3}-x=\left(x-1\right)\left(x^2+x-\sqrt{x+3}\right)$$

$$=\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\left(x+2\right)\sqrt{x+3}+2x+3\right)$$

$$=\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\left(x+2\right)\sqrt{x+3}+2x+3\right)\geq 0$$

Lời giải:

Ta xét: $f\left(x\right)=x^3-\left(x-1\right)\sqrt{x+3}-x=\left(x-1\right)\left(x^2+x-\sqrt{x+3}\right)$

$$=\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\left(x+2\right)\sqrt{x+3}+2x+3\right)$$

$$=\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\left(x+2\right)\sqrt{x+3}+2x+3\right)\geq 0\forall x>0$$

Áp dụng yếu tố trên, ta có:

$$P=a^3+b^3+c^3-\left(a-1\right)\sqrt{a+3}-\left(b-1\right)\sqrt{b+3}-\left(c-1\right)\sqrt{c+3}$$

$$\Leftrightarrow P-3=a^3+b^3+c^3-\left(a-1\right)\sqrt{a+3}-a-\left(b-1\right)\sqrt{b+3}-b-\left(c-1\right)\sqrt{c+3}-c$$

$$\Leftrightarrow P-3=\left(a^3-\left(a-1\right)\sqrt{a+3}-a\right)+\left(b^3-\left(b-1\right)\sqrt{b+3}-b\right)+\left(c^3-\left(c-1\right)\sqrt{c+3}-c\right)$$

Vì $\begin{cases} a^3-(a-1)\sqrt{a+3}-a\ge 0. \\ b^3-(b-1)\sqrt{b+3}-b\ge 0, \text{ do đó } P-3\ge 0\forall a,b,c>0,a+b+c=3. \\ c^3-(c-1)\sqrt{c+3}-c\ge 0. \end{cases}$

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3 khi $a=b=c=1$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho $a,b,c,d\ge\frac{1}{2}$ và $a+b+c+d=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=5\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+2\left(\sqrt{2a-1}+\sqrt{2b-1}+\sqrt{2c-1}+\sqrt{2d-1}\right)$$

Bài 2: Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2+a+b+c=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{a^4}{a^2+1}+\frac{b^4}{b^2+1}+\frac{c^4}{c^2+1}$$

Ví dụ 2: Cho $a,b,c>0$ và $\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{a^3}{a^2+a+1}+\frac{b^3}{b^2+b+1}+\frac{c^3}{c^2+c+1}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Dựa theo ý tưởng của bài toán Ví dụ 1, chúng ta xét phương trình:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}+\frac{mx^2}{x+1}+n=0$$

Trong đó phương trình có một nghiệm bội $x=1$.

Khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{8}{9} \\ n=\frac{1}{9} \end{cases}$$

Vậy ta sẽ chứng tỏ rằng: $f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-\frac{8x^2}{9(x+1)}+\frac{1}{9}\ge 0\forall x>0$

Điều này là hoàn toàn chính xác bởi:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-\frac{8x^2}{9(x+1)}+\frac{1}{9}=\frac{\left(x^2+4x+1\right)(x-1)^2}{9\left(x^2+x+1\right)(x+1)}\ge 0\forall x>0$$

Như vậy ta đã có cơ sở để giải quyết bài toán ban đầu.

Lời giải:

Ta xét $f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-\frac{8x^2}{9\left(x+1\right)}+\frac{1}{9}$ với $x\in\left(0;+\infty\right)$. Khi đó ta có:

$$f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-\frac{8x^2}{9\left(x+1\right)}+\frac{1}{9}=\frac{\left(x^2+4x+1\right)\left(x-1\right)^2}{9\left(x^2+x+1\right)\left(x+1\right)}\geq 0\forall x>0$$

Mặt khác $P=f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)+\frac{8}{9}\left(\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}\right)-\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow P\geq\frac{8}{9}\left(\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}\right)-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P\geq 1$$

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của của P là 1 khi $a=b=c=1$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho $a,b,c>0$ và $\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}$$

Bài 2: Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{\left(a+b\right)^3}{2\left(a+b\right)^2+1}+\frac{\left(b+c\right)^3}{2\left(b+c\right)^2+1}+\frac{\left(c+a\right)^3}{2\left(c+a\right)^2+1}$

Ví dụ 3: Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{a^3}{a^2+a+1}+\frac{b^3}{b^2+b+1}+\frac{c^3}{c^2+c+1}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Trong các bài toán trước chúng ta đề cập tới các dữ kiện dạng tổng. Tuy nhiên bài toán này sử dụng dữ kiện dạng tích. Chính vì vậy điều quan trọng đầu tiên ta cần tìm cách chuyển đổi dạng tích sang dạng tổng và có thể nghĩ đến cách sử dụng hàm số logarit: $\ln abc=\ln a+\ln b+\ln c=0$

Vậy ta cần tìm m,n sao cho phương trình: $f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2+x+1}+m\ln x+n=0$ có nghiệm bội $x=1$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{2}{3} \\ n=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy ta cần chứng minh: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-\dfrac{2}{3}\ln x-\dfrac{1}{3}\geq 0\forall x>0$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-\dfrac{2}{3}\ln x-\dfrac{1}{3}$ với $x\in(0;+\infty)$. Khi đó ta có:

$$f'(x)=\frac{x^2\left(x^2+2x+3\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}-\frac{2}{3x}=\frac{(x-1)\left(3x^4+7x^3+12x^2+6x+2\right)}{3\left(x^2+x+1\right)^2x}$$

Lập bảng biến thiên ta được: $f(x)\geq f(1)=0\forall x>0$

Như vậy: $P=f(a)+f(b)+f(c)+\dfrac{2}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)+1$

$\Rightarrow P\geq\dfrac{2}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)+1\Leftrightarrow P\geq 1$

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của của P là 1 khi $a=b=c=1$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho $a,b,c>0$ và $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)=27$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2$.

Bài 2: Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=a+b+c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)$.

Ví dụ 4: Cho $a,b,c>0$ và $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=18-12\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$P=a\sqrt{1-2a}+b\sqrt{1-2b}+c\sqrt{1-2c}$

PHÂN TÍCH CASIO

Trước hết ta đánh giá điểm rơi của bất đẳng thức chính là: $a=b=c=\sqrt{2}-1$.

Do đó ta cần tìm m,n sao cho:

Phương trình: $f(x)=x\sqrt{1-2x}+m(x-1)^2+n=0$ có nghiệm bội $x=\sqrt{2}-1$

(chính là điểm rơi của bài toán)

Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} f\left(\sqrt{2}-1\right)=0 \\ f'\left(\sqrt{2}-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{1}{2} \\ n=0 \end{cases}$

Vậy biểu thức cần tìm là:

$$f\left(x\right)=x\sqrt{1-2x}-\frac{1}{2}\left(x-1\right)^2=-\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{1-2x}\right)^2\le 0$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=x\sqrt{1-2x}-\frac{1}{2}\left(x-1\right)^2$ với $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Khi đó ta có: $f\left(x\right)=x\sqrt{1-2x}-\frac{1}{2}\left(x-1\right)^2=-\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{1-2x}\right)^2\le 0\ \forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$

Mặt khác: $P=f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)+\frac{1}{2}\left(\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-1\right)^2\right)$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\left(\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-1\right)^2\right)\Rightarrow P\le 9-6\sqrt{2}\,.$$

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $9-6\sqrt{2}\,1$ khi $a=b=c=\sqrt{2}-1$

Ví dụ 5: Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=\frac{a^3}{a^2+\left(b+c\right)^2}+\frac{b^3}{b^2+\left(b+c\right)^2}+\frac{c^3}{c^2+\left(c+a\right)^2}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Ta cần tìm m,n sao cho phương trình: $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x^2+\left(3-x\right)^2}+mx+n=0$ có nghiệm bội $x=1$ (chính là điểm rơi của bài toán)

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f\left(1\right)=0 \\ f'\left(1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{17}{25} \\ n=\dfrac{12}{25} \end{cases}$$

Vậy biểu thức cần phân tích của chúng ta là:

$$f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2+\left(3-x\right)^2}-\frac{17}{25}x+\frac{12}{25}$$

Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+(3-x)^2}-\dfrac{17}{25}x+\dfrac{12}{25}$ với $x\in(0;3)$

Ta có: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+(3-x)^2}-\dfrac{17}{25}x+\dfrac{12}{25}=-\dfrac{9(x-12)(x-1)^2}{25(2x^2-6x+9)}\le 0\forall x\in(0;3)$

Mặt khác: $P=f(a)+f(b)+f(c)+\dfrac{17}{25}(a+b+c)-\dfrac{36}{25}$

$\Rightarrow P\le\dfrac{17}{25}(a+b+c)-\dfrac{36}{25}\Rightarrow P\le\dfrac{3}{5}$.

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{5}$ khi $a=b=c=1$.

CHỦ ĐỀ 13: MỘT CÁCH TIẾP CẬN KHÁC CỦA BÀI TOÁN NGHIỆM BỘI BA

I. Đặt vấn đề.

Trong chủ đề trước chúng ta đã phân tích các cách sử dụng nhân liên hợp cho các bài toán nghiệm bội cấp cao. Các định dạng nghiệm bội như sau:

- Nghiệm bội 2: $(x-a)^2A(x)$.
- Nghiệm bội 3: $(x-a)^3A(x)$.
- Nghiệm bội 4: $(x-a)^4A(x)$.
- Hai nghiệm bội 2: $(x-a)^2(x-b)^2A(x)$.

Trong các bài toán nghiệm bội trên, các dạng bài toán bội chẵn như bội 2, 4 hai nghiệm bội 2 có cách xử lý không quá khó, tuy nhiên bài toán nghiệm bội 3 gặp nhiều vấn đề trong cách xử lý bởi để tìm liên hợp bội ba chúng t cần kiểm tra điều kiện nghiệm bội đồng thời tìm biểu thức liên hợp thôn qua việc tính đạo hàm cấp hai. Đây là một công việc không phải đơn giả nhất là với những bạn có khả năng biến đổi không tốt.

Chính vì vậy, để giúp các bạn có thể xử lý dễ dàng hơn các bài toán nghiệm bội ba, trong chủ đề này, tôi sẽ giới thiệu cách xử lý ngắn gọn, đơn giản và dễ làm với yêu cầu chỉ cần tính đến đạo hàm cấp một.

Tuy nhiên trong chủ đề này ta chỉ tập trung vào bài toán bội ba, với các bài toán bội bốn, hai nghiệm bội kép và những bài toán có bội cao hơn nữa, ta cần phải giải quyết bằng hướng tư duy dựa trên những kiến thức đã được trình bày trong chủ đề 12.

II. Kiến thức cơ bản.

Qua chủ đề số 12, ta nhận thấy như sau:

- Bài toán bội ba là bài toán mà ở đó hàm số với nghiệm bội ba có hình dáng giống với hàm số cắt trục hoành tại một nghiệm đơn.
- Bài toán bội ba được tính đạo hàm cấp 1 như sau:

$$\left((x-\alpha)^3 A(x)\right)' = 3(x-\alpha)^2 A(x) + (x-\alpha)^3 A'(x)$$

$$\Rightarrow \left((x-\alpha)^3 A(x)\right)' = (x-\alpha)^2 \left(3A(x) + (x-\alpha)A'(x)\right)$$

Như vậy bài toán bội ba có đạo hàm là một bài toán bội kép (bội 2).

Do đó để phân loại bài toán bội ba, khi gặp một phương trình vô tỷ có dạng $f(x)=0$, ta có thể thực hiện theo các bước sau:

- Sử dụng chức năng TABLE của máy tính để kiểm tra phương trình, ta nhận thấy phương trình có một nghiệm đơn $x=\alpha$.
- Sử dụng chức năng $\frac{d}{dx}$ để kiểm tra tính chất nghiệm bội.
  - Nếu $\frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)\Big|_{x=\alpha} \neq 0$, như vậy $x=\alpha$ là nghiệm đơn.
  - Nếu $\frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)\Big|_{x=\alpha} = 0$, và $f'(\alpha)=0$ thì $x=\alpha$ là nghiệm bội ba.
- Để tìm liên hợp cho căn $\sqrt[n]{A(x)}$ trong bài toán, chúng ta thực hiện theo các bước như sau:
  - Đặt $\sqrt[n]{A(x)} = ax^2+bx+c$.
  - Ta có: $a = \frac{d}{dx}\left(\frac{A'(x)}{2n.\sqrt[n]{A(x)}}\right)\Bigg|_{x=\alpha}$

- Ta có: $b = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{A(x)}\right)\Big|_{x=\alpha} - 2a\alpha$
- Ta có: $c = \sqrt[n]{A(\alpha)} - a\alpha^2 - b\alpha$
- Lập bảng giá trị ta tìm được các hệ số a,b,c từ đó chỉ ra biểu thức liên hợp cần tìm.

  Với cách đánh giá như trên, nghiệm vẫn có thể là bội 5, 7, 9,... chứ không chỉ có thể dừng lại ở bội 3. Để khẳng định chắc chắn là nghiệm bội 3, ta cần chứng tỏ rằng $f^{(3)}(\alpha) \neq 0$. Tuy nhiên việc tính đạo hàm này không hề đơn giản. Cách đánh giá của chúng ta chỉ có thể khẳng định đây là nghiệm bội lẻ, không phải nghiệm đơn và cũng không phải nghiệm bội chẵn. Dẫu vậy, trong chương trình phổ thông, các nghiệm có bội cao nhất thường chỉ dừng lại ở bội 4, do đó cách đánh giá trên ta có thể coi là chấp nhận được đối với các bài toán bội 3 và ưu thế của phương pháp này là cách đánh giá nghiệm bội cũng như tìm liên hợp cho biểu thức chứa căn nhanh gọn, chính xác.

III. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Giải phương trình: $x\left(x^2 - 2x + 3\right) = \sqrt{2\left(x^3 + x^2 - x + 1\right)}$

Đáp số: $x = 1$

Bài 2: Giải phương trình: $x^3 + x^2 + 1 = \sqrt{2x^2 + 1 - 2x^3}$

Đáp số: $x = 0$

Bài 3: Giải phương trình: $2x + 3 = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt[3]{6x^2 + 12x + 8}$

Đáp số: $x = 0$

Bài 4: Giải phương trình: $x^3 + (5x+4)\sqrt{2x+1} - (7x+4)\sqrt{x+1} = 0$

Đáp số: $x = 0$

Bài 5: Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{x} = 2x + 1 + \sqrt[3]{3x^2 - 3x + 1}$

Đáp số: $x = 1$

Bài 6: Giải phương trình:

$$2\left(2x^2 + 3x + 1\right)\sqrt{x^2 + 3x - 1} = 9(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(4x^2 + 3x + 5\right)\sqrt{x^2 + 2}$$

Đáp số: $x = 1$

IV. Hướng dẫn giải.

Bài 1: Giải phương trình: $x\left(x^2-2x+3\right)=\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO với:

$$F(X)=X\left(X^2-2X+3\right)-\sqrt{2\left(X^3+X^2-X+1\right)}$$

Xét các giá trị:

- START = 0
- END = 8
- STEP = 1

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=1$.

Tuy nhiên ta cần kiểm tra kỹ nghiệm này.

X	$F(X)$
0	-1.414
1	0
2	1.3095
3	9.7537
4	31.59
5	72.911
6	139.77
7	238.21
8	374.26

Điều kiện nghiệm bội:

Vì $\left(x\left(x^2-2x+3\right)-\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}\right)'=3x^2-4x+3-\dfrac{3x^2+2x-1}{\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}}$

Do phương trình $3x^2-4x+3-\dfrac{3x^2+2x-1}{\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}}=0$ có nghiệm $x=1$

đồng thời $\dfrac{d}{dx}\left(3x^2-4x+3-\dfrac{3x^2+2x-1}{\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}}\right)\Bigg|_{x=1}=0$

Vậy $x=1$ là nghiệm bội ba. Đặt $g(x)=\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}=ax^2+bx+c$.

Lập bảng giá trị với nghiệm $\alpha=1$:

Giá trị cần tìm	**Kết quả**
$a=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{g'(x)}{2}\right)\Bigg\|_{x=\alpha}$	1
$b=\dfrac{d}{dx}\left(g(x)\right)\Big\|_{x=\alpha}-2a\alpha$	0
$c=g(\alpha)-a\alpha^2-b\alpha$	1

Với các giá trị a,b,c tìm được ở trên, ta có: $\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}=x^2+1$

Vậy liên hợp cần tìm là: $\left(x^2+1-\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}\right)$

Điều kiện: $x\geq 0$. Ta có:

$$x\left(x^2-2x+3\right)=\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}\Leftrightarrow x^3-2x^2+3x-\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3-3x^2+3x-1\right)+\left(x^2+1-\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^3+\frac{\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^3+x^2-x+1\right)}{x^2+1+\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^3+\frac{\left(x-1\right)^3\left(x+1\right)}{x^2+1+\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^3\left(1+\frac{x+1}{x^2+1+\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}}\right)=0\ (*)$$

Vì $x\geq 0$ nên $1+\dfrac{x+1}{x^2+1+\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}}>0$.

Do đó $(*)\Rightarrow\left(x-1\right)^3=0\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bình luận: Bài toán trên sẽ rất khó nếu học sinh không nắm chắc về bản chất của phương trình. Bằng việc sử dụng linh hoạt các công cụ các nhau của máy tính CASIO sẽ giúp chúng ta phát hiện được bản chất nghiệm bội của phương trình để từ đó đưa ra quyết định giải bài đúng đắn nhất.

Bài 2: Giải phương trình: $x^3+x^2+1=\sqrt{2x^2+1-2x^3}$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO với:

$F\left(X\right)=X^3+X^2+1-\sqrt{2X^2+1-2X^3}$

X	F(X)
−2	−8
−1	−1.236

Xét các giá trị:

- START = -2
- END = 6
- STEP = 1

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=0$.

Tuy nhiên ta cần kiểm tra kỹ nghiệm này.

0	0
1	2
2	ERROR
3	ERROR
4	ERROR
5	ERROR
6	ERROR

Điều kiện nghiệm bội:

Vì $\left(x^3+x^2+1-\sqrt{2x^2+1-2x^3}\right)'=3x^2+2x-\dfrac{2x-3x^2}{\sqrt{2x^2+1-2x^3}}$

Do phương trình $3x^2+2x-\dfrac{2x-3x^2}{\sqrt{2x^2+1-2x^3}}=0$ có nghiệm $x=0$

Đồng thời $\dfrac{d}{dx}\left(3x^2+2x-\dfrac{2x-3x^2}{\sqrt{2x^2+1-2x^3}}\right)\Bigg|_{x=0}=0$

Vậy $x=0$ là nghiệm bội ba. Đặt $g(x)=\sqrt{2x^2+1-2x^3}=ax^2+bx+c$.

Lập bảng giá trị với nghiệm $\alpha=0$:

Giá trị cần tìm	**Kết quả**
$a=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{g'(x)}{2}\right)\Bigg\|_{x=\alpha}$	1
$b=\dfrac{d}{dx}\left(g(x)\right)\Big\|_{x=\alpha}-2a\alpha$	0
$c=g(\alpha)-a\alpha^2-b\alpha$	1

Với các giá trị a,b,c tìm được ở trên, ta có: $\sqrt{2x^2+1-2x^3}=x^2+1$

Vậy liên hợp cần tìm là: $\left(x^2+1-\sqrt{2x^2+1-2x^3}\right)$

Điều kiện: $\begin{cases}x^3+x^2+1\ge 0\\2x^3-2x^2-1\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^3+x^2+4>0\\2x^3-2x^2-8<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+2)\left(x^2-x+2\right)>0\\2(x-2)\left(x^2+x+2\right)<0\end{cases}$

Vì $\begin{cases}x^2-x+2>0\forall x\in\mathbb{R}\\x^2+x+2>0\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$ do đó điều kiện của phương trình: $x\in(-2;2)$.

Ta có: $x^3 + x^2 + 1 = \sqrt{2x^2 + 1 - 2x^3} \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 1 - \sqrt{2x^2 + 1 - 2x^3} = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + \frac{\left(x^2+1\right)^2 - \left(2x^2+1-2x^3\right)}{x^2+1+\sqrt{2x^2+1-2x^3}} = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{x^4+2x^2+1-2x^2-1+2x^3}{x^2+1+\sqrt{2x^2+1-2x^3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + \frac{x^4+2x^3}{x^2+1+\sqrt{2x^2+1-2x^3}} = 0 \Leftrightarrow x^3\left(1 + \frac{x+2}{x^2+1+\sqrt{2x^2+1-2x^3}}\right) = 0 \ (*)$$

Vì $x \in (-2;2)$ do đó $1 + \dfrac{x+2}{x^2+1+\sqrt{2x^2+1-2x^3}} > 0$.

Vậy (*) $\Rightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bình luận: Bên cạnh việc phát hiện ra bản chất nghiệm bội ba thì một trong những vấn đề quan trọng của bài toán đó là việc đánh giá điều kiện một cách hợp lý. Trong bài toán trên nếu không đánh giá chính xác được điều kiện $x \in (-2;2)$ thì việc xử lý bài toán sẽ trở nên khó khăn hơn.

Bài 3: Giải phương trình: $2x + 3 = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt[3]{6x^2 + 12x + 8}$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO với:

$F(X) = 2X + 3 - \sqrt[3]{3X^2 + 3X + 1} - \sqrt[3]{6X^2 + 12X + 8}$

Xét các giá trị:

- START $= -1$
- END $= 7$
- STEP $= 1$

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x = 0$.

Tuy nhiên ta cần kiểm tra kỹ nghiệm này.

X	F(X)
−1	−1.259
0	0
1	0.1245
2	0.5057
3	1.0573
4	1.7266
5	2.4835
6	3.309
7	4.1901

Điều kiện nghiệm bội:

$$\left(2x + 3 - \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 1} - \sqrt[3]{6x^2 + 12x + 8}\right)'$$

$$= 2 - \frac{2x+1}{\left(\sqrt[3]{3x^2+3x+1}\right)^2} - \frac{4x+4}{\left(\sqrt[3]{6x^2+12x+8}\right)^2}$$

Do phương trình $2-\frac{2x+1}{\left(\sqrt[3]{3x^2+3x+1}\right)^2}-\frac{4x+4}{\left(\sqrt[3]{6x^2+12x+8}\right)^2}=0$ có nghiệm là $x=0$ đồng thời $\frac{d}{dx}\left(2-\frac{2x+1}{\left(\sqrt[3]{3x^2+3x+1}\right)^2}-\frac{4x+4}{\left(\sqrt[3]{6x^2+12x+8}\right)^2}\right)\Bigg|_{x=0}=0$

Vậy $x=0$ là nghiệm bội ba. Đặt $g(x)=\sqrt[3]{3x^2+3x+1}=ax^2+bx+c$.

Lập bảng giá trị với nghiệm $\alpha=0$:

Giá trị cần tìm	**Kết quả**
$a=\frac{d}{dx}\left(\frac{g'(x)}{2}\right)\Big\|_{x=\alpha}$	0
$b=\frac{d}{dx}(g(x))\Big\|_{x=\alpha}-2a\alpha$	1
$c=g(\alpha)-a\alpha^2-b\alpha$	1

Với các giá trị a,b,c tìm được ở trên, ta có: $\sqrt[3]{3x^2+3x+1}=x+1$

Đặt $g(x)=\sqrt[3]{6x^2+12x+8}=ax^2+bx+c$.

Lập bảng giá trị với nghiệm $\alpha=0$:

Giá trị cần tìm	**Kết quả**
$a=\frac{d}{dx}\left(\frac{g'(x)}{2}\right)\Big\|_{x=\alpha}$	0
$b=\frac{d}{dx}(g(x))\Big\|_{x=\alpha}-2a\alpha$	1
$c=g(\alpha)-a\alpha^2-b\alpha$	2

Với các giá trị a,b,c tìm được ở trên, ta có: $\sqrt[3]{6x^2+12x+8}=x+2$

Vậy các liên hợp cần tìm là:

$\left(x+1-\sqrt[3]{3x^2+3x+1}\right)$ và $\left(x+2-\sqrt[3]{6x^2+12x+8}\right)$

Điều kiện: Vì $\begin{cases}\sqrt[3]{3x^2+3x+1}>0\forall x\in\mathbb{R}\\ \sqrt[3]{6x^2+12x+8}>0\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$ do đó ta có: $x\in\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$

Đặt $x+1=a, x+2=b, \sqrt[3]{3x^2+3x+1}=c, \sqrt[3]{6x^2+12x+8}=d$

Ta có: $2x+3=\sqrt[3]{3x^2+3x+1}+\sqrt[3]{6x^2+12x+8}$

$$\Leftrightarrow\left(x+1-\sqrt[3]{3x^2+3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt[3]{6x^2+12x+8}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)^3-\left(3x^2+3x+1\right)}{a^2+ac+c^2}+\frac{(x+2)^3-\left(6x^2+12x+8\right)}{b^2+bd+d^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^3}{a^2+ac+c^2}+\frac{x^3}{b^2+bd+d^2}=0\Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{a^2+ac+c^2}+\frac{1}{b^2+bd+d^2}\right)=0\ (*)$$

Do $\frac{1}{a^2+ac+c^2}+\frac{1}{b^2+bd+d^2}>0$ cho nên $(*)\Rightarrow x^3=0\Leftrightarrow x=0$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bình luận: Trong bài toán này ta thấy không chỉ có căn bậc hai mà cả căn bậc ba cũng có thể nhân liên hợp tạo ra nghiệm bội ba một cách dễ dàng.

Bài 4: Giải phương trình:

$$x^3+(5x+4)\sqrt{2x+1}-(7x+4)\sqrt{x+1}=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO với:

$$F(X)=X^3+(5X+4)\sqrt{2X+1}-(7X+4)\sqrt{X+1}$$

Xét các giá trị:

- START $=-1$
- END $=7$
- STEP $=1$

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=0$.

Tuy nhiên ta cần kiểm tra kỹ nghiệm này.

X	F(X)
−1	ERROR
0	0
1	1.0321
2	8.128
3	27.269
4	64.445
5	125.65
6	216.88
7	344.13

Điều kiện nghiệm bội:

Vì $\left(x^3+(5x+4)\sqrt{2x+1}-(7x+4)\sqrt{x+1}\right)'=3x^2+\frac{15x+9}{\sqrt{2x+1}}-\frac{21x+18}{2\sqrt{x+1}}$

Do phương trình $3x^2+\frac{15x+9}{\sqrt{2x+1}}-\frac{21x+18}{2\sqrt{x+1}}=0$ có nghiệm $x=0$,

Đồng thời $\frac{d}{dx}\left(3x^2+\frac{15x+9}{\sqrt{2x+1}}-\frac{21x+18}{2\sqrt{x+1}}\right)\Bigg|_{x=0}=0$.

Vậy $x=0$ là nghiệm bội ba.

Tuy nhiên quan sát kỹ trong phương trình đã có sẵn một nghiệm bội ba $x=0$ đó chính là biểu thức x^3. Như vậy ta sẽ liên hợp hai nhóm biểu thức còn lại với nhau.

Điều kiện: $x\ge-\frac{1}{2}$.

Ta có: $x^3+(5x+4)\sqrt{2x+1}-(7x+4)\sqrt{x+1}=0$

$$\Leftrightarrow x^3+\frac{(5x+4)^2(2x+1)-(7x+4)^2(x+1)}{(5x+4)\sqrt{2x+1}+(7x+4)\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+\frac{x^3}{(5x+4)\sqrt{2x+1}+(7x+4)\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow x^3\left(1+\frac{1}{(5x+4)\sqrt{2x+1}+(7x+4)\sqrt{x+1}}\right)=0\ (*)$$

Với $x\ge-\frac{1}{2}$ ta có $1+\frac{1}{(5x+4)\sqrt{2x+1}+(7x+4)\sqrt{x+1}}>0$.

Do đó (*) $\Rightarrow x^3=0\Leftrightarrow x=0$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bình luận: Trong bài toán này ta thấy khi giải phương trình nghiệm bội ba ta không chỉ tập trung vào việc tìm liên hợp mà còn phải tư duy để có những quyết định giải bài hợp lý hơn.

Để ý rằng với $x=0$ nên ta xét hằng đẳng thức:

$$\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}\right)^3=(5x+4)\sqrt{2x+1}-(7x+4)\sqrt{x+1}$$

Điều kiện: $x\ge-\frac{1}{2}$.

Ta có: $x^3+(5x+4)\sqrt{2x+1}-(7x+4)\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x^3+\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}\right)^3=0$

$$\Leftrightarrow x^3+\frac{x^3}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)^3}=0\Leftrightarrow x^3\left(1+\frac{1}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)^3}\right)=0$$

Với $x\geq -\frac{1}{2}$ ta có $1+\frac{1}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)^3}>0$.

Do đó (*) $\Rightarrow x^3=0\Leftrightarrow x=0$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 5: Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{x}=2x+1+\sqrt[3]{3x^2-3x+1}$

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO với:

$F(X)=(X+3)\sqrt{X}-2X-1-\sqrt[3]{3X^2-3X+1}$

Xét các giá trị:

- START = 0
- END = 8
- STEP = 1

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=1$.

Tuy nhiên ta cần kiểm tra kỹ nghiệm này.

X	$F(X)$
0	−2
1	0
2	0.1581
3	0.7239
4	1.6677
5	2.952
6	4.5474
7	6.4309
8	8.5839

Điều kiện nghiệm bội:

Vì $\left((x+3)\sqrt{x}-2x-1-\sqrt[3]{3x^2-3x+1}\right)'=\sqrt{x}+\frac{x+3}{2\sqrt{x}}-2-\frac{2x-1}{\left(\sqrt[3]{3x^2-3x+1}\right)^2}$

Do phương trình $\sqrt{x}+\frac{x+3}{2\sqrt{x}}-2-\frac{2x-1}{\left(\sqrt[3]{3x^2-3x+1}\right)^2}$ có nghiệm $x=1$

Đồng thời $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\frac{x+3}{2\sqrt{x}}-2-\frac{2x-1}{\left(\sqrt[3]{3x^2-3x+1}\right)^2}\right)\Bigg|_{x=1}=0$

Vậy $x=1$ là nghiệm bội ba. Đặt $g(x)=\sqrt[3]{3x^2-3x+1}=ax^2+bx+c$.

Lập bảng giá trị với nghiệm $\alpha = 1$:

Giá trị cần tìm	**Kết quả**
$a=\frac{d}{dx}\left(\frac{g'(x)}{2}\right)\bigg\vert_{x=\alpha}$	0
$b=\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)\Big\vert_{x=\alpha}-2a\alpha$	1
$c=g(\alpha)-a\alpha^2-b\alpha$	0

Với các giá trị a,b,c tìm được ở trên, ta có: $\sqrt[3]{3x^2-3x+1}=x$

Vậy liên hợp cần tìm là: $\left(x-\sqrt[3]{3x^2-3x+1}\right)$

Điều kiện: $x \geq 0$. Ta có:

$$(x+3)\sqrt{x}=2x+1+\sqrt[3]{3x^2-3x+1} \Leftrightarrow (x+3)\sqrt{x}-2x-1-\sqrt[3]{3x^2-3x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\sqrt{x}-3x-1+\left(x-\sqrt[3]{3x^2-3x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^3+\frac{(x-1)^3}{x^2+x\sqrt[3]{3x^2-3x+1}+\left(\sqrt[3]{3x^2-3x+1}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^3\left(1+\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x^2+x\sqrt[3]{3x^2-3x+1}+\left(\sqrt[3]{3x^2-3x+1}\right)^2}\right)=0\ (*)$$

Vì $1+\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x^2+x\sqrt[3]{3x^2-3x+1}+\left(\sqrt[3]{3x^2-3x+1}\right)^2}>0$ do đó (*) $\Rightarrow x=1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bình luận: Bên cạnh việc tìm biểu thức liên hợp bậc 3, các nhóm biểu thức khác đôi khi nhìn qua có vẻ khó khăn trong cách xử lý, tuy nhiên ta cần để ý rằng vì có nghiệm bội 3 nên ta hoàn toàn có thể tạo thành hằng đẳng thức. Dựa vào yếu tố này ta có thể hoàn thiện được bài toán.

Bài 6: Giải phương trình:

$$2\left(2x^2+3x+1\right)\sqrt{x^2+3x-1}=9\left(x-1\right)\sqrt{x^2+x+1}+\left(4x^2+3x+5\right)\sqrt{x^2+2}$$

(Phạm Quốc Đông – THPT Quang Trung – Quảng Bình)

PHÂN TÍCH CASIO

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO với:

$$F\left(X\right)=2\left(2X^2+3X+1\right)\sqrt{X^2+3X-1}$$
$$-9\left(X-1\right)\sqrt{X^2+X+1}-\left(4X^2+3X+5\right)\sqrt{X^2+2}$$

Xét các giá trị:

- START = 0
- END = 8
- STEP = 1

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=1$.

X	$F\left(X\right)$
0	ERROR
1	0
2	0.052
3	0.1627
4	0.2702
5	0.3619
6	0.4381
7	0.5015
8	0.5548

Tuy nhiên ta cần kiểm tra kỹ nghiệm này.

Điều kiện nghiệm bội:

$$\left(2\left(2x^2+3x+1\right)\sqrt{x^2+3x-1}-9\left(x-1\right)\sqrt{x^2+x+1}-\left(4x^2+3x+5\right)\sqrt{x^2+2}\right)'$$

$$=\frac{12x^3+42x^2+21x-3}{\sqrt{x^2+3x-1}}-\frac{36x^2+9x+9}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{12x^3+6x^2+21x+6}{\sqrt{x^2+2}}$$

Do $\frac{12x^3+42x^2+21x-3}{\sqrt{x^2+3x-1}}-\frac{36x^2+9x+9}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{12x^3+6x^2+21x+6}{\sqrt{x^2+2}}=0$ có nghiệm $x=1$ đồng thời ta có:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{12x^3+42x^2+21x-3}{\sqrt{x^2+3x-1}}-\frac{36x^2+9x+9}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{12x^3+6x^2+21x+6}{\sqrt{x^2+2}}\right)\Bigg|_{x=1}=0$$

Vậy $x=1$ là nghiệm bội ba.

Bên cạnh việc phân tích liên hợp của các biểu thức chứa căn, như Bài 4 đã phân tích, việc quan sát thấy khi $x=1$ ta có:

$$\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2+2}$$

Do đó ta có thể tạo ra các hằng đẳng bậc 3 thức xung quanh các căn thức trên với nhau.

Ta có: $2\left(2x^2+3x+1\right)\sqrt{x^2+3x-1}=9\left(x-1\right)\sqrt{x^2+x+1}+\left(4x^2+3x+5\right)\sqrt{x^2+2}$

$$\Leftrightarrow\left[\sqrt{x^2+3x-1}^3-3\left(x^2+3x-1\right)\sqrt{x^2+x+1}+3\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+x+1}^3\right]$$

$$+\left[\sqrt{x^2+x+1}^3-3\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+2}+3\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2}^3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)^3+\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2}\right)^3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2\left(x-1\right)}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+x+1}}\right)^3+\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2}}\right)^3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^3\left[\frac{8}{\left(\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)^3}+\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2}\right)^3}\right]=0\ (*)$$

Vì $\dfrac{8}{\left(\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)^3}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2}\right)^3}>0$

Do đó $(*)\Rightarrow\left(x-1\right)^3=0\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bình luận: Kỹ thuật tạo hằng đẳng thức luôn ẩn chứa những yếu tố bất ngờ và vô cùng đặc sắc khi tiếp cận các bài toán phương trình vô tỷ. Điều kiện để sử dụng được phương pháp này là phát hiện các yếu tố có giá trị bằng nhau trong phương trình.

PHẦN 2: BÀI TẬP TỔNG HỢP

- ***Hướng dẫn cách đặt vấn đề và tư duy khi bắt đầu với bài toán phương trình – bất phương trình – hệ phương trình.***
- ***Giải bài toán phương trình – bất phương trình – hệ phương trình theo nhiều cách giải khác nhau.***
- ***Phân tích cách định hướng bài toán dựa trên cơ sở dữ liệu của máy tính CASIO.***

CÁC ĐỊNH HƯỚNG KHI GIẢI BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Sau tất cả những kỹ năng đã học từ 13 chủ đề trước, chắc hẳn chúng ta đã tự đặt ra câu hỏi rằng, sử dụng các phương pháp đó trong những tình huống nào? Đối với mỗi bài toán phương trình, bất phương trình và hệ phương trình chúng ta cần bắt đầu từ đâu?

1. Bài toán phương trình – bất phương trình.

Đối với dạng bài toán phương trình, bất phương trình, đầu tiên trước khi làm bài, ta nên định hướng bằng cách sử dụng chức năng TABLE để khảo sát kỹ đường đi của bài toán, đặt ra các câu hỏi và trả lời cụ thể như sau:

- Nghiệm của phương trình, bất phương trình đó là gì (đối với các nghiệm hữu tỷ)?
- Nghiệm của phương trình, bất phương trình đó nằm trong khoảng nào (đối với các nghiệm hữu tỷ với phân số lớn hoặc các bài toán chứa nghiệm vô tỷ)? Đối với nghiệm vô tỷ, ta có thể dùng nghiệm xấp xỉ để chỉ ra chính xác nghiệm đó hay không?
- Nghiệm của phương trình, bất phương trình đó là nghiệm đơn hay nghiệm bội? Nếu là nghiệm bội sẽ là nghiệm bội 2, hay bội 3, bội 4, hay 2 nghiệm bội 2?
- Coi phương trình, bất phương trình như một hàm số thì hàm số đó có đơn điệu hay không?
- Mối quan hệ của các căn thức với các biểu thức chứa biến dạng đơn giản (bậc nhất, bậc hai,...) là gì?

Khi đã trả lời được các câu hỏi đó, ta sẽ định hướng bài toán như sau:

Định hướng 1: Nếu hàm số là một hàm đơn điệu, ta sẽ sử dụng đánh giá tính đơn điệu của hàm số, chứng minh hàm số luôn đơn điệu trong tập xác định từ đó chỉ ra phương trình có một nghiệm duy nhất.

Định hướng 2: Đối với phương trình, bất phương trình chứa một nghiệm duy nhất và sử dụng phương pháp nhân liên hợp, thông thường có hai cách tư duy như sau:

- Nếu nghiệm của phương trình, bất phương trình là nghiệm vô tỷ, ta tính nghiệm xấp xỉ, sau đó thay vào các căn thức và tìm mối liên hệ giá của của căn thức và biến ban đầu.
  - Nếu nghiệm vô tỷ là nghiệm đơn, ta tạo các biểu thức liên hợp bằng mối quan hệ giữa căn thức và biến số đã tìm được.
  - Nếu nghiệm vô tỷ là nghiệm kép, ta có thể sử dụng các phương pháp đánh giá bất đẳng thức, tạo hằng đẳng thức.
- Nếu nghiệm của phương trình, bất phương trình là nghiệm hữu tỷ, ta cần kiểm tra điều kiện nghiệm bội:
  - Nếu nghiệm là nghiệm đơn, ta có thể sử dụng phương pháp nhân liên hợp thông thường: thay nghiệm vào các căn thức và nhân liên hợp của các căn thức với giá trị tương ứng.
  - Nếu nghiệm là nghiệm bội 2, ta có thể sử dụng phương pháp nhân liên hợp nghiệm bội kép, phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM, Cauchy Schwarz, đặt ẩn phụ hoặc tạo hằng đẳng thức.
  - Nếu nghiệm là nghiệm bội 3, ta cần tạo các liên hợp của căn thức với biểu thức chứa biến dạng bậc 2.
  - Nếu nghiệm là nghiệm bội 4, ta cần tạo liên hợp nghiệm bội 2 từ đó bình phương là có nghiệm bội 4.

Định hướng 3: Nếu phương trình, bất phương trình có hai nghiệm phân biệt, ta cần đánh giá như sau:

- Nếu nghiệm của phương trình, bất phương trình là nghiệm vô tỷ, ta tính nghiệm xấp xỉ, sau đó thay vào các căn thức và tìm mối liên hệ giá của của căn thức và biến ban đầu.
  - Nếu nghiệm vô tỷ là nghiệm đơn, ta tạo các biểu thức liên hợp bằng mối quan hệ giữa căn thức và biến số đã tìm được.
  - Nếu nghiệm vô tỷ là nghiệm kép, ta có thể sử dụng các phương pháp đánh giá bất đẳng thức, tạo hằng đẳng thức.
- Nếu nghiệm của phương trình, bất phương trình là nghiệm hữu tỷ, ta cần kiểm tra điều kiện nghiệm bội:
  - Nếu hai nghiệm tìm được là hai nghiệm đơn, ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp hai nghiệm hữu tỷ đơn.

- Nếu hai nghiệm tìm được là hai nghiệm kép, ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp hai nghiệm hữu tỷ bội 2.

Định hướng 4: Nếu bài toán có nhiều hơn 2 biến, thông thường bài toán đó có nhân tử chung được tạo ra một cách đơn giản, ta phân tích nhân tử và đưa về dạng bài toán có từ 2 biến trở xuống.

Định hướng 5: Các định hướng khác:

- Phương pháp xét tổng hiệu: Khi phương trình có hai căn thức ở dạng cộng với nhau.
- Phương pháp đánh giá hàm đặc trưng: Khi phương trình có thể xếp về hai vế có cách biểu diễn gần giống nhau. Nếu nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện $A(x)=B(x)$, muốn nhìn thấy hàm đặc trưng nhanh hơn, ta đặt ẩn phụ $a=A(x),b=B(x)$.
- Phương pháp nâng lũy thừa và sử dụng định lý Viet đảo: Khi phương trình có bậc cao nhất không quá lớn đồng thời đã biết trước nghiệm của phương trình (Để ta tiến hành chia đa thức sau khi nâng lũy thừa).
- Phương pháp đặt ẩn phụ đưa về phương trình cơ bản, phương pháp đặt ẩn phụ và phân tích nhân tử, phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình là những phương pháp không thể bỏ qua, tuy nhiên trong cuốn sách này tôi không đề cập đến bởi đây là phương pháp cần phải được rèn luyện qua rất nhiều các bài toán mới có thể nâng cao kỹ năng đặt ẩn phụ.

2. Bài toán hệ phương trình.

Trong các kỳ thi Đại học, Cao đẳng và kỳ thi Trung học phổ thông quốc gia, các hệ phương trình thường nằm ở dạng chỉ ra được mối quan hệ giữa hai biến số từ một phương trình. Vì vậy ta có những định hướng sau:

Định hướng 1: Nếu hai vế của một phương trình có cách biểu diễn giống nhau, ta sử dụng phương pháp hàm đặc trưng. Để có thể dễ dàng nhận ra hàm đặc trưng, ta cần tìm được mối quan hệ có dạng $A(x)=B(y)$ để từ đó đặt ẩn phụ $a=A(x),b=B(y)$.

Định hướng 2: Nếu chỉ ra được mối quan hệ giữa hai biến số x,y từ một phương trình, ta cần quan tâm xem nếu thay giá trị y theo x (hoặc x theo y) vào các căn thức thì các căn thức nào có yếu tố giống nhau? Từ đó ta sẽ tạo ra các biểu thức liên hợp.

Định hướng 3: Nếu chỉ ra được mối quan hệ giữa hai biến số x, y từ một phương trình mà biểu thức chứa căn không quá lớn ta có thể sử dụng phương pháp nâng lũy thừa.

Định hướng 4: Nếu trong một phương trình có hai biểu thức căn cộng với nhau, ta có thể sử dụng phương pháp xét tổng hiệu.

3. Kết luận.

Phương pháp sử dụng máy tính CASIO là một phương pháp tốt, có tính định hướng, xây dựng đường đi cho các bài toán phương trình hệ phương trình. Tuy nhiên, để có thể phát huy hết tính năng của máy tính CASIO, học sinh cần phải liên tục trau dồi, tính toán và rèn luyện.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1: Giả bất phương trình: $\dfrac{x(x-1)^2\left(\sqrt{x+4}-1\right)}{(x+3)(x+4)} \geq 1$

Điều kiện: $x \in [-4;+\infty) \setminus \{-3\}$.

Trước tiên vào bài toán này ta nhận thấy cần phải đưa biểu thức mẫu số $(x+3)(x+4)$ sang vế bên phải của bất phương trình. Tuy nhiên khó khăn nằm ở chỗ giá trị $x+3$ chưa có cơ sở để khẳng định là một biểu thức luôn dương.

Quan sát kỹ bất phương trình, ta nhận thấy biểu thức $\left(\sqrt{x+4}-1\right)$ nếu được nhân với một lượng biểu thức liên hợp sẽ trở thành: $\left(\sqrt{x+4}-1\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right) = x+4-1 = x+3$. Do đó ta phân tích bất phương trình trên dưới dạng sau:

$$\frac{x(x-1)^2\left(\sqrt{x+4}-1\right)}{(x+3)(x+4)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)^2\left(\sqrt{x+4}-1\right)}{\left(\sqrt{x+4}-1\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right)(x+4)} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ \dfrac{x(x-1)^2}{\left(\sqrt{x+4}+1\right)(x+4)} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x(x-1)^2 \geq \left(\sqrt{x+4}+1\right)(x+4) \end{cases}$$

Trước tiên để có thể định hướng một cách hoàn chỉnh đường đi cho bài toán bất phương trình, ta phân tích phương trình bằng công cụ sử dụng máy tính CASIO như sau:

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO:

Xét

$$F(X) = X(X-1)^2 - \left(\sqrt{X+4}+1\right)(X+4)$$

Với điều kiện $x \geq -4$, ta chọn các giá trị:

- START $= -4$.
- END $= 5$.
- STEP $= 0{,}5$.

Khi đó dựa vào bảng giá trị TABLE như hình bên ta kết luận như sau:

- Phương trình có một nghiệm duy nhất nằm trong khoảng $(3{,}5;4)$ do đó nếu chúng ta sử dụng công cụ SHIFT CALC với $x = 3{,}8$ ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình.
- Hàm số không đơn điệu nhưng trong $(2;+\infty)$ hàm số có dấu hiệu của tính đồng biến.

X	$F(X)$
-4	-100
-3.5	$-71{,}72$
-3	-50
-2.5	$-33{,}96$
-2	$-22{,}82$
-1.5	$-15{,}82$
-1	$-12{,}19$
-0.5	$-11{,}17$
0	-12
$0{,}5$	$-13{,}92$
1	$-16{,}18$
$1{,}5$	$-18{,}02$
2	$-18{,}69$
$2{,}5$	$-17{,}44$
3	$-13{,}52$
$3{,}5$	$-6{,}164$
4	$5{,}3725$
$4{,}5$	$21{,}843$
5	44

Sử dụng công cụ SHIFT CALC trong máy tính để tìm nghiệm:

SHIFT CALC với $x = 3{,}8$ ta thu được nghiệm $x \approx 3{,}791287847$.

Thay nghiệm $x \approx 3{,}791287847$ vào căn thức ta được:

$\sqrt{x+4} \approx 2{,}791287847 \approx x - 1$.

Do đó nhân tử cần xác định là $x - 1 - \sqrt{x+4}$ và phương trình có một nghiệm duy nhất đó là $x - 1 = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Kết luận hướng đi của bài toán:

- Do có nhân tử là $x - 1 - \sqrt{x+4}$ nên ta có thể giải bài toán bằng phương pháp nhân liên hợp.

- Do có nhân tử là $x-1-\sqrt{x+4}$ nên ta có thể giải bài toán bằng phương pháp phân tích nhân tử.
- Do có đánh giá $x-1=\sqrt{x+4}$ nên ta có thể giải bài toán bằng phương pháp đánh giá hàm đại diện.
- Do có nghiệm vô tỷ $x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ nên nếu sử dụng phương pháp nâng lũy thừa ta hoàn toàn có thể giải quyết được bài toán.
- Do trong $(2;+\infty)$ hàm số có dấu hiệu của tính đồng biến nên nếu chỉ ra được điều kiện $x>2$ ta có khả năng chứng minh được hàm số đơn điệu và hàm số cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

Như vậy bài toán có 5 con đường đi tương ứng với 5 cách giải khác nhau.

Phân tích điều kiện chặt chẽ:

$$\begin{cases}x\neq -3\\ x(x-1)^2\geq\left(\sqrt{x+4}+1\right)(x+4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -3\\ x^3-2x^2\geq(x+4)\sqrt{x+4}+4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\neq -3\\ (x-2)x^2\geq(x+4)\sqrt{x+4}+4>0\end{cases}\Rightarrow x>2$$

Vậy $x>2$ và $x^3-2x^2\geq(x+4)\sqrt{x+4}+4$.

Cách 1: Tư duy giải bài theo định hướng nhân liên hợp:

Ta có: $x^3-2x^2\geq(x+4)\sqrt{x+4}+4\Leftrightarrow x^3-2x^2-(x+4)\sqrt{x+4}-4\geq 0$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+4}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-3x-3\right)+(x+4)\frac{(x-1)^2-(x+4)}{x-1+\sqrt{x+4}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-3x-3\right)+(x+4)\frac{x^2-3x-3}{x-1+\sqrt{x+4}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x-3\right)\left(x+\frac{x+4}{x-1+\sqrt{x+4}}\right)\geq 0$$

Vì $x>2\Rightarrow x+\dfrac{x+4}{x-1+\sqrt{x+4}}>0$ do đó $\begin{cases}x^2-3x-3\geq 0\\ x>2\end{cases}\Rightarrow x\geq\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Cách 2: Tư duy giải bài theo định hướng phân tích nhân tử:

Ta có: $x^3-2x^2 \geq (x+4)\sqrt{x+4}+4 \Leftrightarrow x^3-2x^2-(x+4)\sqrt{x+4}-4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+4}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x-3\right)x+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+4}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x^2-2x+1\right)-(x+4)\right)x+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+4}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left((x-1)^2-\left(\sqrt{x+4}\right)^2\right)x+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+4}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1-\sqrt{x+4}\right)\left(x-1+\sqrt{x+4}\right)x+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+4}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1-\sqrt{x+4}\right)\left(x^2+4+x\sqrt{x+4}\right) \geq 0$$

Vì $x>2 \Rightarrow x^2+4+x\sqrt{x+4}>0$ do đó ta có:

$$\begin{cases} x>2 \\ x-1 \geq \sqrt{x+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x-3 \geq 0 \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{3+\sqrt{21}}{2}.$$

Cách 3: Tư duy giải bài theo định hướng đánh giá hàm đại diện:

Ta có: $x(x-1)^2 \geq \left(\sqrt{x+4}+1\right)(x+4)$

$$\Leftrightarrow \left((x-1)+1\right)(x-1)^2 \geq \left(\sqrt{x+4}+1\right)\left(\sqrt{x+4}\right)^2$$

Vì $x>2$ cho nên $x-1>0, \sqrt{x+4}>0$.

Do đó xét hàm đặc trưng $f(t)=(t+1)t^2$ với $t>0$.

Ta có: $f(t)=t^3+t^2 \Rightarrow f'(t)=3t^2+2t>0 \forall t>0$. Vậy $f(t)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $f(x-1) \geq f\left(\sqrt{x+4}\right)$ khi đó ta có:

$$\begin{cases} x>2 \\ x-1 \geq \sqrt{x+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x-3 \geq 0 \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{3+\sqrt{21}}{2}.$$

Cách 4: Tư duy giải bài theo định hướng nâng lũy thừa:

Ta có: $x^3-2x^2-4 \geq (x+4)\sqrt{x+4}$ và $x>2$ nên bình phương hai vế ta được:

$$\left(x^3-2x^2-4\right)^2 \geq (x+4)^3 \Leftrightarrow x^6-4x^5+4x^4-9x^3+4x^2-48x-48 \geq 0$$

Chú ý rằng phương trình có nhân tử $x-1=\sqrt{x+4}$ do đó bình phương hai vế ta được nhân tử x^2-3x-3.

Thực hiện phép chia đa thức $x^6-4x^5+4x^4-9x^3+4x^2-48x-48$ cho biểu thức x^2-3x-3 ta được kết quả $x^4-x^3+4x^2+1$.

Do đó: $x^6-4x^5+4x^4-9x^3+4x^2-48x-48\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-3x-3\right)\left(x^4-x^3+4x^2+1\right)\ge 0$

Vì $x>2$ nên $x^4-x^3+4x^2+1=x^2\left(x^2-x+4\right)+1>0$ do vậy:

$$\left(x^2-3x-3\right)\left(x^4-x^3+4x^2+1\right)\ge 0\Rightarrow\begin{cases}x^2-3x-3\ge 0\\ x>2\end{cases}\Rightarrow x\ge\frac{3+\sqrt{21}}{2}.$$

Cách 5: Tư duy giải bài theo định hướng chứng minh hàm số đơn điệu:

Từ bất phương trình $x^3-2x^2-4\ge(x+4)\sqrt{x+4}$ ta chuyển vế và xét hàm số sau: $f(x)=x^3-2x^2-4-(x+4)\sqrt{x+4}$ với $x\in(2;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-4x-\frac{3}{2}\sqrt{x+4}$. Để chứng minh $f'(x)>0$ hay hàm số $f(x)$ đồng biến không phải là một điều đơn giản.

Vì vậy để chắc chắn định hướng của bài toán ta sử dụng công cụ TABLE để khảo sát hàm $f'(x)=3x^2-4x-\frac{3}{2}\sqrt{x+4}$:

Xét $F(X)=3X^2-4X-\frac{3}{2}\sqrt{X+4}$ với:

- START: 2 (Vì $x>2$).
- END: 6.
- STEP: 0,5.

Dựa vào bảng giá trị, ta thấy:

- Hàm số $f'(x)$ là hàm số đơn điệu tang trên $(2;+\infty)$
- $f'(x)>0$ khi $x>2$

Vậy ta sẽ tiến hành xét $f''(x)$.

X	$F(X)$
2	0,3257
2,5	4,9257
3	11,031
3,5	18,642
4	27,757
4,5	38,376
5	50,5
5,5	64,126
6	79,257

Xét $f''(x)=6x-4-\frac{3}{4\sqrt{x+4}}\Leftrightarrow f''(x)=2(x-2)+4x-\frac{3}{4\sqrt{x+4}}$

$$\Leftrightarrow f''(x)=2(x-2)+\frac{16x\sqrt{x+4}-3}{4\sqrt{x+4}}=2(x-2)+\frac{256x^3+1024x^2-9}{4\sqrt{x+4}\left(16x\sqrt{x+4}+3\right)}$$

Vì $x>2$ nên $256x^3>9\Rightarrow 256x^3+1024x^2-9>0$ do đó $f''(x)>0\forall x>2$.

Khi đó $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng và liên tục trên $(2;+\infty)$.

Do vậy $f'(x)>f'(2)=4-\frac{3\sqrt{6}}{2}>0$. Vậy $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng và liên tục trên $(2;+\infty)$. Mặt khác ta có $f\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)=0$ cho nên bất phương trình $x^3-2x^2-4-(x+4)\sqrt{x+4}\geq 0$ tương đương với:

$$f(x)\geq f\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)\Rightarrow x\geq\frac{3+\sqrt{21}}{2}.$$

Kết luận: Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[\frac{3+\sqrt{21}}{2};+\infty\right)$.

Bình luận: Dù là làm theo phương án nào ta cũng có thể giải triệt để của bài toán, tuy nhiên ta nhận thấy điều kiện $x>2$ là điều kiện vô cùng quan trọng, bởi nếu không có điều kiện trên, rất khó có thể xử lý triệt để được bài toán.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+6x+6}=x+1+\sqrt{x+2}$.

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO:

Xét $F(X)=\sqrt{2X^2+6X+6}-X-1-\sqrt{X+2}$

Với điều kiện $x\geq -2$, ta chọn các giá trị:

- START = -2.
- END = 1.
- STEP = 0,5.

X	$F(X)$
–2	2,4142
–1,5	1,0176
–1	0,4142
–0,5	0,146
0	0,0352
0,5	0,0011
1	0,0096

Khi đó dựa vào bảng giá trị TABLE như hình bên ta kết luận như sau:

- Phương trình có vẻ như không có nghiệm nhưng thực chất phương trình có dấu hiệu có nghiệm kép, nhưng TABLE không hiển thị được vì đơn giản nghiệm kép đó là nghiệm vô tỷ.

- Nghiệm kép được dự đoán nằm trong khoảng $\left(0;1\right)$ do đó sử dụng SHIFT CALC với $x=0,5$ ta được nghiệm $x\approx 0,6180317746$.
- Với $x\approx 0,6180317746$ ta có $\begin{cases}\sqrt{x+2}\approx 1,618033305\approx x+1\\ \sqrt{2x^2+6x+6}\approx 3,236065079\approx 2x+2\end{cases}$
- Vậy phương trình có nghiệm kép $x+1=\sqrt{x+2}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
- Kiểm tra điều kiện nghiệm kép:

Xét $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x^2+6x+6}-x-1-\sqrt{x+2}\right)\Bigg|_{x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=0$

Vậy $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ chính là nghiệm kép duy nhất của phương trình.

Định hướng giải bài:

- Với các liên hợp $\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)$ và $\left(2x+2-\sqrt{2x^2+6x+6}\right)$ ta có thể giải bài toán bằng phương pháp nhân liên hợp.
- Với phương trình có nghiệm kép nên ta có thể đặt ẩn phụ để đưa về bất đẳng thức cơ bản.
- Với phương trình có nghiệm kép nên ta có thể giải bài toán bằng phương pháp đánh giá bất đẳng thức Cauchy.
- Với phương trình có nghiệm kép nên ta có thể giải bài toán bằng phương pháp đánh giá khảo sát vẽ bảng biến thiên của hàm số.

Điều kiện: $x\ge -2$.

Cách 1: Nhân liên hợp nghiệm vô tỷ:

Ta có: $\sqrt{2x^2+6x+6}=x+1+\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+6x+6}-x-1-\sqrt{x+2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)-\left(2x+2-\sqrt{2x^2+6x+6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x+1\right)^2-\left(x+2\right)}{x+1+\sqrt{x+2}}-\frac{\left(2x+2\right)^2-\left(2x^2+6x+6\right)}{2x+2+\sqrt{2x^2+6x+6}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+x-1}{x+1+\sqrt{x+2}}-\frac{2\left(x^2+x-1\right)}{2x+2+\sqrt{2x^2+6x+6}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x-1\right)\left(\frac{1}{x+1+\sqrt{x+2}}-\frac{2}{2x+2+\sqrt{2x^2+6x+6}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x-1\right)\frac{2x+2+\sqrt{2x^2+6x+6}-2\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)}{\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)\left(2x+2+\sqrt{2x^2+6x+6}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x-1\right)\frac{\sqrt{2x^2+6x+6}-2\sqrt{x+2}}{\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)\left(2x+2+\sqrt{2x^2+6x+6}\right)}=0$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x-1\right)\left(\sqrt{2x^2+6x+6}-2\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x-1\right)\frac{2x^2+6x+6-4\left(x+2\right)}{\sqrt{2x^2+6x+6}+2\sqrt{x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x-1\right)\frac{2\left(x^2+x-1\right)}{\sqrt{2x^2+6x+6}+2\sqrt{x+2}}=0\Leftrightarrow\frac{2\left(x^2+x-1\right)^2}{\sqrt{2x^2+6x+6}+2\sqrt{x+2}}=0$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x-1\right)^2=0\Rightarrow x^2+x-1=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Thử lại nghiệm ta thấy chỉ có $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ thỏa mãn đầu bài.

Cách 2: Đặt ẩn phụ đưa về phương trình cơ bản.

Ta có: $\sqrt{2x^2+6x+6}=x+1+\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+4x+2+2x+4}=x+1+\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2\left(\left(x+1\right)^2+x+2\right)}=x+1+\sqrt{x+2}$$

Đặt $x+1=a,\sqrt{x+2}=b$, phương trình trở thành: $\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}=a+b$

$$\Rightarrow 2\left(a^2+b^2\right)=\left(a+b\right)^2\Leftrightarrow 2a^2+2b^2=a^2+2ab+b^2\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2=0\Leftrightarrow a=b$$

Với $a=b\Rightarrow x+1=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ \left(x+1\right)^2=x+2\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Cách 3: Đánh giá bất đẳng thức Cauchy – AM GM – Cauchy Schwarz.

Phân tích: Vì đánh giá bằng máy tính CASIO ta nhận thấy $x+1=\sqrt{x+2}$ do đó ta có thể tư duy bằng bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên với bất đẳng thức cho hai biết cộng nhau có hai hướng giải quyết:

- Hướng 1: $a+b\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow x+1+\sqrt{x+2}\ge 2\sqrt{x+1}\sqrt[4]{x+2}$. Tuy nhiên hướng này khá bất lợi bởi để triệt tiêu căn thức ta phải mũ 4 hai vế và ta nhận thấy đánh giá $\sqrt{2x^2+6x+6}\ge 2\sqrt{x+1}\sqrt[4]{x+2}$ bậc của vế trái lớn hơn bậc của vế phải nên rất khó có thể đưa về dạng $A^2\le 0$.
- Hướng 2: $a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\Rightarrow$ Hướng đi này có lợi bởi sẽ làm giảm thiểu căn thức và sau đánh giá, bậc của hai vế tương đương nhau.

Bài giải:

Ta có: $x+1+\sqrt{x+2}\le\sqrt{2\left(\left(x+1\right)^2+x+2\right)}$

Do đó $\sqrt{2x^2+6x+6}=x+1+\sqrt{x+2}\le\sqrt{2x^2+6x+6}$.

Vậy dấu bằng của bất đẳng thức Cauchy Schwarz phải xảy ra, khi đó:

$$x+1=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ \left(x+1\right)^2=x+2\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Cách 4: Đánh giá bằng hàm số.

Phân tích: Phương trình có nghiệm kép vô tỷ đã biết trước, vì vậy ta sẽ đánh giá hàm số có duy nhất 1 cực trị và cực trị đó chính là $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ đồng thời cực trị chính là nghiệm của phương trình.

Bài giải:

Xét $f\left(x\right)=\sqrt{2x^2+6x+6}-x-1-\sqrt{x+2}$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\frac{2x+3}{\sqrt{2x^2+6x+6}}-1-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

Do đó $f''\left(x\right)=\frac{3}{\left(\sqrt{2x^2+6x+6}\right)^3}+\frac{1}{4\left(\sqrt{x+2}\right)^3}>0\forall x\in\left(-2;+\infty\right)$.

Như vậy $f'\left(x\right)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên $\left(-2;+\infty\right)$ do đó phương trình $f'\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất.

Vì $f'\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=0$ nên $f'\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Với $f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=0$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1+\sqrt{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiêm duy nhất $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Cách 5: Chia hai vế cho một đại lượng đưa về một ẩn phụ

Xét $x=-2$, phương trình tương đương với $\sqrt{2}=-1$ (Vô lý).

Xét $x\neq -2$ ta chia hai vế hai phương trình cho $\sqrt{x+2}$:

$$\sqrt{2x^2+6x+6}=x+1+\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x^2+6x+6}{x+2}}=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x^2+4x+2}{x+2}+2}=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}+1 \Leftrightarrow \sqrt{2\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}\right)^2+2}=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}+1$$

Đặt $a=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$ khi đó phương trình trở thành: $\sqrt{2a^2+2}=a+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -1 \\ 2a^2+2=a^2+2a+1 \end{cases} \Rightarrow a=1 \Rightarrow x+1=\sqrt{x+2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Bình luận: Các bài toán nghiệm kép là những bài toán rất khó để đánh giá, tuy nhiên lại có nhiều cách xử lý khác nhau để giải quyết trọn vẹn.

Khi gặp nghiệm kép, các đánh giá cơ bản thông thường có thể nghĩ tới:

- Nhân liên hợp nghiệm kép.
- Sử dụng đánh giá bất đẳng thức.
- Đưa về hằng đẳng thức.

Để đánh giá tốt nghiệm kép, học sinh cần thành thạo kỹ năng sử dụng chức năng TABLE trong máy tính CASIO.

Bài 3: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-2}\geq\sqrt{3\left(x^2-2x-2\right)}$

(Trích đề thi minh họa THPT Quốc Gia 2015 Bộ GD&ĐT).

Lời giải:

Điều kiện xác định: $x\geq 1+\sqrt{3}$. (1)

Với điều kiện đó, ký hiệu (2) là bất phương trình đã cho, ta có:

$$(2)\Leftrightarrow x^2+2x-2+2\sqrt{x(x+1)(x-2)}\geq 3\left(x^2-2x-2\right).$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x(x-2)(x+1)}\geq x(x-2)-2(x+1).$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x(x-2)}-2\sqrt{(x+1)}\right)\left(\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{(x+1)}\right)\leq 0.\quad(3)$$

Do với mọi x thỏa mãn (1), ta có $\left(\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{(x+1)}\right)>0$ nên

$$(3)\Leftrightarrow\sqrt{x(x-2)}\leq 2\sqrt{(x+1)}\Leftrightarrow x^2-6x-4\leq 0\Leftrightarrow 3-\sqrt{13}\leq x\leq 3+\sqrt{13}\quad(4)$$

Kết hợp (1) và (4), ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$x\in\left[1+\sqrt{3};3+\sqrt{13}\right]$

Phân tích:

Lời giải trên được định hướng dựa vào việc đánh giá đặt ẩn phụ rất tinh ý khi sắp xếp lại biểu thức:

$\sqrt{x^2+x}\sqrt{x-2}=\sqrt{x(x+1)(x-2)}=\sqrt{x(x-2)}\sqrt{x+1}$ để từ đó phân tích vế phải tương đương với các nhóm biểu thức có trong vế trái. Bài toán có thể được tư duy và giải theo định hướng khác như sau:

Sử dụng công cụ TABLE với:

$f(X)=\sqrt{X^2+X}+\sqrt{X-2}-\sqrt{3\left(X^2-2X-2\right)}$

Chọn START = 2, END = 7, STEP = 1 ta có bảng giá trị của hàm số $f(X)$ như bảng bên.

Quan sát bảng giá trị ta nhận thấy:

X	$f(X)$
2	ERROR
3	2.732
4	1.6437
5	0.9642
6	0.3567
7	−0.23

Phương trình có một nghiệm duy nhất đó là $x\in[6;7]$ và hàm số có dấu hiệu nghịch biến.

Về vấn đề tìm nghiệm, SHIFT CALC với $x=6,2$ ta được $x\approx 6,605551275$ và thay vào các căn thức ta được:

$\sqrt{x^2+x}\approx 7,087937565\approx\sqrt{7x+4}\Rightarrow x^2-6x-4=0\Rightarrow x=3+\sqrt{13}$

Do vậy nếu học sinh không thể phán đoán được ẩn phụ, ta vẫn có thể hóa giải được bài toán bằng cách Sử dụng phương pháp nâng lũy thừa với nhân tử tìm được là $\left(x^2-6x-4\right)$.

Sử dụng phương pháp nâng lũy thừa:

Điều kiện xác định: $x\ge 1+\sqrt{3}$. (1)

Với điều kiện đó, ký hiệu (2) là bất phương trình đã cho, ta có:

$(2)\Leftrightarrow x^2+2x-2+2\sqrt{x(x+1)(x-2)}\ge 3\left(x^2-2x-2\right)$.

$$\Leftrightarrow\sqrt{x(x-2)(x+1)}\ge x^2-4x-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(x-2)(x+1)\ge\left(x^2-4x-2\right)^2\\ x^2-4x-2\ge 0\end{cases}\\ x^2-4x-2<0\end{array}\right.$$

- Với $\begin{cases}x(x-2)(x+1)\ge\left(x^2-4x-2\right)^2\\ x^2-4x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2-3x-1\right)\left(x^2-6x-4\right)\le 0\\ x^2-4x-2\ge 0\end{cases}$

Vì $x^2-3x-1=\left(x^2-4x-2\right)+\left(x+1\right)>0\forall\begin{cases}x^2-4x-2\ge 0\\ x\ge 1+\sqrt{3}\end{cases}$

Do đó $\begin{cases}x^2-6x-4\le 0\\ x^2-4x-2\ge 0\Rightarrow 2+\sqrt{6}\le x\le 3+\sqrt{13}\\ x\ge 1+\sqrt{3}\end{cases}$

- Với $\begin{cases}x^2-4x-2<0\\ x\ge 1+\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow 1+\sqrt{3}\le x\le 2+\sqrt{6}$

Kết hợp hai trường hợp ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $1+\sqrt{3}\le x\le 3+\sqrt{13}$

Bình luận: Đây là một bài toán khó vì nghiệm của bất phương trình không dễ dàng có thể tìm ra được. Vì vậy trong những bài toán mà bậc không quá lớn, phương án cơ bản nhất nhưng lại vô cùng hiệu quả đó là phương pháp nâng lũy thừa cần phải được xem xét một cách nghiêm túc.

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 27x^3+3x+(9y-7)\sqrt{6-9y}=0 \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2+\sqrt{2-3x}-\dfrac{109}{81}=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(Trích đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 của Sở GD&ĐT Phú Yên)

Lời giải:

Với điều kiện: $x\le\frac{2}{3}, y\le\frac{2}{3}$, ta có:

$27x^3+3x+(9y-7)\sqrt{6-9y}=0\Leftrightarrow(9x^2+1)3x=(6-9y+1)\sqrt{6-9y}$.

Đặt $u=3x, v=\sqrt{6-9y}$, ta có: $(u^2+1)u=(v^2+1)v$.

Xét h/s: $f(t)=(t^2+1)t$ có $f'(t)=3t^2+1>0$ nên h/s luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $u=v\Leftrightarrow 3x=\sqrt{6-9y}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 0 \\ y=\dfrac{2}{3}-x^2 \end{cases}$.

Do đó: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+y^2+\sqrt{2-3x}-\dfrac{109}{81}=0 \\ y=\dfrac{2}{3}-x^2 \end{cases}\Rightarrow\dfrac{x^2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}-x^2\right)^2+\sqrt{2-3x}-\dfrac{109}{81}=0$

Nhận xét: $x=0, x=\frac{2}{3}$ không phải là nghiệm của (4).

Xét hàm số: $g(x)=\dfrac{x^2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}-x^2\right)^2+\sqrt{2-3x}-\dfrac{109}{81}$.

Ta có: $g'(x)=2x(2x^2-1)-\dfrac{3}{2\sqrt{2-3x}}<0, \forall x\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

Nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

Dễ thấy $x=\frac{1}{3}$ là nghiệm của (4), suy ra $y=\frac{5}{9}$ nên hệ có nghiệm duy nhất

Phân tích:

Để giải quyết được phương trình thứ nhất của hệ phương trình ban đầu, ta phải nhìn được bài toán dưới con mắt đặt ẩn phụ. Điều này không đơn giản chút nào, và muốn nhìn ra cách sắp đặt ẩn phụ như trên ta có thể phân tích theo một hướng khác như sau:

Xét phương trình $27x^3+3x+(9y-7)\sqrt{6-9y}=0$.

Đặt $x=100$ ta được: $27.100^3+300+(9y-7)\sqrt{6-9y}=0$.

SHIFT CALC với $y=0$ ta được:

$$y=-9999,333333=-\frac{29998}{3}=-\frac{3.100^2-2}{3}=\frac{2}{3}-100^2=\frac{2}{3}-x^2$$

Do đó với $y=\frac{2}{3}-x^2 \Rightarrow$ Ta đặt ẩn phụ $y=\frac{2}{3}-u^2, u\ge 0$.

Giải phương trình 1:

Đặt $y=\frac{2}{3}-u^2, u\ge 0$ ta có $9y=6-3u^2$

$$27x^3+3x+(9y-7)\sqrt{6-9y}=0$$

$$\Leftrightarrow 27x^3+3x+\left(6-9u^2-7\right)\sqrt{6-\left(6-9u^2\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow 27x^3+3x-\left(9u^2+1\right)3u=0 \Leftrightarrow 27x^3+3x=27u^3+3u$$

Xét hàm số $f(t)=27t^3+3t$ ta có $f'(t)=81t^2+3>0\forall t\in\mathbb{R}$.

Khi đó $f(t)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do vậy $f(x)=f(u)\Leftrightarrow x=u\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y=\frac{2}{3}-x^2 \end{cases}$

Phân tích:

Thế vào phương trình thứ hai ta được: $\frac{x^2}{3}+\left(\frac{2}{3}-x^2\right)^2+\sqrt{2-3x}-\frac{109}{81}=0$

Hay: $x^4-x^2+\sqrt{2-3x}-\frac{73}{81}=0$

Với điều kiện $0\le x\le\frac{2}{3}$ ta sử dụng công cụ Mode 7 để khảo sát hình dáng của phương trình trên.

Xét $F(X)=X^4-X^2+\sqrt{2-3X}-\frac{73}{81}$

X	$F(X)$
0	0.5129
0.1	0.3927
0.2	0.2435
0.3	0.0656

ART = 0, END = 0,7, STEP = 0,1.

được bảng giá trị như bảng bên.

ựa vào bảng giá trị ta nhận thấy rằng:

Phương trình có một nghiệm nằm trong khoảng $0.3; 0.4)$

0.4	− 0.141
0.5	− .38
0.6	− 0.684
0.7	ERROR

Hàm số nghịch biến khi $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

Về nghiệm của phương trình ta SHIFT CALC với $x = 0.32$ được $x = \frac{1}{3}$

Vậy ngoài cách giải bằng cách xét tính đơn điệu của hàm số, ta có thể giải bài toán trên bằng cách nhân liên hợp.

Giải phương trình bằng phương pháp nhân liên hợp:

Ta có: $x^4 - x^2 + \sqrt{2-3x} - \frac{73}{81} = 0 \Leftrightarrow \left(x^4 - x^2 + \frac{8}{81}\right) + \left(\sqrt{2-3x} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x - \frac{8}{27}\right) - \frac{3x-1}{\sqrt{2-3x}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x - \frac{8}{27} - \frac{3}{\sqrt{2-3x}+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(\left(x^2 - \frac{8}{9}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{3}{\sqrt{2-3x}+1}\right) = 0$$

Vì $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ nên $\left(x^2 - \frac{8}{9}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) < 0$ do đó $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Hệ hương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}, y = \frac{5}{9}$.

<u>Bình luận:</u>

- Với phương trình 1, để có thể hóa giải một cách nhanh chóng các phương trình chưa căn hai biến, ta có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, tuy nhiên cần phải tìm ra được mối liên quan giữa hai biến số trong phương trình trước để từ đó quyết định đặt ẩn phụ sẽ dễ dàng giải quyết bài toán hơn.
- Với phương trình thứ 2, trước khi giải bài toán cần phải được xem xét kỹ đường đi của hàm số thông qua công cụ TABLE, với các hàm số đơn điệu và có một nghiệm duy nhất, ta luôn có khả năng giải bằng phương pháp đạo hàm khảo sát tính đơn điệu và kỹ thuật nhân liên hợp.

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3xy\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\ x^3\left(9y^2+1\right)+4\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=10 \end{cases}$

(Trích đề chính thức của Sở GD&ĐT Thừa Thiên Huế).

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 0$.

Nhận xét: $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x>0$. Ta có: $3xy\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow 3y+3y\sqrt{9y^2+1}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}$$

$$\Leftrightarrow 3y+3y\sqrt{(3y)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+1}$$

Vì $x>0$ nên $y>0$. Xét hàm số $f(t)=t+t.\sqrt{t^2+1}, t>0$.

Ta có: $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0$.

Suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó: $f(3y)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow 3y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Thế vào phương trình thứ hai ta có:

$$x^3+x^2+4\left(x^2+1\right).\sqrt{x}=10$$

Đặt $g(x)=x^3+x^2+4\left(x^2+1\right).\sqrt{x}-10, x>0$. Ta có $g'(x)>0$ với $x>0$.

$\Rightarrow g(x)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có $g(1)=0$.

Vậy $g(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=1$. Với $x=1\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$.

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Phân tích:

Mấu chốt của phương trình 1 nằm ở việc tại sao chúng ta lại nghĩ ra cách chia cả hai vế cho biến x? Đây là một câu hỏi khó và chúng ta hãy để máy tính CASIO giúp chúng ta tìm ra câu trả lời:

Xét phương trình $3xy\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$.

Đặt $x = 100$ ta được: $300y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{101}-10}$.

SHIFT CALC với $y=0$ ta được:

$$y=0.03333333333=\frac{1}{30}=\frac{1}{3.10}=\frac{1}{3.\sqrt{100}}=\frac{1}{3\sqrt{x}}$$

Do đó với $y=\frac{1}{3\sqrt{x}} \Rightarrow$ Ta đặt ẩn phụ $\frac{1}{3\sqrt{x}}=t$.

Tuy nhiên để đặt được ẩn phụ này ta cần đảm bảo rằng $x>0$.

Giải phương trình 1:

Điều kiện: $x \geq 0$.

Nhận xét: $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x>0$. Ta đặt ẩn phụ $\frac{1}{3\sqrt{x}}=t$ với $t>0$, ta có $x=\frac{1}{9t^2}$.

Khi đó: $3xy\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1}{9t^2}y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9t^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{9t^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3t^2}y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\frac{\frac{1}{9t^2}+1-\frac{1}{9t^2}}{\sqrt{\frac{1}{9t^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{9t^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3t^2}y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\sqrt{\frac{1}{9t^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{9t^2}}$$

$$\Leftrightarrow y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=3t^2\left(\sqrt{\frac{1}{9t^2}+1}+\frac{1}{3t}\right) \Leftrightarrow y+y\sqrt{9y^2+1}=t+t\sqrt{9t^2+1}$$

Vì $x>0$ nên $y>0$. Xét hàm số $f(u)=u+u\sqrt{u^2+1}, u>0$.

Ta có: $f'(u)=1+\sqrt{u^2+1}+\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}}>0$.

Suy ra $f\left(u\right)$ luôn đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Do đó: $f\left(y\right)=f\left(t\right)\Leftrightarrow y=t=\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$. Thế vào phương trình thứ hai ta có:

$$x^3+x^2+4\left(x^2+1\right).\sqrt{x}=10$$

Với điều kiện $0\le x$ ta sử dụng công cụ Mode 7 để khảo sát hình dáng của phương trình trên.

Xét $F\left(X\right)=X^3+X^2+4\left(X^2+1\right).\sqrt{X}-10$

START = 0, END = 7, STEP = 1.

Ta được bảng giá trị như bảng bên.

Dựa vào bảng giá trị ta nhận thấy rằng:

- Phương trình có một nghiệm duy nhất đó là $x=1$.
- Hàm số đồng biến khi $0\le x$.

X	$F\left(X\right)$
0	-10
1	0
2	30.284
3	95.282
4	206
5	372.55
6	604.52
7	911.15

Vậy ngoài cách giải bằng cách xét tính đơn điệu của hàm số, ta có thể giải bài toán trên bằng cách nhân liên hợp.

Giải phương trình bằng phương pháp nhân liên hợp:

Ta có: $x^3+x^2+4\left(x^2+1\right).\sqrt{x}=10\Leftrightarrow x^3+5x^2-6+4\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+6x+6\right)+4\left(x^2+1\right)\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+6x+6+\frac{4\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x}+1}\right)=0$$

Vì $x>0$ nên $x^2+6x+6+\dfrac{4\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x}+1}>0$. Do đó ta có $x=1\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$.

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x=1,y=\dfrac{1}{3}$. HD:

Bình luận:

- Bằng cách sử dụng máy tính CASIO, ta không quá khó để tìm ra mối liên hệ và cách đặt ẩn phụ, tuy nhiên để hóa giải bài toán một cách trọn vẹn ta cần phải chú ý đến điều kiện của bài toán.
- Với phương trình thứ 2, đây là một phương trình được đánh giá ở mức cơ bản, không quá khó.

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\ x^3-3x+2=2y^3-y^2\end{cases}$

(Trích đề thi thử lần 1 Kì thi THPT Quốc Gia 2015 – Trường THPT số 3 Bảo Thắng).

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}2x-y-1\ge 0\\ x+2y\ge 0\\ x>0\\ y\ge -\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Ta có: $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-y-1}-\sqrt{x}+\sqrt{3y+1}-\sqrt{x+2y}=0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{x-y-1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}}-\dfrac{x-y-1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}}=0$.

$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}}\right)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x-1\\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}\end{array}\right.$

- Với $y=x-1$, thay vào phương trình thứ hai ta có:

  $(x-1)^2(x+2)=2(x-1)^3-(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5\end{array}\right.$.

  $x=1\Rightarrow y=0; x=5\Rightarrow y=4$.

- Với $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}$

  Ta có: $\begin{cases}\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}\end{cases}$

  Cộng hai vế hai phương trình ta được: $\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}\Leftrightarrow y=\dfrac{x-1}{3}$.

  Thay vào phương trình thứ hai ta có:

  $(x-1)^2(x+2)=\dfrac{2}{27}(x-1)^3-\dfrac{1}{9}(x-1)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(25x+59)=0 \Leftrightarrow x=1$ (do $x>0$).

Kết luận: Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=(1;0);(x;y)=(5;4)$.

Phân tích:

Mấu chốt của phương trình 1 đó là sắp xếp hợp lý các nhóm biểu thức để tiến hành nhân liên hợp. Vậy làm sao để có thể định hướng sắp xếp như vậy? Máy tính CASIO sẽ giúp chúng ta trả lời câu hỏi này.

Xét phương trình $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}$

Đặt $x=100$ ta được: $\sqrt{199-y}+\sqrt{3y+1}=10+\sqrt{100+2y}$.

SHIFT CALC với $y=0$ ta được:

$$y=33=\frac{100-1}{3}=\frac{x-1}{3}$$

Thay $y=\frac{x-1}{3}$ vào các căn thức ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{2x-y-1}=\sqrt{2x-\frac{x-1}{3}-1}=\sqrt{\frac{5x-2}{3}}\\ \sqrt{3y+1}=\sqrt{x-1+1}=\sqrt{x}\\ \sqrt{x+2y}=\sqrt{x+\frac{2x-2}{3}}=\sqrt{\frac{5x-2}{3}}\end{cases}$$

Như vậy khi $y=\frac{x-1}{3}$ thì $\sqrt{2x-y-1}=\sqrt{x+2y}, \sqrt{3y+1}=\sqrt{x}$

Do đó các liên hợp cần tìm là: $\left(\sqrt{2x-y-1}-\sqrt{x+2y}\right), \left(\sqrt{3y+1}-\sqrt{x}\right)$

Giải hệ phương trình theo định hướng CASIO:

Ta có: $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-y-1}-\sqrt{x+2y}\right)+\left(\sqrt{3y+1}-\sqrt{x}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-3y}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x+2y}}+\frac{3y+1-x}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x}}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1-3y)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x+2y}}-\frac{1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x}}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3y = x-1 \\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x+2y}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x} \end{array}\right.$$

- Với $3y = x-1$, thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$(x-1)^2(x+2)=\frac{2}{27}(x-1)^3-\frac{1}{9}(x-1)^2$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(25x+59)=0 \Leftrightarrow x=1$ (do $x>0$) do đó $y=0$.

- Với $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x+2y}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x}$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y} \\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x+2y}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x} \end{cases}$

Cộng hai vế hai phương trình ta được: $\sqrt{x}=\sqrt{2x-y-1} \Leftrightarrow y=x-1$.

Thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$(x-1)^2(x+2)=2(x-1)^3-(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right..$$

$x=1 \Rightarrow y=0; x=5 \Rightarrow y=4$.

Kết luận: Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=(1;0);(x;y)=(5;4)$.

Bình luận:

Phương trình thứ hai không khó để giải một khi chúng ta tìm ra được mối quan hệ giữa hai biến số từ phương trình thứ nhất.

Chú ý rằng nếu Xét phương trình $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}$

Đặt $x=100$ ta được: $\sqrt{199-y}+\sqrt{3y+1}=10+\sqrt{100+2y}$.

SHIFT CALC với $y=100$ ta được: $y=99=x-1$

Khi đó bài toán sẽ được giải quyết theo hướng giải ban đầu. Độc giả tự làm lại hệ phương trình trên với mối quan hệ này.

Bài 7: Giải phương trình: $x\sqrt{x^2+x+1}=1-x-x^2$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO:

Xét $F(X)=X\sqrt{X^2+X+1}-1+X+X^2$

X	F(X)
–2	–2.464
– 1,5	–2.234

- START = -2.
- END = 2.
- STEP = 0.5.

Khi đó dựa vào bảng giá trị TABLE như hình bên ta kết luận như sau:

- Hàm số có duy nhất 1 nghiệm nằm trong $\left(0; 0.5\right)$.

-1	-2
$-0,5$	-1.683
0	-1
0,5	0.4114
1	2.732
1.5	6.0191
2	10.291

- Sử dụng SHIFT CALC với $x = 0.3$ ta được nghiệm $x \approx 0.38196601$
- Thay vào căn thức ta được $\sqrt{x^2 + x + 1} \approx 1.236067977 \approx 2 - 2x$
- Do đó: $\begin{cases} x^2 + x + 1 = \left(2 - 2x\right)^2 \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có thể được giải quyết bằng những phương án sau:

- Phương pháp nâng lũy thừa với nhân tử $\left(x^2 - 3x + 1\right)$.
- Phương pháp nhân liên hợp nghiệm vô tỷ.

Cách 1: Phương pháp nâng lũy thừa

Ta có: $x\sqrt{x^2+x+1} = 1 - x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(x^2+x+1\right) = \left(1-x-x^2\right)^2 \\ x\left(1-x-x^2\right) \ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1-x-x^2\right) \ge 0 \\ x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1-x-x^2\right) \ge 0 \\ \left(x+1\right)\left(x^2-3x+1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Cách 2: Phương pháp nhân liên hợp nghiệm vô tỷ

Ta có: $x\sqrt{x^2+x+1} = 1 - x - x^2 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+x+1} - 1 + x + x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+x+1} + 2x - 2\right) - 1 + 3x - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(\sqrt{x^2+x+1} + 2x - 2\right) - \left(3x^2 - 9x + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(\sqrt{x^2+x+1} + 2x - 2\right) - \left(\sqrt{x^2+x+1} + 2x - 2\right)\left(2x - 2 - \sqrt{x^2+x+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+x+1}+2x-2\right)\left(3x-2x+2+\sqrt{x^2+x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+x+1}+2x-2\right)\left(x+2+\sqrt{x^2+x+1}\right)=0$$

- Với $\sqrt{x^2+x+2}=2-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1=(2-2x)^2 \\ x\le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-3x+1=0 \\ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

- Với $x+2+\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1=(x+2)^2 \\ x\le -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x\le -2 \end{cases}$ (Loại)

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bình luận:

Điểm hay nhất của bài toán nằm ở việc phương pháp nâng lũy thừa có cách giải ngắn gọn hơn rất nhiều so với phương pháp nhân liên hợp. Đây là phương pháp đơn giản và không thể không để cập đến khi làm một bài toán có căn thức không quá lớn.

Bài 8: Giải phương trình: $2x-3+\frac{3x-1}{\sqrt{3-2x^2}+2-x}=0$

Điều kiện $-\sqrt{\frac{3}{2}}\le x\le\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ta có: $2x-3+\frac{3x-1}{\sqrt{3-2x^2}+2-x}=0 \Leftrightarrow 2x-3+\frac{(3x-1)\left(\sqrt{3-2x^2}-2+x\right)}{-3x^2+4x-1}=0$

$$\Leftrightarrow 2x-3+\frac{\sqrt{3-2x^2}+x-2}{1-x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3-2x^2}-2x^2+6x-5=0$$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO:

Xét $F(X)=\sqrt{3-2X^2}-2X^2+6X-5$

- START = -1.5.

X	$F(X)$
-1.5	ERROR
-1	-12
-0.5	-6.918

0	-3.267
0.5	-0.918
1	0
1.5	ERROR

- END = 1.5.
- STEP = 0.5.

Dựa vào bảng giá trị TABLE ta nhận thấy phương trình có 1 nghiệm là $x = 1$.

Tuy nhiên để đánh giá đúng bản chất của nghiệm này, ta sẽ sử dụng TABLE với các giá trị như sau:

- START = 0.5
- END = 1.2
- STEP = 0.1

X	$F(X)$
0.5	-0.918
0.6	-0.61
0.7	-0.358
0.8	-0.168
0.9	-0.045
1	0
1.1	-0.058
1.2	-0.222

Ta nhận thấy đây chính là nghiệm kép của phương trình chính là $x = 1$.

Như vậy dựa vào bảng giá trị, ta thấy bài toán có các định hướng như sau:

- Sử dụng phương pháp nâng lũy thừa và có nhân tử $\left(x-1\right)^2$.
- Sử dụng phương pháp đánh giá bất đẳng thức AM – GM.
- Sử dụng phương pháp nhân liên hợp nghiệm kép.

Cách 1: Phương pháp nâng lũy thừa:

$$\sqrt{3-2x^2} = 2x^2-6x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4-24x^3+58x^2-60x+22=0 \\ 2x^2-6x+5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-6x+5 \geq 0 \\ \left(x-1\right)^2\left(4x^2-16x+22\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

Cách 2: Đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM

Ta có: $2x^2-6x+5=\sqrt{3-2x^2}.1 \leq \dfrac{3-2x^2+1}{2} \Rightarrow 2x^2-6x+5 \leq 2-x^2$

$\Rightarrow 3\left(x-1\right)^2 \leq 0$. Mà $3\left(x-1\right)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ do đó $x=1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

Cách 3: Sử dụng phương pháp nhân liên hợp nghiệm kép

Xét $ax + b = \sqrt{3 - 2x^2}$ ta có: $a = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3 - 2x^2}\right)\Big|_{x = 1} = -2$

Do đó $-2x + b = \sqrt{3 - 2x^2}$. Thay $x = 1$ ta có $-2 + b = 1 \Rightarrow b = 3$.

Vậy liên hợp cần tìm là $\left(3 - 2x - \sqrt{3 - 2x^2}\right)$

Ta có: $\sqrt{3-2x^2} = 2x^2 - 6x + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 5 - \sqrt{3-2x^2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 + \left(3 - 2x - \sqrt{3-2x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 + \frac{(3-2x)^2 - 3 + 2x^2}{3 - 2x + \sqrt{3-2x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + \frac{6(x-1)^2}{3 - 2x + \sqrt{3-2x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(1 + \frac{3}{3 - 2x + \sqrt{3-2x^2}}\right) = 0$$

Vì $-\sqrt{\frac{3}{2}} \le x \le \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow 1 + \frac{3}{3 - 2x + \sqrt{3-2x^2}} > 0$. Do đó $x = 1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

Bình luận:

Các bài toán có nghiệm kép luôn có rất nhiều cách giải. Việc sử dụng thành thạo nhiều kỹ năng sử dụng nghiệm kép sẽ giúp học sinh có nhiều định hướng khi giải bài hơn.

Bài 9: Giải phương trình: $\sqrt{5x + \frac{3}{2x} + 12} - \sqrt{x - \frac{1}{2x} + 11} = 1$

Điều kiện: $\begin{cases} 5x + \frac{3}{2x} + 12 \ge 0 \\ x - \frac{1}{2x} + 11 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{12 + \sqrt{114}}{10} \le x \le \frac{\sqrt{114} - 12}{10} \vee x \ge \frac{\sqrt{123} - 11}{2}$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$F(X) = \sqrt{5X + \frac{3}{2X} + 12} - \sqrt{X - \frac{1}{2X} + 11} - 1$

- START = -2.5 .

X	$F(X)$
-2.5	ERROR
-2	-2.923
-1.5	-2.264
-1	-1.895

- END = 2.
- STEP = 0.5.

Dựa vào bảng giá trị TABLE ta nhận thấy phương trình có 1 nghiệm duy nhất nằm trong khoảng $(1;1.5)$.

Sử dụng SHIFT CALC với $x = 1.3$ ta có

−0.5	−1.841
0	ERROR
0.5	−0.057
1	−0.09
1.5	0.0396
2	0.1989

$$x \approx 1.366025404 \text{ khi đó } \begin{cases} \sqrt{5x+\dfrac{3}{2x}+12} \approx 4.464101615 \approx 4x-1 \\ \sqrt{x-\dfrac{1}{2x}+11} \approx 3.464101615 \approx 4x-2 \end{cases}$$

Do đó các liên hợp là: $\left(4x-1-\sqrt{5x+\dfrac{3}{2x}+12}\right),\left(4x-2-\sqrt{x-\dfrac{1}{2x}+11}\right)$

Tuy nhiên vấn đề lo ngại rằng trong bảng giá trị trên ta thấy rằng ở trong các khoảng $(-0.5;0)$ và $(0;0.5)$ có thể vẫn còn nghiệm do đó ta khảo sát tiếp bằng TABLE trong các khoảng trên ta có:

X	$F(X)$
−0.5	−1.841
−0.4	−1.942
−0.3	−2.171
−0.2	−2.776
−0.1	ERROR
0	ERROR

X	$F(X)$
0	ERROR
0.1	1.7742
0.2	0.5781
0.3	0.1974
0.4	0.0271
0.5	−0.057

Như vậy trong khoảng $(0.4;0.5)$ vẫn còn nghiệm nữa, sử dụng SHIFT CALC với $x = 0.45$ ta được nghiệm $x \approx 0.4253905297$.

Xét $0.4253905297 + 1.366025404 \approx 1.791415934$ ta thấy rằng tổng hai nghiệm của phương trình là số vô tỷ.

Vậy bài toán có thể được định hướng với những hướng đi sử dụng phương pháp nâng lũy thừa ta sẽ tách ra làm hai phương trình bậc hai độc lập chứa hai nghiệm khác nhau của phương trình.

Ta có: $\sqrt{5x+\dfrac{3}{2x}+12}-\sqrt{x-\dfrac{1}{2x}+11}=1 \Leftrightarrow \sqrt{5x+\dfrac{3}{2x}+12}=1+\sqrt{x-\dfrac{1}{2x}+11}$

$$\Leftrightarrow 5x+\frac{3}{2x}+12=12+2\sqrt{x-\frac{1}{2x}+11}+x-\frac{1}{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{1}{x}=\sqrt{x-\frac{1}{2x}+11}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\frac{1}{x}\ge 0\\ \left(2x+\frac{1}{x}\right)^2=x-\frac{1}{2x}+11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\frac{1}{x}\ge 0\\ 8x^4-2x^3-14x^2+x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\frac{1}{x}\ge 0\\ \left(2x^2-2x-1\right)\left(4x^2+3x-2\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\vee x=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm là $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; $x=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$.

Bài 10: Giải phương trình: $x-\sqrt{x}=1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$$f\left(X\right)=X-\sqrt{X}-1+\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}$$

- START = 0
- END = 4.5
- STEP = 0.5

Nhìn thoáng qua ta thấy phương trình này dường như có vẻ vô nghiệm, nhưng thực tế có phải như vậy hay không?

Để trả lời câu hỏi này ta tập trung vào khoảng $x\in\left(0;1\right)$.

X	$F\left(X\right)$
0	0.4142
0.5	0.0176
1	0.4142
1.5	1.146
2	2.0352
2.5	3.001
3	4.0096
3.5	5.045
4	6.099
4.5	7.1565

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$$f\left(X\right)=X-\sqrt{X}-1+\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}$$

- START = 0
- END = 1
- STEP = 0.1

Nghiệm: Phương trình có nghiệm kép trong $\left(0.3;0.5\right)$.

X	$F\left(X\right)$
0	0.4142
0.1	0.1328
0.2	0.0489
0.3	$9.25.\ 10^{-3}$
0.4	$4.27.\ 10^{-4}$
0.5	0.0176
0.6	0.0582

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Định hướng giải bài:

- Sử dụng phương pháp nâng lũy thừa giải phương trình.

0.6	0.1203
0.8	0.2017
0.9	0.3003
1	0.4 42

- Sử dụng phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức.

Tìm nghiệm: SHIFT CALC với $x = 0.4$ ta được nghiệm $x \approx 0.381966035$.

Thay nghiệm tìm được vào căn thức ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x} \approx 0.6180340082 \\ \sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right)} \approx 1.236067973 \approx 2\sqrt{x} \end{cases}$$

Vậy ta có thể thêm một định hướng nữa là sử dụng nhân biểu thức liên hợp với liên hợp cần tìm là $\left(\sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right)} - 2\sqrt{x}\right)$.

Cách 1: Sử dụng phương pháp nâng lũy thừa.

Điều kiện: $x \ge 0$.

Ta có: $x - \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right)} \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right)} = 1 - x + \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x} \ge 0 \\ 2\left(x^2 - x + 1\right) = (x-1)^2 - 2(x-1)\sqrt{x} + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x} \ge 0 \\ (x-1)^2 + 2(x-1)\sqrt{x} + x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x} \ge 0 \\ \left(x - 1 + \sqrt{x}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x} \ge 0 \\ x - 1 + \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Chú ý rằng $x - 1 + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 - x \ge 0 \Rightarrow x \le 1$.

Do đó nghiệm $x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Bình luận: Với những phương trình vô tỷ chứa căn không quá lớn và ta nhẩm thấy bài toán này khi nâng lũy thừa lên bậc cao nhất chỉ có thể là 4, ta có thể mạnh dạn sử dụng phương pháp này để giải quyết phương trình.

Tuy nhiên nếu như quan sát kỹ rằng:

$x^2 - x + 1 = (1-x)^2 + (\sqrt{x})^2$

Khi đó ta có thể định hướng giải phương trình bằng đánh giá thông qua bất đẳng thức Cauchy Schwarz.

Tất nhiên rằng việc đánh giá được $x^2 - x + 1 = (1-x)^2 + (\sqrt{x})^2$ đồng nghĩa với việc ta có thể đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình cơ bản.

Cách 2: Đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy Schwarz.

Điều kiện: $x \geq 0$.

Ta có: $x - \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - x + 1)} = 1 - x + \sqrt{x}$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có:

$$1 - x + \sqrt{x} \leq \sqrt{2\left((1-x)^2 + (\sqrt{x})^2\right)} \Leftrightarrow 1 - x + \sqrt{x} \leq \sqrt{2(x^2 - x + 1)}$$

Do đó đẳng thức $\sqrt{2(x^2 - x + 1)} = 1 - x + \sqrt{x}$ xảy ra khi và chỉ khi:

$$1 - x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ (1-x)^2 = x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Cách 3: Đặt hai ẩn phụ.

Điều kiện: $x \geq 0$.

Ta có: $x - \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - x + 1)} = 1 - x + \sqrt{x}$

Tiến hành đặt ẩn phụ như sau:

$$\begin{cases} a = 1 - x \\ b = \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x + 1 = (1-x)^2 + (\sqrt{x})^2 = a^2 + b^2$$

Khi đó phương trình ban đầu trở thành:

$$a + b = \sqrt{2(a^2 + b^2)} \Rightarrow (a+b)^2 = 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Với $a = b$ ta có: $1 - x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ (1-x)^2 = x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Cách 4: Sử dụng nhân liên hợp.

Điều kiện: $x \ge 0$.

Ta có: $x-\sqrt{x}=1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)} \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-1+\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}=0$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1+\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-2\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x}-1\right)+\frac{2\left(x^2-3x+1\right)}{\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}+2\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x}-1\right)+\frac{2\left(x+\sqrt{x}-1\right)\left(x-\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}+2\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x}-1\right)\left(1+\frac{2\left(x-\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}+2\sqrt{x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x}-1\right)\frac{\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}+2\sqrt{x}+2\left(x-\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}+2\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}+2x-2\right)=0$$

Chú ý rằng: $x-\sqrt{x}=1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)} \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}=1-x+\sqrt{x}$

$$\Rightarrow \left(x+\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}+2x-2\right)=\left(x+\sqrt{x}-1\right)\left(1-x+\sqrt{x}+2x-2\right)$$

$$\Rightarrow \left(x+\sqrt{x}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow 1-x=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \left(1-x\right)^2=x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bình luận: Tất nhiên sử dụng phương pháp nhân liên hợp cách làm sẽ trở nên dài và cồng kềnh hơn, nhưng cũng qua bốn cách giải trên ta nhận thấy bài toán có rất nhiều con đường đi khác nhau cùng có thể dẫn đến kết quả. Ngoài bốn cách trên còn có rất nhiều cách giải khác nữa dành cho bạn đọc tiếp tục suy ngẫm.

Bài 11: Giải phương trình: $2\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{2x^2+4x}=x-2$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$f(X)=2\sqrt{X^2-X+2}-\sqrt{2X^2+4X}-X+2$

- START = -5
- END = 4
- STEP = 1

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=2$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Định hướng giải bài: Bài toán trên có căn thức không quá lớn, chính vì vậy hướng giải bài đơn giản nhất ta có thể nghĩ tới là phương pháp nâng lũy thừa.

X	$F(X)$
-5	12.836
-4	11.38
-3	10.033
-2	9.6568
-1	ERROR
0	4.8284
1	1.3789
2	0
3	-0.82
4	-1.444

Điều kiện: $x \ge 0$ hoặc $x \le -2$.

Phương trình đã cho tương đương với: $2\sqrt{x^2-x+2}=(x-2)+\sqrt{2x^2+4x}$.

Bình phương 2 vế ta được: $(x-2)^2=2(x-2)\sqrt{2x^2+4x}$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x-2=2\sqrt{2x^2+4x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ (x-2)^2=4\left(2x^2+4x\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bình luận: Đối với các phương trình vô tỷ mà tại đó điều kiện làm hàm số có hai miền xác định độc lập, ta nên lựa chọn phương pháp nâng lũy thừa nếu phương trình có bậc không quá lớn, cách giải này ngắn gọn và hiệu quả hơn nhiều so với những phương pháp giải khác.

Yêu cầu lớn nhất đối với dạng bài này là học sinh cần có kỹ năng tính toán và biến đổi tốt, tránh nhầm lẫn trong quá trình tính toán.

Bài 12: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2(x+2)$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$$f(X)=\sqrt{2X^2+16X+18}+\sqrt{X^2-1}-2(X+2)$$

- START = −2
- END = 2.5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Hàm số có ít nhất là hai nghiệm, ngoài ra có thể xuất hiện các nghiệm khác bên ngoài các nghiệm $x=\pm 1$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Định hướng giải bài: Với các bài toán mà tại đó điều kiện bị phân làm các khoảng độc lập, ta nên ưu tiên chọn phương pháp nâng lũy thừa nếu bậc của phương trình không quá lớn.

X	F(X)
−2	ERROR
−1.5	ERROR
−1	0
−0.5	ERROR
0	ERROR
0.5	ERROR
1	0
1.5	0.9371
2	1.3478
2.5	1.6877

Ta có: $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2(x+2)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+16x+18}=2(x+2)-\sqrt{x^2-1}$$

$$\begin{cases} 2x^2+16x+18=\left(2(x+2)-\sqrt{x^2-1}\right)^2 \\ 2(x+2)-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+16x+18=4(x+2)^2-4(x+2)\sqrt{x^2-1}+x^2-1 \\ 2(x+2)-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2)\sqrt{x^2-1}=3x^2-3 \\ 2(x+2)-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(4(x+2)-3\sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1}=0 \\ 2(x+2)-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-1}=0 \\ 4(x+2)=3\sqrt{x^2-1} \end{array}\right. \\ 2(x+2)-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ \begin{cases} x\ge -2 \\ 16(x+2)^2=9\left(x^2-1\right) \end{cases} \end{array}\right. \\ 2(x+2)-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\dfrac{3\sqrt{57}-32}{7} \end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm là: $x=-1$; $x=1$; $x=\dfrac{3\sqrt{57}-32}{7}$.

Bài 13: Giải phương trình: $x+\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$$f(X)=X+\sqrt{X^2-3}-\sqrt{2x^2-7}-\sqrt{2x^2-4}$$

- START = -2
- END = 2.5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có ít nhất một nghiệm trong đó có nghiệm $x=2$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Định hướng giải bài: Bài toán này đã có ít nhất một nghiệm và bậc lớn nhất sau khi nâng lũy thừa là 4, bên cạnh đó phương trình có điều kiện xác định là hai khoảng độc lập với nhau, do đó chúng ta tiếp tục sử dụng phương pháp nâng lũy thừa.

X	$F(X)$
-2	-4
-1.5	ERROR
-1	ERROR
-0.5	ERROR
0	ERROR
0.5	ERROR
1	ERROR
1.5	ERROR
2	0
2.5	-0.957

Điều kiện: $x\ge\dfrac{\sqrt{14}}{2}\vee x\le-\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

Ta có: $x+\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}\Leftrightarrow x-\sqrt{2x^2-7}=\sqrt{2x^2-4}-\sqrt{x^2-3}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$x^2-2x\sqrt{2x^2-7}+2x^2-7=2x^2-4-2\sqrt{\left(2x^2-4\right)\left(x^2-3\right)}+x^2-3$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{2x^2-7}=\sqrt{\left(2x^2-4\right)\left(x^2-3\right)}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x^2\left(2x^2-7\right)=\left(2x^2-4\right)\left(x^2-3\right)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bình luận: Qua các bài tập trên ta nhận thấy phương pháp nâng lũy thừa là một phương pháp giải tốt, hoàn toàn không thua kém gì so với các phương pháp giải khác, đặc biệt có lợi thế ưu việt trong các bài toán mà ta nhẩm được bậc không quá lớn sau khi nâng lũy thừa.

Bài 14: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\frac{6}{x}+5}$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$$f(X)=\sqrt{X^2+3X}+2\sqrt{X+2}-2X-\sqrt{X+\frac{6}{X}+5}$$

- START = 0.5
- END = 5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có hai nghiệm phân biệt đó là $x=1 \vee x=2$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Định hướng giải bài: Sử dụng phương pháp nhân liên hợp hai nghiệm hữu tỷ đơn.

X	$F(X)$
0.5	-0.698
1	0
1.5	0.0993
2	0
2.5	-0.195
3	-0.447
3.5	-0.735
4	-1.049
4.5	-1.382
5	-1.73

Đặt $\sqrt{x+2}=ax+b$, thay các nghiệm $x=1$ và $x=2$ vào biểu thức trên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ 2a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2-\sqrt{3} \\ b=2\sqrt{3}-2 \end{cases}$ do đó liên hợp cần tìm là:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)x+\left(2\sqrt{3}-2\right)-\sqrt{x+2}$$

Tuy nhiên ta nhận thấy rằng liên hợp trên thật sự rất cồng kềnh và không nên lựa chọn phương án này.

Chính vì vậy ta đặt ra một câu hỏi rằng, liệu có phải chỉ đơn thuần hai nghiệm trên cùng được sinh ra sau một biểu thức liên hợp hay không?

Có lẽ không hẳn là như vậy, hai nghiệm trên được sinh ra từ một phương trình có dạng $A(x).B(x)=0$ trong đó $A(x)$ cho nghiệm $x=1$ và $B(x)$ cho nghiệm $x=2$.

Để có thể định hướng được cách phân tích nhân tử, ta chú ý rằng:

$$\sqrt{x+\frac{6}{x}+5}=\sqrt{\frac{x^2+5x+6}{x}}=\frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$$ (Do điều kiện tìm được $x>0$).

Nhận thấy biểu thức này có thể nhóm nhân tử dựa vào một trong hai yếu tố $\sqrt{x+2}$ hoặc $\sqrt{x+3}$. Do đó ta sẽ thử tiến hành nhóm nhân tử như sau:

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\sqrt{x+3}=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x+2}-x\right)=\dfrac{\left(-x^2+x+2\right)\sqrt{x+3}}{\left(x+\sqrt{x+2}\right)\sqrt{x}}\\ \dfrac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x+2}=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}\end{cases}$$

Cặp liên hợp trên cho nghiệm $x=2$ còn cặp liên hợp dưới cho nghiệm $x=1$. Như vậy ta có hai cách nhóm nhân tử trong bài toán này và ta có thể chọn một trong hai phương án trên.

Để biểu thức tính toán được nhỏ gọn, chúng ta sẽ sử dụng phương án 2.

Điều kiện: $x>0$

Ta có: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\dfrac{6}{x}+5}$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x(x+3)}-\sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x}}\right)+\left(2\sqrt{x+2}-2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x+2}{x}}\right)+2\left(\sqrt{x+2}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+3}\,\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}+2\left(\sqrt{x+2}-x\right)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-x\right)\left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-x\right)\left(\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{x+2-x^2}{\sqrt{x+2}+x}\right)\left(\frac{x+3-4x}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{\left(\sqrt{x+2}+x\right)\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}=0\Rightarrow x=1\vee x=2\text{ vì }x>0.$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=1, x=2$.

Bình luận: Có rất nhiều các phương pháp phân tích để tạo ra nhân tử chung, tuy nhiên việc lựa chọn phương pháp nào ta cần phải cân nhắc kỹ lưỡng bởi nếu chọn đường đi không đúng, bài toán có thể được giải quyết nhưng sẽ rất cồng kềnh và khó khăn.

Bài 15: Giải phương trình: $3x^2+3x+2=(x+6)\sqrt{3x^2-2x-3}$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$$f(X)=3X^2+3X+2-(X+6)\sqrt{3X^2-2X-3}$$

- START = −4
- END = 5
- STEP = 1

Nghiệm: Phương trình có từ hai nghiệm trở lên trong đó có hai nghiệm được xác định nằm trong $(-3;-2)$ và $(3;4)$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Định hướng giải bài: Bài toán có hai miền xác định độc lập với nhau cho nên ta có thể giải bằng phương pháp nâng lũy thừa một cách dễ dàng. Tuy nhiên, ta cũng có thể sử dụng phương pháp nhân liên hợp với bài toán này.

X	$F(X)$
−4	23.439
−3	3.5683
−2	−6.422
−1	−5.071
0	ERROR
1	ERROR
2	2.114
3	−0.183
4	1.1723
5	5.3859

SHIFT CALC với $x=3.5$ ta thu được nghiệm: $x\approx 3.406514819$.

Thay nghiệm $x\approx 3.406514819$ tìm được vào căn thức ta có:

$$\sqrt{3x^2-2x-3}=5$$

Như vậy ta có thể nhân liên hợp hoặc phân tích nhân tử với một nhân tử tìm được là $\left(\sqrt{3x^2-2x-3}-5\right)$.

Tuy nhiên vì điều kiện xác định rất khó xử lý do có nghiệm âm, chính vì vậy ta không nên lựa chọn phương pháp nhân liên hợp mà thay vào đó ta nên ưu tiên phân tích nhân tử.

Ta có: $3x^2+3x+2=(x+6)\sqrt{3x^2-2x-3}$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-2x-3\right)+5(x+1)-(x+1)\sqrt{3x^2-2x-3}-5\sqrt{3x^2-2x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-2x-3}\left(\sqrt{3x^2-2x-3}-5\right)-(x+1)\left(\sqrt{3x^2-2x-3}-5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2-2x-3}-x-1\right)\left(\sqrt{3x^2-2x-3}-5\right)=0$$

Với $\sqrt{3x^2-2x-3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x-3=x^2+2x+1 \\ x\ge -1 \end{cases} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{3}$

Với $\sqrt{3x^2-2x-3}=5 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{85}}{3}$

Kết luận: Phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x=\frac{1\pm\sqrt{85}}{3}$ và $x=1\pm\sqrt{3}$.

Bài 16: Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3$

(Trích đề thi Học sinh giỏi tỉnh Quảng Nam 2014)

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$f(X)=2X^2-X-3-\sqrt{3X-2}+\sqrt{X+1}$

- START = 0.5
- END = 5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{2}$.

Tính đơn điệu: Dựa vào bảng trên ta thấy hàm số đơn điệu tăng trong $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

X	$F(X)$
0.5	ERROR
1	−1.585
1.5	0
2	2.732
2.5	6.5256
3	11.354
3.5	17.205
4	24.073
4.5	31.954
5	40.843

Tuy nhiên do tại $x=0.5$ hàm số không xác định do đó ta cần phải xem xét kỹ trong $\left(\frac{2}{3};1\right)$ thực tế hàm số có đồng biến hay không? Lựa chọn các giá trị sau:

- START = 0.7
- END = 1
- STEP = 0.1

X	$F(X)$
0.7	−1.732
0.8	−1.81
0.9	−1.738
1	−1.585

Ta nhận thấy thực tế hàm số không phải hàm đơn điệu tăng. Do đó định hướng giải bài toán bằng xét tính đơn điệu của hàm số bị loại trừ. Thay vào đó ta quyết định giải bài toán bằng phương pháp nhân liên hợp.

Chú ý rằng với $x=\frac{3}{2}$ thì $\begin{cases} \sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=0 \\ 2x^2-x-3=0 \end{cases}$

Do đó ta phân tích nhân tử biểu thức $\left(2x^2-x-3\right)$ và sử dụng liên hợp với nhóm biểu thức $\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}\right)$.

Điều kiện: $x \ge \frac{2}{3}$

Ta có: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}=2x^2-x-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}=(2x-3)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\left(x+1-\frac{1}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}\right)=0$$

Với $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Với $x+1-\frac{1}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)=1$

Vì $x \ge \frac{2}{3} \Rightarrow (x+1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right) \ge (x+1)\sqrt{x+1} \ge \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}>1$

Do đó phương trình $x+1-\frac{1}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}\right)}=0$ vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{2}$.

Bài 17: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$f(X)=\sqrt{2X^2+X+9}+\sqrt{2X^2-X+1}-X-4$

- START = −4
- END = 5
- STEP = 1

X	$F(X)$
−4	12.165
−3	8.5893
−2	5.1896
−1	2.1622
0	0

Nghiệm: Phương trình có hai nghiệm phân biệt một nghiệm là $x=0$ và một nghiệm nằm trong $(0;1)$.

SHIFT CALC với $x=0.5$ ta được nghiệm $x=\frac{8}{7}$. Như vậy phương trình có tất cả hai

1	-0.1211
2	1.0046
3	2.4772
4	4.0933
5	5.7823

hai nghiệm phân biệt là $x=0$ và $x=\frac{8}{7}$.

Đặt $\sqrt{2x^2+x+9}=ax+b$. Thay các nghiệm $x=0$ và $x=\frac{8}{7}$ vào biểu thức ta có hệ phương trình: $\begin{cases} b=3 \\ \frac{8a}{7}+b=\frac{25}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=3 \end{cases}$ do đó liên hợp tìm được là $\left(\sqrt{2x^2+x+9}-\frac{1}{2}x-3\right)$ hay $\left(2\sqrt{2x^2+x+9}-x-6\right)$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Định hướng giải bài:

- Sử dụng phương pháp nhân liên hợp hai nghiệm hữu tỷ đơn.
- Sử dụng phương pháp xét tổng hiệu vì ta có nhóm biểu thức hai căn cộng với nhau.

Cách 1: Phương pháp xét tổng hiệu.

Điều kiện: $x\ge -4$.

Nhận thấy $x=-4$ không phải nghiệm của phương trình do đó $x\in(-4;+\infty)$.

Xét $\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=\dfrac{2x^2+x+9-\left(2x^2-x+1\right)}{\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=\frac{2x+8}{x+4}=2$$

Do đó ta có: $\begin{cases} \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4 \\ \sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2 \end{cases}$

Cộng hai vế của phương trình ta được:

$$2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6\Rightarrow 4\left(2x^2+x+9\right)=\left(x+6\right)^2 \Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{8}{7}$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=0, x=\frac{8}{7}$.

Cách 2: Phương pháp xnhân liên hợp hai nghiệm hữu tỷ đơn.

Điều kiện: $x \ge -4$.

Ta có: $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}-x-4=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+x+9}+2\sqrt{2x^2-x+1}-2x-8=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x^2+x+9}-x-6\right)+\left(2\sqrt{2x^2-x+1}-x-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(2x^2+x+9\right)-\left(x+6\right)^2}{2\sqrt{2x^2+x+9}+x+6}+\frac{4\left(2x^2-x+1\right)-\left(x+2\right)^2}{2\sqrt{2x^2-x+1}+x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x^2-8x}{2\sqrt{2x^2+x+9}+x+6}+\frac{7x^2-8x}{2\sqrt{2x^2-x+1}+x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(7x^2-8x\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2x^2+x+9}+x+6}+\frac{1}{2\sqrt{2x^2-x+1}+x+2}\right)=0 \text{ (*)}$$

Ta có: $\sqrt{2x^2+x+9}=\sqrt{2x^2+x+1+8}>2\sqrt{2}$

Do đó $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4>2\sqrt{2}\Rightarrow x>2\sqrt{2}-4>-2$

Vậy $\dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+x+9}+x+6}+\dfrac{1}{2\sqrt{2x^2-x+1}+x+2}>0$

Do vậy (*) $\Rightarrow 7x^2-8x=0\Rightarrow x=0\vee x=\dfrac{8}{7}$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=0, x=\dfrac{8}{7}$.

Bình luận: Phương pháp nhân liên hợp có lợi thế lớn là dễ tiếp cận hơn các phương pháp khác tuy nhiên trong một số tình huống, biết kết hợp các phương pháp với nhau ta sẽ được những cách giải đẹp và ngắn gọn hơn.

Bài 18: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2-x-1}+x^2+2=\sqrt[3]{2x-3}+3x$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$f\left(X\right)=\sqrt[3]{X^2-X-1}+X^2+2-\sqrt[3]{2X-3}-3X$

- START = −4

X	$F(X)$
−4	34.892
−3	24.304
−2	15.622

- END = 5
- STEP = 1

−1	8.7099
0	2.4422
1	0
2	0
3	2.2677
4	6.514
5	12.755

Nghiệm: Phương trình có hai nghiệm phân biệt đó là $x = 1, x = 2$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Định hướng giải bài: Dùng phương pháp nhân liên hợp hai nghiệm hữu tỷ đơn.

Tuy nhiên, chú ý rằng với $x = 1, x = 2$ ta có nhân tử tìm được sau khi nhân liên hợp là $\left(x^2 - 3x + 2\right)$ đã có sẵn trong phương trình.

Như vậy ta sẽ nhóm ra biểu thức $\left(x^2 - 3x + 2\right)$ còn các nhóm biểu thức còn lại sẽ được nhân liên hợp với nhau sau.

Ta có: $\sqrt[3]{x^2 - x - 1} + x^2 + 2 = \sqrt[3]{2x - 3} + 3x$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x^2 - x - 1} - \sqrt[3]{2x - 3}\right) + \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1 - (2x - 3)}{\left(\sqrt[3]{x^2 - x - 1}\right)^2 + \sqrt[3]{2x - 3}\sqrt[3]{x^2 - x - 1} + \left(\sqrt[3]{2x - 3}\right)^2} + \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{\left(\sqrt[3]{x^2 - x - 1}\right)^2 + \sqrt[3]{2x - 3}\sqrt[3]{x^2 - x - 1} + \left(\sqrt[3]{2x - 3}\right)^2} + \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2 - x - 1}\right)^2 + \sqrt[3]{2x - 3}\sqrt[3]{x^2 - x - 1} + \left(\sqrt[3]{2x - 3}\right)^2} + 1\right)\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$$

Vì $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2 - x - 1}\right)^2 + \sqrt[3]{2x - 3}\sqrt[3]{x^2 - x - 1} + \left(\sqrt[3]{2x - 3}\right)^2} + 1 > 0$ do đó ta có:

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = 2$.

Bình luận: Nhân liên hợp cho căn thức bậc ba sẽ khiến các biểu thức dưới mẫu số rất lớn. Chính vì vậy ta phải cân nhắc kỹ lưỡng trước khi tiến hành nhân liên hợp.

Tuy nhiên ta không thể phủ nhận lợi thế lớn của các căn thức bậc 3 nói riêng và các căn thức bậc lẻ nói chung có nhóm biểu thức dưới mẫu số luôn dương chứ không cần đánh giá điều kiện khó như các căn bậc 3 trở lên.

Bài 19: Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=2x$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$f\left(X\right)=\left(\sqrt{X+3}-\sqrt{X+1}\right).$

$\left(X^2+\sqrt{X^2+4X+3}\right)-2X$

- START = −1
- END = 3.5
- STEP = 0.5

X	$F\left(X\right)$
−1	3.4142
−0.5	2.1957
0	1.2679
0.5	0.6418
1	0.2426
1.5	0.0272
2	−0.031
2.5	0.0462
3	0.2474
3.5	0.5611

Nghiệm: Phương trình có hai nghiệm phân biệt nằm trong hai khoảng $\left(1.5;2\right)$ và $\left(2;.2.5\right)$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Nhẩm nghiệm:

Sử dụng SHIFT CALC với $x=1.8$ ta được $x\approx 1.618033989$.

Thay $x\approx 1.618033989$ vào các căn thức ta thấy:

$\sqrt{x+1}\approx 1.618033989\approx x$

Sử dụng SHIFT CALC với $x=2.2$ ta được $x\approx 2.302775638$.

Thay $x\approx 2.302775638$ vào các căn thức ta nhận thấy:

$\sqrt{x+3}\approx 2.302775638\approx x$

Định hướng giải bài: Ta có thể sử dụng máy tính CASIO để tìm nghiệm và phân tích các biểu thức liên hợp, tuy nhiên trong bài toán này, với hai nhận xét trên, ta thấy phương trình có thể được phân tích nhân tử thành:

$\left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)$

Điều kiện: Vì $2x=\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)$

$$\Rightarrow 2x=\frac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)>0$$

Do đó ta có điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1})(x^2+\sqrt{x^2+4x+3})=2x$

$\Leftrightarrow x^2+\sqrt{(x+1)(x+3)}=x.(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1})$

$\Leftrightarrow (x^2-x\sqrt{x+3})+\left[\sqrt{(x+1)(x+3)}-x\sqrt{x+1}\right]=0$

$\Leftrightarrow x(x-\sqrt{x+3})+\sqrt{x+1}(\sqrt{x+3}-x)=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{x+3})(x-\sqrt{x+1})=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=x\\ \sqrt{x+1}=x\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 20: Giải phương trình:

$$\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)=3x^2$$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$$f(\mathrm{X})=\left(\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1}+\sqrt{4\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1}\right).\left(\sqrt{5\mathrm{X}^2+1}-\sqrt{2\mathrm{X}^2+1}\right)-3\mathrm{X}^2$$

- START = − 1
- END = 3.5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=0, x=1$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

X	F(X)
−1	−0.847
−0.5	−0.174
0	0
0.5	0.0493
1	0
1.5	−0.317
2	−0.914
2.5	−1.788
3	−2.935
3.5	−4.352

Định hướng giải bài: Tuy rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt đó là $x=0, x=1$ nhưng chúng ta có thể tư duy như sau:

- Nhóm biểu thức $\left(\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)$ có kết quả liên hợp là x^2.
- Vế phải cũng chứa x^2.

Như vậy ta sẽ sử dụng liên hợp này trước sau đó sẽ tiếp tục xử lý với $x=1$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

- Nhận thấy $x=0$ là một nghiệm của phương trình.

- Với $x \neq 0$, ta có: $(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+x+1}).(\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}) = 3x^2$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+x+1}}{\sqrt{5x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}}\cdot 3x^2 = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}$$

Do $x \neq 0$ thì $\sqrt{x^2+x+1} \neq \sqrt{4x^2+x+1}$ và $\sqrt{5x^2+1} \neq \sqrt{2x^2+1}$ nên:

$$\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{3x^2}{\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}$$

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\\ \sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\end{cases}$

Cộng hai vế hai phương trình trên ta có:

$\sqrt{4x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1} \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0$, $x=1$.

Bài 21: Giải phương trình: $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\dfrac{5.(x-3)}{2x^2+18}$

(Trích đề thi thử Đại học Trường Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2013)

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$$f(X)=\sqrt{X+1}-2\sqrt{4-X}-\frac{5.(X-3)}{2X^2+18}$$

- START = -1
- END = 4
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu tăng.

Định hướng giải bài:

- Sử dụng phương pháp nhân liên hợp để chỉ ra nghiệm $x=3$.

X	$F(X)$
−1	−3.472
−0.5	−2.589
0	−2.166
0.5	−1.841
1	−1.549
1.5	−1.247
2	−0.904
2.5	−0.496
3	0
3.5	0.6482
4	2.136

- Sử dụng phương pháp tính đơn điệu của hàm số để đánh giá $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 1: Phương pháp nhân liên hợp.

Điều kiện: $-1 \le x \le 4$.

Ta có: $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\dfrac{5.(x-3)}{2x^2+18} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+18}.(\sqrt{x+1}-\sqrt{16-4x})=5.(x-3)$

$$\Leftrightarrow \frac{5.(x-3)\sqrt{2x^2+18}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{16-4x}}=5.(x-3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3:\text{ TMĐK} \\ \sqrt{2x^2+18}=\sqrt{x+1}+\sqrt{16-4x} \quad (1) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2+3x+1=4\sqrt{(x+1)(4-x)} \Leftrightarrow 4\sqrt{-x^2+3x+4}=2x^2+3x+1$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-x-3)+4.\left[(x+1)-\sqrt{-x^2+3x+4}\right]=0 \qquad (2)$$

Xét $x+1+\sqrt{-x^2+3x+4}=0 \Leftrightarrow x=-1$ và thế vào (2) thấy $x=-1$ là một nghiệm của phương trình (2).

Xét $x+1+\sqrt{-x^2+3x+4} \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -1$, tức $x \in (-1;4]$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow (2x^2-x-3)+\frac{4.(2x^2-x-3)}{x+1+\sqrt{-x^2+3x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-x-3)\cdot\underbrace{\left(1+\frac{4}{x+1+\sqrt{-x^2+3x+4}}\right)}_{>0,\forall x\in(-1;4]}=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Thử lại ta thấy các nghiệm $x=-1, x=\dfrac{3}{2}$ không thỏa mãn phương trình ban đầu, chỉ có nghiệm $x=3$ thỏa mãn.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Cách 2: Phương pháp đánh giá tính đơn điệu của hàm số.

Điều kiện: $-1 \le x \le 4$.

Nhận xét: $x=-1, x=4$ không phải nghiệm của phương trình do đó ta có điều kiện $x \in (-1;4)$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}-\dfrac{5(x-3)}{2x^2+18}$ với $x \in (-1;4)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}+\dfrac{10(x^2-6x-9)}{(2x^2+18)^2}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}\ge\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}}$

Cũng theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}\le 1+x+4-x=5$

Do đó: $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}\ge\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}}\ge\frac{2}{\sqrt{5}}$

Để đánh giá cẩn thận tại bước này, ta xét

$$f(X)=\frac{10\left(X^2-6X-9\right)}{\left(2X^2+18\right)^2}$$

- START = −1
- END = 4
- STEP = 0.5

Nhận xét: Qua bảng giá trị bên ta nhận thấy giá trị thấp nhất của $f(X)$ là -0.35.

Do đó ta đánh giá như sau:

$$\frac{1}{2}+\frac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}>0$$

X	$F(X)$
−1	−0.05
−0.5	−0.168
0	−0.277
0.5	−0.343
1	−0.35
1.5	−0.311
2	−0.251
2.5	−0.19
3	−0.138
3.5	−0.098
4	−0.068

Trước hết ta có: $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}\ge\frac{2}{\sqrt{5}}>\frac{1}{2}$

Vậy $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}+\frac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}>\frac{1}{2}+\frac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}$

$$\Rightarrow f'(x)>\frac{2x^4+46x^2-60x+72}{\left(2x^2+18\right)^2}\Rightarrow f'(x)>\frac{2x^4+46\left(x-\frac{15}{23}\right)^2+\frac{1206}{23}}{\left(2x^2+18\right)^2}>0$$

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục khi $x\in(-1;4)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $f(3)=0$ do vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bình luận: Định hướng sử dụng chức năng TABLE phân tích hướng đi của hàm số là một công cụ hữu hiệu khi giải bài.

Bài 22: Giải phương trình: $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$$f\left(X\right)=\sqrt{2X+4}-2\sqrt{2-X}-\frac{6X-4}{\sqrt{X^2+4}}$$

- START = -2
- END = 2
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có một nghiệm nằm trong $\left(0.5;1\right)$ và một nghiệm $x=2$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

X	$F\left(X\right)$
-2	1.6568
-1.5	2.4583
-1	2.4222
-0.5	1.9652
0	1.1715
0.5	0.2716
1	-0.444
1.5	-0.768
2	0

Nhẩm nghiệm:

SHIFT CALC với $x=0.7$ ta được nghiệm $x=\frac{2}{3}$.

Chú ý rằng nghiệm $x=\frac{2}{3}$ được thể hiện trong biểu thức $\left(6x-4\right)$.

Định hướng giải bài: Nhân liên hợp hai căn thức trực tiếp cho nhau nhằm mục tiêu tách nhân tử $x=\frac{2}{3}$ trước.

Điều kiện: $-2\le x\le 2$.

Ta có: $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}.(\sqrt{2x+4}-\sqrt{8-4x})=6x-4\Leftrightarrow \frac{(6x-4)\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2x+4}-\sqrt{8-4x}}=6x-4$$

$$\Leftrightarrow (6x-4)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{8-4x}}-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ \sqrt{2x+4}+\sqrt{8-4x}=\sqrt{x^2+4} \quad (1) \end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow -2x+12+2\sqrt{(2x+4)(8-4x)}=x^2+4\Leftrightarrow 4\sqrt{8-2x^2}=x^2+2x-8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x\le -4 \ \vee \ x\ge 2 \\ f(x)=x^4+4x^3+20x-32x-64=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ f(2)=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\frac{2}{3}$, $x=2$.

Bài 23: Giải phương trình: $3x^2+10x+\sqrt{3x+3}=x^3+26+\sqrt{5-2x}$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$f(X)=X^3+26+\sqrt{5-2X}-3X^2$

$-10X-\sqrt{3X+3}$

- $\text{START}=-1$
- $\text{END}=2.5$
- $\text{STEP}=0.5$

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu giảm.

X	$F(X)$
−1	34.645
−0.5	31.349
0	26.504
0.5	20.253
1	13.282
1.5	6.3006
2	0
2.5	−5.365

Định hướng giải bài:

- Sử dụng phương pháp nhân liên hợp tháo gỡ nghiệm $x=2$.
- Ta nhận thấy hai căn thức trên khi đạo hàm đều mang dấu âm nên mặc dù hàm số đơn điệu nhưng ta sẽ không lựa chọn phương án giải này bởi như vậy việc đánh giá sẽ trở nên hết sức khó khăn.

Điều kiện: $\begin{cases}3x+3\ge 0\\5-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le\frac{5}{2}$.

Ta có: $3x^2+10x+\sqrt{3x+3}=x^3+26+\sqrt{5-2x}$

$\Leftrightarrow(\sqrt{3x+3}-3)+(1-\sqrt{5-2x})-x^3+3x^2+10x-24=0$

$$\Leftrightarrow\frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2(x-3)}{1+\sqrt{5-2x}}-(x-2)(x^2-x-12)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\cdot\left[\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-(x^2-x-12)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}=x^2-x-12$$

Để định hướng tốt đường đi tại bước này, ta xét:

$$f(X)=\frac{3}{\sqrt{3X+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2X}+1}$$

$-X^2+X+12$

- $\text{START}=-1$

X	$F(X)$
−1	11.548
−0.5	12.539
0	13.252
0.5	13.502

- END = 2.5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình vô nghiệm.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

1	13.282
1.5	12.601
2	11.5
2.5	10.73

Định hướng giải bài: Tuy rằng hàm số không đơn điệu nhưng ta nhận thấy giá trị 13.502 tại $x = \frac{1}{2}$ là giá trị lớn nhất và hàm số luôn dương. Vì vậy ta sẽ khảo sát hàm số này để chứng minh vô nghiệm.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - x - 12$ trên đoạn $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ có $f'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Mà $f(-1) = -10, f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{33}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{49}{2}$. Suy ra: $\max\limits_{\left[-1;\frac{5}{2}\right]} f(x) = -10$.

Do đó: $x^2 - x - 12 = f(x) \le -10$, mà $\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} > 0, \forall x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$

Do đó phương trình $\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} = x^2 - x - 12$ vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bình luận: Chứng minh vô nghiệm là một trong những vấn đề khó của bài toán nhân liên hợp. Sử dụng chức năng TABLE để định hướng cách chứng minh vô nghiệm ta có thể xử lý bài toán dễ dàng hơn rất nhiều.

Bài 24: Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 4x + 2} + \sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-1} + 6x^3 - 7x^2 - 3 = 0$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$$f(X) = \sqrt{3X^2 - 4X + 2} + \sqrt{3X+1}$$
$$+\sqrt{2X-1} + 6X^3 - 7X^2 - 3$$

- START = 0.5
- END = 5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu tăng.

Định hướng giải bài: Mặc dù hàm số đơn

X	F(X)
0.5	−1.552
1	0
1.5	6.9177
2	23.827
2.5	55.194
3	105.52
3.5	179.31
4	201.08
4.5	415.32
5	585.54

điệu tăng nhưng với điều kiện $x \ge \frac{1}{2}$ ta nhận thấy:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3x^2-4x+2}\right)' = \dfrac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+2}} \\ \left(6x^3-7x^2-3\right)' = 2x(9x-7) \end{cases}$$

Các biểu thức trên có đạo hàm chưa đảm bảo dương khi $x \ge \frac{1}{2}$ vì vậy ta không nên sử dụng phương pháp đánh giá hàm đặc trưng bởi như vậy việc chứng minh hàm số đồng biến hết sức khó khăn.

Ta sẽ lựa chọn phương pháp nhân liên hợp.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x-1 \ge 0;\ 3x+1 \ge 0 \\ 3x^2-4x+2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$.

Ta có: $\sqrt{3x^2-4x+2}+\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}+6x^3-7x^2-3=0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x^2-4x+2}-1)+(\sqrt{3x+1}-2)+(\sqrt{2x-1}-1)+6x^3-7x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-4x+1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2x-2}{\sqrt{2x+1}+1}+6x^3-7x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(3x-1)}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+1}+1}+(x-1)(6x^2+6x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+6x^2+6x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+6x^2+6x-1=0 \end{array}\right.$$

Định hướng đi tại bước này, xét:

$$f(X)=\frac{3X-1}{\sqrt{3X^2-4X+2}+1}+\frac{3}{\sqrt{3X+1}+2}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{2X+1}+1}+6X^2+6X-1$$

- START = 0.5
- END = 5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình vô nghiệm

X	$F(X)$
0.5	5.434
1	13.482
1.5	24.173
2	37.713
2.5	54.209
3	73.691
3.5	96.168
4	121.64

4.5	150.12
5	181.6

Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu tăng.

Định hướng giải bài: Mặc dù hàm số đơn điệu tăng và luôn dương đã đảm bảo cho ta yên tâm về việc phương trình vô nghiệm, tuy nhiên để dễ dàng hơn trong việc chứng minh, ta có thể khảo sát thêm một chút nữa với nhóm biểu thức nhỏ hơn như sau:

Xét hàm số:

$f(X)=6X^2+6X-1$

- START = 0.5
- END = 5
- STEP = 0.5

Như vậy thay vì việc chứng minh một biểu thức cồng kềnh kia vô nghiệm, ta chỉ cần tập trung chứng minh: $6x^2+6x-1>0$.

Điều này rõ ràng đơn giản hơn rất nhiều so với định hướng lúc trước.

X	$F(X)$
0.5	3.5
1	11
1.5	21.5
2	35
2.5	51.5
3	71
3.5	93.5
4	119
4.5	147.5
5	179

Xét hàm số $f(x)=6x^2+6x-1$ trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ có $f'(t)=12x+6>0,\ \forall x\ge\frac{1}{2}$.

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$, suy ra: $f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$.

Mà $g(x)=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}>0,\ \forall x\ge\frac{1}{2}$.

Do đó $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+6x^2+6x-1>0$

Vậy $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+6x^2+6x-1=0$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

<u>Bình luận:</u> Điểm mấu chốt của bài toán là nắm bắt rõ chính xác về việc chỉ cần sử dụng $6x^2+6x-1>0$ là đủ chứ không cần cả nhóm biểu thức:

$$\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+6x^2+6x-1>0$$

Việc sử dụng thành thạo chức năng TABLE sẽ giúp bạn đọc có những hướng giải quyết đơn giản và nhẹ nhàng như trên.

Bài 25: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$f(X)=\sqrt{X^2+15}-3X+2-\sqrt{X^2+8}$

- START $=-1$
- END $=3.5$
- STEP $=0.5$

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu giảm.

Định hướng giải bài:

- Sử dụng nhân liên hợp.

X	$F(X)$
-1	6
-0.5	4.5328
0	3.0445
0.5	1.5328
1	0
1.5	-1.548
2	-3.105
2.5	-4.665
3	-6.224
3.5	-7.775

- Sử dụng phương pháp đánh giá tính đơn điệu của hàm số để chỉ ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 1: Phương pháp nhân liên hợp.

Điều kiện: $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}<3x-2+\sqrt{x^2+15}\Rightarrow x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Ta có: $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+15}-4=\sqrt{x^2+8}-3+3x-3\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\cdot\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow-(x-1)\cdot\left(-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow-(x-1)\cdot\left(\frac{3\sqrt{x^2+15}-x+11}{\sqrt{x^2+15}+4}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow-(x-1)\cdot\left(\frac{\frac{8x^2+135}{3\sqrt{x^2+15}+x}+11}{\sqrt{x^2+15}+4}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}\right)=0\ (*)$$

Vì $\dfrac{\dfrac{8x^2+135}{3\sqrt{x^2+15}+x}+11}{\sqrt{x^2+15}+4}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}>0\forall x\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

Do đó $(*)\Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 2: Phương pháp đánh giá tính đơn điệu của hàm số.

Điều kiện: $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}<3x-2+\sqrt{x^2+15}\Rightarrow x\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=3x-2+\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+15}$ với $x\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=3+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+15}}\Rightarrow f'\left(x\right)=3+x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+15}}\right)$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=3+x\left(\frac{\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+15}\sqrt{x^2+8}}\right)$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=3+\frac{7x}{\left(\sqrt{x^2+15}+\sqrt{x^2+8}\right)\sqrt{x^2+15}\sqrt{x^2+8}}>0\forall x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 26: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x=\sqrt{5x-1}+1$

(Trích đề thi Học sinh giỏi Thành phố Hà Nội 2013)

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$f\left(X\right)=\sqrt[3]{X-9}+2X^2+3X-\sqrt{5X-1}-1$

- START = 0
- END = 4.5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu tăng.

Định hướng giải bài: Sử dụng phương pháp nhân liên hợp.

X	$F\left(X\right)$
0	ERROR
0.5	−2.265
1	0
1.5	3.493
2	8,087
2.5	13.742
3	20.441
3.5	28.172
4	36.931
4.5	46.712

Điều kiện: $5x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{5}\cdot$

Ta có: $\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x=\sqrt{5x-1}+1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x-9}-2\sqrt{5x-1}+4x^2+6x-2=0$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{x-9}+2)+\sqrt{5x-1}(\sqrt{5x-1}-2)+4x^2+x-5=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x-9})^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}+\frac{5(x-1)\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(x-1)(4x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}+\frac{5\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(4x+5)\right]=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$$

Với $x\ge\frac{1}{5}\cdot$ ta có $\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}+\frac{5\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(4x+5)>0$.

Vậy $(x-1)\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}+\frac{5\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(4x+5)\right]=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 27: Giải phương trình: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$

(Đề thi đề Olympic 30/04/2013 – Trường Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai – Sóc Trăng)

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$f(X)=2X^2-5X-\sqrt{X-2}-\sqrt{4-X}-\sqrt{2X-5}$

- START = 2.5
- END = 4
- STEP = 0.5

X	$F(X)$
2.5	−1.931
3	0
3.5	3.6539
4	8.8537

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu tăng.

Định hướng giải bài: Nhân biểu thức liên hợp với nghiệm đơn $x=3$.

Điều kiện: $\frac{5}{2}\le x\le 4.$

Ta có: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x-2}-1)+(\sqrt{4-x}-1)+(\sqrt{2x-5}-1)=2x^2-5x-3$

$$\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2(x-3)}{\sqrt{2x-5}+1}=(x-3)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-(2x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}\end{array}\right.$$

Để xác định hướng đi cho bài toán, xét:

$$f(X)=\frac{1}{\sqrt{X-2}+1}+\frac{2}{\sqrt{2X-5}+1}$$

$$g(X)=2X+1+\frac{1}{\sqrt{4-X}+1}$$

- START = 2.5
- END = 4
- STEP = 0.5

X	$F(X)$
2.5	2.5857
3	1.5
3.5	1.2779
4	1.1462
X	$G(X)$
2.5	6.4494
3	7.5
3.5	8.5857
4	10

Nghiệm: Phương trình $f(x)=g(x)$ vô nghiệm đồng thời ta đánh giá được lý do vô nghiệm bởi:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}+1}<3\\ 2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}>6\end{cases}$$

Để chứng minh phương trình vô nghiệm, ta sẽ chứng minh những đánh giá như trên.

Ta có: $\forall x\in\left[\frac{5}{2};4\right]\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}+1}\le\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{1}=3\\ 2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}>2x+1\ge 2.\dfrac{5}{2}+1=6\end{cases}$

Vậy: $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}+1}<2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}$

Do đó phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}$ vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 28: Giải phương trình: $x^3+5x^2+6x=(x+2)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x}\right)$

(Đề thi đề Olympic 30/04/2013 – Sở Giáo Dục & Đào Tạo tỉnh Bạc Liêu)

Xét hàm số với các giá trị sau:

- START = – 1
- END = 5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Định hướng giải bài: Sử dụng phương pháp nhân liên hợp.

X	$F(X)$
– 1	– 4.449
– 0.5	– 6.892
0	– 7.3
0.5	– 5.258
1	0
1.5	9.2508
2	23.273
2.5	42.853
3	68.786
3.5	101.88
4	143.02
4.5	193.22
5	255.75

Điều kiện: $-1\le x\le 5$.

Ta có: $x^3+5x^2+6x=(x+2)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x}\right)$

$$\Leftrightarrow x(x^2+5x+6)=(x+2)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x(x+2)(x+3)=(x+2)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x(x+3)=\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x}\qquad (\text{do}: x+2>0,\ \forall x\in\left[-1;5\right])$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-\sqrt{2x+2}-\sqrt{5-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+2}(\sqrt{2x+2}-2)+2(2-\sqrt{5-x})+2x^2+4x-6=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+2}+2}+\frac{(x-1)}{2+\sqrt{5-x}}+(x-1)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } 0<\frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+2}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{5-x}}+x+3=0 \text{ vô nghiệm } \forall x\in\left[-1;5\right].$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 29: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

Điều kiện: $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Cách 1:

Ta có: $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+6}-2)+(\sqrt{x-1}-1)=x^2-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2.\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-x-2\right]=0$$

Do $\frac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-x-2<\frac{1}{3}+1-x-2=-\frac{2}{3}-x<0,\ \forall x\ge 1$ nên:

$$(x-2)\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-x-2\right]=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Cách 2:

Ta có: $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

$$\Leftrightarrow 4x^2-5x+6+\sqrt[3]{x+6}\cdot\left[\sqrt[3]{(x+6)^2}-4\right]+4\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(4x+3)+\frac{(x-2)(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+4\sqrt[3]{x+6}+16}+\frac{4(x-2)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(4x+3+\frac{(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{(\sqrt[3]{x+6}+2)^2+12}+\frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0.$$

Do $4x+3+\frac{(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{(\sqrt[3]{x+6}+2)^2+12}+\frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}>0$

Do đó: $(x-2)\left(4x+3+\frac{(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{(\sqrt[3]{x+6}+2)^2+12}+\frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 30: Giải phương trình: $x^3-2x^2-\sqrt{x^2-2x+5}=2\sqrt{4x+5}-5x-4$

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-2x+5\ge 0\\4x+5\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\frac{5}{4}$.

Cách 1:

Ta có: $x^3 - 2x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 2\sqrt{4x+5} - 5x - 4$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+6} - 2) + (\sqrt{x-1} - 1) = x^2 - 4$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2.\sqrt[3]{x+6} + 4} + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} = (x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - x - 2\right] = 0$$

Do $\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} - x - 2 < \dfrac{1}{3} + 1 - x - 2 = -\dfrac{2}{3} - x < 0,\ \forall x \geq 1$ nên:

$$(x-2)\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - x - 2\right] = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Cách 2:

Ta có: $x^3 - 2x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 2\sqrt{4x+5} - 5x - 4$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x-1} = x^2 - 1$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 6 + \sqrt[3]{x+6}\cdot\left[\sqrt[3]{(x+6)^2} - 4\right] + 4\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(4x+3) + \frac{(x-2)(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 4\sqrt[3]{x+6} + 16} + \frac{4(x-2)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} = 0$$

Vì $4x + 3 + \dfrac{(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{(\sqrt[3]{x+6}+2)^2 + 12} + \dfrac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} > 0$

$$\Rightarrow (x-2)\left(4x + 3 + \frac{(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{(\sqrt[3]{x+6}+2)^2+12} + \frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\right) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 31: Giải phương trình: $x^3 - 2x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 2\sqrt{4x+5} - 5x - 4$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x + 5 \geq 0 \\ 4x + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{5}{4}$.

Cách 1:

Ta có: $x^3 - 2x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 2\sqrt{4x+5} - 5x - 4$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 5x - 4 + (2 - \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + 2(3 - \sqrt{4x+5}) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x+4)+\frac{-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}+2}+2\cdot\frac{-4x+4}{\sqrt{4x+5}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\underbrace{\left(x^2-x+4-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}+2}-\frac{8}{\sqrt{4x+5}+3}\right)}_{f(x)}=0 \qquad (1)$$

Ta có: $\sqrt{(x-1)^2+4}+2>\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|\ge x-1\Rightarrow -\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+4}+2}>-1$ (2)

Mặt khác: $\forall x\ge-\dfrac{5}{4}$, suy ra $\dfrac{8}{\sqrt{4x+5}+3}\le\dfrac{8}{3}\Leftrightarrow-\dfrac{8}{\sqrt{4x+5}+3}\ge-\dfrac{8}{3}$ (3)

Từ (2), (3), suy ra: $f(x)>x^2-x+4-\dfrac{11}{3}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{12}>0,\ \forall x\ge-\dfrac{5}{4}$ (4)

(1) $\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$

Cách 2:

Ta có: $x^3-2x^2-\sqrt{x^2-2x+5}=2\sqrt{4x+5}-5x-4$

$$\Leftrightarrow 3x^3-6x^2+15x+12-3\sqrt{x^2-2x+5}-6\sqrt{4x+5}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1-\sqrt{x^2-2x+5})+2\sqrt{4x+5}(\sqrt{4x+5}-3)+3x^3-6x^2+4x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12(x-1)}{x+1+\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{8(x-1)\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+5}+3}+(x-1)(3x^2-3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\frac{12}{x+1+\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{8\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+5}+3}+3x^2-3x+1\right)=0\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 32: Giải phương trình: $(5x-4)\sqrt{2x-3}-(4x-5)\sqrt{3x-2}=2$

(Trích Chọn đội tuyển thi Học sinh giỏi Quốc Gia – Tỉnh Đồng Nai - 2015)

Điều kiện: $x\ge\dfrac{3}{2}\cdot$

Ta có: $(5x-4)\sqrt{2x-3}-(4x-5)\sqrt{3x-2}=2$

$$\Leftrightarrow (5x-4)\sqrt{2x-3}=2+(4x-5)\sqrt{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow 50x^3-155x^2+152x-48=48x^3-152x^2+155x-46+4(4x-5)\sqrt{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2-3x-2-4(4x-5)\sqrt{3x-2}=0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (4x-5)\sqrt{3x-2}.(\sqrt{3x-2}-4)+2x^3-15x^2+20x-12=0 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-6)(4x-5)\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+4}+(x-6)(2x^2-3x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)\cdot\left[\frac{3(4x-5)\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+4}+2x^2-3x+2\right]=0 \Leftrightarrow x=6\cdot$$

Do $\frac{3(4x-5)\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+4}+2x^2-3x+2>0,\ \forall x\geq\frac{3}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=6$.

Bài 32: Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12$

Điều kiện: $x\geq -2$.

Cách 1:

Ta có: $(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12$

$$\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+2}-2)+(x+6)(\sqrt{x+7}-3)-(x^2+2x-8)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}+(x+6)\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}-(x-2)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+2}+3}-x-4\right)=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Do $x\geq -2 \Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-x-4<\frac{x+1}{2}+\frac{x+6}{3}-x-4=\frac{-(x+12)}{6}<0$

So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Cách 2:

Ta có: $(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+4-3\sqrt{x+2})+(x+6)\sqrt{x+7}(\sqrt{x+7}-3)+x^2+3x-10=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2(x-2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+(x+6)\sqrt{x+7}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}+(x-2)(x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}+x+5\right)=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 33: Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{x+3}=3x^2+14x+13$

Điều kiện: $4x+5\ge 0$.

Cách 1:

Ta có: $(x+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{x+3}=3x^2+14x+13$

$$\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{4x+5}-3)+2(x+5)(\sqrt{x+3}-2)=3x^2+7x-10$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x+1).(x-1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\frac{2(x+5)(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}-(x-1)(3x+10)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\frac{4(x+1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\frac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-(3x+10)\right]=0\Leftrightarrow x=1.$$

Do $\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\dfrac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-(3x+10)\le\dfrac{4}{3}(x+1)+\dfrac{2}{2}\cdot(x+5)-(3x+10)$

$$=-\frac{2x+23}{3}<0,\ \forall x\ge-\frac{5}{4}\cdot$$

So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 2:

Ta có: $(x+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{x+3}=3x^2+14x+13$

$$\Leftrightarrow 2(x+1).\left[(x+2)-\sqrt{4x+5}\right]+2(x+5)\sqrt{x+3}.(\sqrt{x+3}-2)+2x^2+6x-8=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+1)^2(x-1)}{x+2+\sqrt{4x+5}}+\frac{2(x+5)(x-1)\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}+2(x-1)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\frac{2(x+1)^2}{x+2+\sqrt{4x+5}}+\frac{2(x+5)\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}+2(x+4)\right]=0\Leftrightarrow x=1.$$

Do $\dfrac{2(x+1)^2}{x+2+\sqrt{4x+5}}+\dfrac{2(x+5)\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}+2(x+4)>0,\ \forall x\ge-\dfrac{5}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 34: Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+2}+x\sqrt{3x-2}=2\sqrt{2x^2+1}$

Điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}\cdot$

Ta có: $\sqrt[3]{3x+2}+x\sqrt{3x-2}=2\sqrt{2x^2+1}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x+2}-2)+2+x(\sqrt{3x-2}-2)+2x=2\sqrt{2x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x+2}-2)+x(\sqrt{3x-2}-2)+2\left[(x+1)-\sqrt{2x^2+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4}+\frac{3x(x-2)}{\sqrt{3x-2}+2}-\frac{2x(x-2)}{x+1+\sqrt{2x^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4}+\frac{3x}{\sqrt{3x-2}+2}-\frac{2x}{x+1+\sqrt{2x^2+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{3}{(\sqrt[3]{3x+2}+1)^2+3}+\frac{x(3\sqrt{2x^2+1}-2\sqrt{3x-2}+3x-1)}{(\sqrt{3x-2}+2)(x+1+\sqrt{2x^2+1})}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\underbrace{\frac{3}{(\sqrt[3]{3x+2}+1)^2+3}+\frac{x\cdot\left(\frac{18x^2-12x+17}{3\sqrt{2x^2+1}+2\sqrt{3x-2}}+3x-1\right)}{(\sqrt{3x-2}+2)(x+1+\sqrt{2x^2+1})}}_{f(x)}\right]=0$$

$\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Do $\forall x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} 18x^2-12x+17>0 \\ 3x-1>0 \end{cases}$ nên $f(x)>0$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 35: Giải phương trình: $x^2-x-18+(2x+9)\sqrt{x+3}-2\sqrt{5x-1}=0$

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{5}$.

Cách 1:

Ta có: $x^2-x-18+(2x+9)\sqrt{x+3}-2\sqrt{5x-1}=0$

$\Leftrightarrow (2x+9)(\sqrt{x+3}-2)+2(2-\sqrt{5x-1})+x^2+3x-4=0$

$\Leftrightarrow (2x+9)\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{10.(1-x)}{\sqrt{5x-1}+2}+(x-1)(x+4)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\frac{2x+9}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{10}{\sqrt{5x-1}+2}+x+4\right)=0$ (1)

Xét hàm số $f(x)=\frac{2x+9}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{10}{\sqrt{5x-1}+2}+x+4$ trên $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$ có:

$f'(x)=\frac{2x+3+8\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}+2)^2}+\frac{5}{\sqrt{5x-1}(\sqrt{5x-1}+2)^2}+1>0,\ \forall x \geq \frac{1}{5}$.

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$, suy ra $f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{227-94\sqrt{5}}{10}>0$ (2)

Từ (1), (2), suy ra: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Cách 2:

Ta có: $x^2-x-18+(2x+9)\sqrt{x+3}-2\sqrt{5x-1}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}(4x+18-11\sqrt{x+3})+2\sqrt{5x-1}(\sqrt{5x-1}-2)+(x-1)(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\cdot\frac{(x-1)(16x+39)}{4x+18+11\sqrt{x+3}}+\frac{10(x-1)\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(x-1)(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\frac{(16x+39)\sqrt{x+3}}{4x+18+11\sqrt{x+3}}+\frac{10\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(2x+1)\right]=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Do $\forall x\geq\frac{1}{5}$, suy ra: $\frac{(16x+39)\sqrt{x+3}}{4x+18+11\sqrt{x+3}}+\frac{10\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+2x+1>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 36: Giải phương trình: $3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}=4x^2$

(Đề thi đề Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Bình Long – Bình Phước)

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO: Xét

$f(X)=X-\sqrt{X}-1+\sqrt{2(x^2-x+1)}$

- START = 0.5
- END = 1.5
- STEP = 0.1

Nghiệm: $x=\frac{1}{2}, x=1$

Tính đơn điệu: Hàm số không đơn điệu.

Định hướng giải bài: Sử dụng phương pháp nhân liên hợp 2 nghiệm hữu tỷ đơn.

X	F(X)
0.5	0
0.6	1.0337
0.7	1.1578
0.8	1.0134
0.9	0.6372
1.0	0
1.1	−1.113
1.2	ERROR
1.3	ERROR
1.4	ERROR
1.5	ERROR

Điều kiện: $\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$. (a)

- Nhận thấy $x=\frac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình.
- Với $x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{2x-1}+2x-1\neq0$ thì:

$$3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}=4x^2$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\sqrt{2x-1}-(2x-1)\right]+x.\left[\sqrt{5-4x^2}-(-2x+3)\right]-3(2x^2-3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6(2x^2-3x+1)}{\sqrt{2x-1}+2x-1}-\frac{4x(2x^2-3x+1)}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}-3(2x^2-3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-3x+1)\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{2x-1}+2x-1}+\frac{4x}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\text{ (loại) hoặc } x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=1,\ x=\frac{1}{2}\cdot$

Bài 37: Giải phương trình: $\sqrt{3x-5}+2\sqrt[3]{19x-30}=2x^2-7x+11$

(Đề thi đề Olympic 30/04/2014 – Trường Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai – Sóc Trăng)

Điều kiện: $3x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{5}{3}\cdot$

Ta có: $\sqrt{3x-5}+2\sqrt[3]{19x-30}=2x^2-7x+11$

$$\Leftrightarrow\left[\sqrt{3x-5}-(x-1)\right]+2\cdot(\sqrt[3]{19x-30}-x)=2x^2-10x+12$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x-5-(x-1)^2}{\sqrt{3x-5}+x-1}+2\cdot\frac{19x-30-x^3}{\sqrt[3]{(19x-30)^2}+x\sqrt[3]{19x-30}+x^2}=2(x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow-\frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{3x-5}+x-1}-2\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x+5)}{\sqrt[3]{(19x-30)^2}+x\sqrt[3]{19x-30}+x^2}=2(x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow(x-2)(x-3)\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{3x-5}+x-1}+\frac{2(x+5)}{\sqrt[3]{(19x-30)^2}+x\sqrt[3]{19x-30}+x^2}+2\right]}_{>0,\ \forall x\in(a)}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)(x-3)=0\Leftrightarrow x=2\text{ hoặc }x=3.$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm là $x=2,\ x=3.$

Bài 38: Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{3x+1}+x^3+2x^2+1=2\sqrt{x^2-x+1}+6x$

Điều kiện: $\begin{cases}3x+1\geq 0\\ x^2-x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq-\frac{1}{3}\cdot$

Cách 1:

Ta có: $(x+1)\sqrt{3x+1}+x^3+2x^2+1=2\sqrt{x^2-x+1}+6x$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left[\sqrt{3x+1}-(x+1)\right]+2(1-\sqrt{x^2-x+1})+x^3+3x^2-4x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x^2+x)}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2(-x^2+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+(x^2-x)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+x)\left(\frac{x+1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}+1}-x-4\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Do $\frac{x+1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}+1}-x-4<\frac{x+1}{x+1}+2-x-4=-x-1<0,\ \forall x\geq -\frac{1}{3}.$

So với điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0,\ x=1.$

Cách 2:

Ta có: $(x+1)\sqrt{3x+1}+x^3+2x^2+1=2\sqrt{x^2-x+1}+6x$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+1}(\sqrt{x^2-x+1}-1)+\sqrt{3x+1}(x+1-\sqrt{3x+1})+x^3-x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-x)\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{(x^2-x)\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+(x^2-x)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)\cdot\left(\frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1\right)=0\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Do $\forall x\geq -\frac{1}{3}$, suy ra: $\frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0,\ x=1.$

Bài 39: Giải phương trình: $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}=x^3+x^2-4x-4+|x|+|x-1|$

Điều kiện: $-2\leq x\leq 3.$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3-x}-|x-1|)+(\sqrt{2+x}-|x|)=(x+2)(x^2-x-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x+2}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\frac{-x^2+x+2}{\sqrt{x+2}+|x|}+(x+2)(-x^2+x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+x+2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+|x|}+x+2\right)=0$$

$\Leftrightarrow -x^2+x+2=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-1,\ x=2.$

Bài **40:** Giải phương trình: $(8x^3-6x+1)\sqrt{4x^2+21}+16x^4-12x^2+2x=21$

(Trích đề thi chọn Đội tuyển Học sinh giỏi Quốc gia – Nghệ An – 2014)

Đặt $t=2x$. Khi đó: $(8x^3-6x+1)\sqrt{4x^2+21}+16x^4-12x^2+2x=21$

$$\Leftrightarrow (t^3-3t+1)\sqrt{t^2+21}+t^4-3t^2+t=21$$

$$\Leftrightarrow (t^3-3t+1)\sqrt{t^2+21}+t(t^3-3t+1)=21$$

$$\Leftrightarrow (t^3-3t+1).(\sqrt{t^2+21}+t)=21 \Leftrightarrow \frac{21.(t^3-3t+1)}{\sqrt{t^2+21}-t}=21$$

$$\Leftrightarrow t^3-3t+1=\sqrt{t^2+21}-t \Leftrightarrow (t^3-3t-2)+(t+3-\sqrt{t^2+21})=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+1)^2+\frac{6(t-2)}{t+3+\sqrt{t^2+21}}=0 \Leftrightarrow (t-2)\left[(t+1)^2+\frac{6}{t+3+\sqrt{t^2+21}}\right]=0$$

$\Leftrightarrow t=2$, suy ra: $t=2x=2 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 41: Giải phương trình: $\dfrac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}=\dfrac{2\sqrt{9-x}}{x}$

Điều kiện: $\begin{cases} x+1\ge 0;\ 9-x\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 9 \\ x\ne 0 \end{cases} \Rightarrow 3\sqrt{x+1}+x+3>0.$

Ta có: $\dfrac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}=\dfrac{2\sqrt{9-x}}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{2\sqrt{9-x}}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}-1)=2\sqrt{9-x} \Leftrightarrow x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-3)+2(1-\sqrt{9-x})=0 \Leftrightarrow \frac{(x-8)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3}+\frac{2(x-8)}{1+\sqrt{9-x}}=0$$

$\Leftrightarrow x-8=0 \Leftrightarrow x=8$: thỏa mãn điều kiện.

Do: $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{9-x}}>0,\ \forall x\in[-1;9]\setminus\{0\}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$.

Bài 42: Giải phương trình: $\dfrac{(x-6)\sqrt{x-1}+8-2x}{x-3+\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-5}{2}$

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 1 \\ \sqrt{x-1}-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ne 2 \end{cases}.$

Khi đó: $\dfrac{(x-6)\sqrt{x-1}+8-2x}{x-3+\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-5}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}-1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{\sqrt{2x-1}-5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-3=\frac{\sqrt{2x-1}-5}{2}$$

Do sử dụng casio, tìm được nghiệm duy nhất $x=5$ nên có tách ghép:

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-2=\frac{(\sqrt{2x-1}-3)-2}{2}+1 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x-1}-2)=(\sqrt{2x-1}-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{2(x-5)}{\sqrt{2x-1}+3} \Leftrightarrow (x-5)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=0 \\ \sqrt{2x-1}+1=\sqrt{x-1}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=5 \vee \begin{cases} x>1 \\ 2x+2\sqrt{2x-1}=x-1 \end{cases} : \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài 43: Giải phương trình: $\dfrac{9x^2-14x+25}{3x+3+4\sqrt{2x-1}}=\dfrac{(\sqrt{x-1}-1)(2x-4)}{x}$

Điều kiện: $x\ge 1$, suy ra: $3x+3+4\sqrt{2x-1}>0$.

Ta có:

$$\left[(3x+3)+4\sqrt{2x-1}\right]\left[(3x+3)-4\sqrt{2x-1}\right]=(3x+3)^2-16\sqrt{2x-1}=9x^2-14x+25$$

nên ta luôn có: $(3x+3)-4\sqrt{2x-1}=\dfrac{9x^2-14x+25}{3x+3+4\sqrt{2x-1}}.$

Do đó phương trình: $\dfrac{9x^2-14x+25}{3x+3+4\sqrt{2x-1}}=\dfrac{(\sqrt{x-1}-1)(2x-4)}{x}$

$$\Leftrightarrow 3x+3-4\sqrt{2x-1}=\frac{(\sqrt{x-1}-1)(2x-4)}{x}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3x-4x\sqrt{2x-1}=(2x-4)\sqrt{x-1}-2x+4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+5x-4-4x\sqrt{2x-1}-2(x-2)\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[4x^2-2.2x.\sqrt{2x-1}+(2x-1)\right]-\left[(x-2)^2+2.(x-2).\sqrt{x-1}+(x-1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-\sqrt{2x-1})^2-(x-2+\sqrt{x-1})^2=0 \Leftrightarrow (2x-\sqrt{2x-1})^2=(x-2+\sqrt{x-1})^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\sqrt{2x-1}=x-2+\sqrt{x-1} \\ 2x-\sqrt{2x-1}=2-x-\sqrt{x-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=x+2 & (1) \\ 3x-2+\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow 3x-2+2\sqrt{(x-1)(2x-1)}=x^2+4x+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(2x-1)}=x^2+x+6$$

Do $\forall x \ge 1$, suy ra: $2\sqrt{(x-1)(2x-1)}<2\sqrt{x.2x}=2\sqrt{2}.x \overset{Cauchy}{\le} x^2+2<x^2+x+6$

nên phương trình (1) vô nghiệm.

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}-1)+(x-1)=0$

(sử dụng kỹ thuật truy ngược)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\frac{2(x-1)\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\cdot\underbrace{\left[1+\frac{2\sqrt{(x-1)(2x-1)}}{\sqrt{2x-1}+1}+\sqrt{x-1}\right]}_{>0,\ \forall x\ge 1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 44: Giải phương trình: $3\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4}=2x+2\sqrt{4x^2-x+1}$

Ta có: $3\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4}=2x+2\sqrt{4x^2-x+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16x^2-4x+4}-\sqrt{9x^2-4x+4}=3\sqrt[3]{2x^2-x^3}-2x \ge 0 \qquad (1)$$

Điều kiện: $3\sqrt[3]{2x^2-x^3}-2x \ge 0 \Leftrightarrow 35x^3-54x^2 \le 0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x \le \frac{54}{35}$.

- **<u>TH 1</u>**. Với $x=0$ thì (1) luôn đúng nên $x=0$ là một nghiệm.
- **<u>TH 2</u>**. Với $x \in \left(0;\frac{54}{35}\right]$ nên chia hai vế của (1) cho $x>0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{16-4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{9-4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=3\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1} \qquad (2)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}$, suy ra: $t^3=\frac{2}{x}-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{t^3+1}{2}$.

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{t^6+15}-\sqrt{t^6+8}=3t-2>0$ (điều kiện: $3t-2>0$)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{t^6+15}-4)+(3-\sqrt{t^6+8})=3t-3 \Leftrightarrow \frac{t^6-1}{\sqrt{t^6+15}+4}-\frac{t^6-1}{\sqrt{t^6+8}+3}=3(t-1)$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\cdot\left[\frac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+15}+4}-\frac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+8}+3}-3\right]=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow x=1.$$

Do luôn có: $\sqrt{t^6+15}+4>\sqrt{t^6+8}+3\Rightarrow\frac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+15}+4}<\frac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+8}+3}$

Suy ra: $\frac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+15}+4}-\frac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+8}+3}-3<0,\ \forall t>\frac{2}{3}\cdot$

- **TH 3**. Với $x\in(-\infty;0)$, chia hai vế cho $x<0$, ta được:

$$(1)\Leftrightarrow-\left(-\frac{1}{x}\right)\sqrt{16x^2-4x+4}+\left(-\frac{1}{x}\right)\sqrt{9x^2-4x+4}=\frac{1}{x}3.\sqrt[3]{2x^2-x^3}-2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{9-4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{16-4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=3\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}\qquad(3)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}$, suy ra: $t^3=\frac{2}{x}-1\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{t^3+1}{2}\cdot$ Do $x<0\Rightarrow t^3<-1\Leftrightarrow t<-1$.

$$(3)\Leftrightarrow\sqrt{t^6+8}-\sqrt{t^6+15}-3t+2=0\qquad(4)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^6+8}-\sqrt{t^6+15}-3t+2$ trên $(-\infty;-1)$, có:

$f'(t)=-3+3t^5\left(\frac{1}{\sqrt{t^6+8}}-\frac{1}{\sqrt{t^6+15}}\right)<0,\ \forall t<-1$. Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$, suy ra: $f(t)=\sqrt{t^6+8}-\sqrt{t^6+15}-3t+2>f(-1)=2$ (5)

Từ (4), (5), suy ra phương trình (4) vô nghiệm.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=0,\ x=1$.

Bài 45: Giải phương trình: $x^2+6x+1=(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}$

(Trích đề thi Học sinh giỏi Long An 2014)

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Cách 1:

Ta có: $x^2+6x+1=(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}$

$$\Leftrightarrow(2x+1)(\sqrt{x^2+2x+3}-2)=x^2+2x-1\Leftrightarrow\frac{(2x+1)(x^2+2x-1)}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}=x^2+2x-1$$

$$\Leftrightarrow(x^2+2x-1)\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-1=0\\\sqrt{x^2+2x+3}=2x-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\pm\sqrt{2}\\\begin{cases}2x-1\ge0\\x^2+2x+3=(2x-1)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\pm\sqrt{2}\\x=\frac{3+\sqrt{15}}{3}\end{array}\right.\cdot$$

Cách 2:

Do $x=-\frac{1}{2}$ không là nghiệm nên:

$$x^2+6x+1=(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3}-2=\frac{x^2+6x+1}{2x+1}-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}=\frac{x^2+2x-1}{2x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-1=0 \\ \sqrt{2x^2+2x+3}=2x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\pm\sqrt{2} \\ x=\frac{3+\sqrt{15}}{3} \end{array}\right.$$

Cách 3:

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+3}\geq\sqrt{2}\Rightarrow x^2=t^2-2x-3$.

Khi đó ta có: $x^2+6x+1=(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}$

$\Leftrightarrow t^2-(2x+1)\cdot t+4x-2=0$ có $\Delta_t=(2x-3)^2\Rightarrow t=2$ hoặc $t=2x-1$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x+3}=2 \\ \sqrt{x^2+2x+3}=2x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$ hoặc $x=\frac{3+\sqrt{15}}{3}$ là các nghiệm.

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt là $x=-1\pm\sqrt{2},\ x=\frac{3+\sqrt{15}}{3}$.

Bài 46: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

(Đề đề thi Olympic 30/04/2013 – Trường Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang)

Điều kiện: $-2\leq x\leq -1$ hoặc $x\geq 1$.

Cách 1:

Ta có: $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2x^2+16x+18}-(2x+4)\right]+\sqrt{x^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x^2-1)}{\sqrt{2x^2+16x+18}+2x+4}+\sqrt{x^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\left(1-\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2x^2+16x+18}+2x+4}\right)=0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$ hoặc $\sqrt{2x^2+16x+18}+2x+4=2\sqrt{x^2-1}$

Do đó: $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4 \\ \sqrt{2x^2+16x+18}-2\sqrt{x^2-1}=-2x-4 \end{array}\right. \Rightarrow 3\sqrt{x^2-1}=4x+8$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+8\geq 0 \\ 9(x^2-1)=(4x+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ 7x^2+64x+73=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-32+3\sqrt{57}}{7}.$$

Cách 2:

Ta có: $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4(x+2)^2-2(x^2-1)}=2(x+2)-\sqrt{x^2-1} \qquad (1)$$

Do $x=-2$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế $x+2>0$, được:

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{4-2\cdot\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}}=2-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$ (2) và đặt $t=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}\geq 0$ thì phương trình:

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{4-2t^2}=2-t\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq t\leq 2 \\ 4-2t^2=(2-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

- Với $t=0\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}=0\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.
- Với $t=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-1}=4(x+2)\Leftrightarrow x=\dfrac{-32+3\sqrt{57}}{7}$.

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x=\pm 1$, $x=\dfrac{3\sqrt{57}-32}{7}$.

Bài 47: Giải phương trình: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2-2x+2}=5$

Điều kiện: $x\neq 0$.

Ta có: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2-2x+2}=5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{x}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2})=5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}}=5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}}=5 \qquad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{(x-1)^2+1}\geq 2$.

$(1)\Leftrightarrow t+\dfrac{4}{t}=5\Leftrightarrow t^2-5t+4=0\Leftrightarrow t=1$ (loại) hoặc $t=4$ (nhận).

Suy ra: $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}=4\Leftrightarrow x^2+2+\sqrt{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}=8$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^4+4}=6-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6} \\ x^4+4=x^4-12x^2+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6} \\ 12x^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bài 48: Giải phương trình: $2.\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+x^2-4=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

Điều kiện: $\frac{x^2+x+1}{x+4}\ge 0 \Rightarrow x+4>0 \Leftrightarrow x>-4.$

Ta có: $2.\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+x^2-4=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)+2.\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}-1\right)+\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)+2.\frac{\frac{x^2+x+1}{x+4}-1}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+1}+\frac{\sqrt{x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)+\frac{2.(x^2-3)}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)}+x+4}+\frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+1}.(\sqrt{x^2+1}+2)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)\left[1+\frac{2}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)}+x+4}+\frac{1}{x^2+1+2\sqrt{x^2+1}}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Do $1+\frac{2}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)}+x+4}+\frac{1}{x^2+1+2\sqrt{x^2+1}}>0,\ \forall x>-4.$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$.

Bài 49: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x+9}{x^2+x+2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{x^2+1}{4}$

Điều kiện: $-9\le x<-\sqrt{3}$ hoặc $x>\sqrt{3}$.

Ta có: $\sqrt{\frac{x+9}{x^2+x+2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{x^2+1}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-7)+8}{4}-\frac{2}{\sqrt{x^2-3}}-\sqrt{\frac{x+9}{x^2+x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-7)+\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2-3}}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{x+9}}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-7)+\frac{\sqrt{x^2-3}-2}{\sqrt{x^2-3}}+\frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x+9}}{\sqrt{x^2+x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-7)+\frac{x^2-7}{\sqrt{x^2-3}.(\sqrt{x^2-3}+2)}+\frac{x^2-7}{x^2+x+2+\sqrt{(x+9)(x^2+x+2)}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-7)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3}.(\sqrt{x^2-3}+2)}+\frac{1}{x^2+x+2+\sqrt{(x+9)(x^2+x+2)}}\right]=0$$

Do $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3}.(\sqrt{x^2-3}+2)}+\frac{1}{x^2+x+2+\sqrt{(x+9)(x^2+x+2)}}>0$

Nên $x^2-7=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{7}$ hoặc $x=\sqrt{7}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=\pm\sqrt{7}$.

Bài 50: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}+x^2-x-3=\sqrt{5x+7}$

(Đề thi đề Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Bảo Lộc – Lâm Đồng)

Điều kiện: $x \ge -\frac{5}{7}$. Đặt $a=\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}$, $b=x+2$.

Ta có: $\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}+x^2-x-3=\sqrt{5x+7}$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-3)+\left[\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}-(x+2)\right]+\left[(x+2)-\sqrt{5x+7}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-3+\frac{x^2-x-3}{a^2+ab+b^2}+\frac{x^2-x-3}{x+2+\sqrt{5x+7}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-3)\left(\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+7}}+1\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Do: $\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+7}}+1>0,\ \forall x \ge -\frac{7}{5}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Bài 51: Giải phương trình: $\sqrt[3]{12x^2+46x-15}-\sqrt[3]{x^3-5x+1}=2x+2$

Đặt $a=\sqrt[3]{12x^2+46x-15}$, $b=2x+1$, $c=\sqrt[3]{x^3-5x+1}$.

Ta có: $\sqrt[3]{12x^2+46x-15}-\sqrt[3]{x^3-5x+1}=2x+2$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt[3]{12x^2+46x-15}-(2x+1)\right]-(\sqrt[3]{x^3-5x+1}+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8x^3+40x-16}{a^2+ab+b^2}-\frac{x^3-5x+2}{c^2-c+1}=0 \Leftrightarrow \frac{8(x^3-5x+2)}{a^2+ab+b^2}+\frac{x^3-5x+2}{c^2-c+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-5x+2)\cdot\left(\frac{8}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{c^2-c+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Do $\frac{8}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{c^2-c+1}>0,\ \forall a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=2$ hoặc $x=-1\pm\sqrt{2}$.

Bài 52: Giải phương trình: $(3x^2+11)\sqrt{x^2+1}=3\sqrt{3}.x^3-8x^2+11\sqrt{3}.x+4$

Điều kiện: $3\sqrt{3}.x^3-8x^2+11\sqrt{3}.x+4\geq 0$

Ta có: $(3x^2+11)\sqrt{x^2+1}=3\sqrt{3}.x^3-8x^2+11\sqrt{3}.x+4$

$$\Leftrightarrow (3x^2+11)\sqrt{x^2+1}=\sqrt{3}.x(3x^2+11)-8x^2+4$$

$$\Leftrightarrow (3x^2+11)(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3}.x)=4(1-2x^2) \Leftrightarrow \frac{(3x^2+11)(1-2x^2)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3}.x}=4(1-2x^2)$$

$$\Leftrightarrow (1-2x^2)\left(\frac{3x^2+11}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3}.x}-4\right)=0 \Leftrightarrow (1-2x^2)(3x^2+11-4\sqrt{x^2+1}-4\sqrt{3}x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x^2)\cdot\left[(x^2+1-2.\sqrt{x^2+1}.2+2^2)+2(x^2-2x.\sqrt{3}+3)\right]=0 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow (1-2x^2)\left[(\sqrt{x^2+1}-2)^2+2(x-\sqrt{3})^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x^2=0 \\ \begin{cases} \sqrt{x^2+1}-2=0 \\ x-\sqrt{3}=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ hoặc } \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hoặc } x=\sqrt{3}.$$

Kết luận: Thế vào điều kiện (1), nghiệm phương trình là $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\sqrt{3}$.

Bài 53: Giải phương trình: $\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2\sqrt[3]{x^3-20}=2(x-1)$

Điều kiện: $x^3+x^2-8x-2\geq 0$

Ta có: $\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2\sqrt[3]{x^3-20}=2(x-1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+x^2-8x-2}-2=(2x-4)-2\sqrt[3]{x^3-20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+x^2-8x-6}{\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2} = \frac{(2x-4)^3-8(x^3-20)}{(2x-4)^2+2(2x-4)\sqrt[3]{x^3-20}+\sqrt[3]{(x^3-20)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x^2-2x-2)}{\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2} = \frac{-48(x^2-2x-2)}{(2x-4)^2+2(2x-4)\sqrt[3]{x^3-20}+\sqrt[3]{(x^3-20)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3} \\ \dfrac{-48}{(2x-4)^2+2(2x-4)\sqrt[3]{x^3-20}+\sqrt[3]{(x^3-20)^2}} = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2} \quad (1) \end{array}\right.$$

- Với $x \geq -3 \Rightarrow \begin{cases} VT_{(1)} = \dfrac{-48}{\left[(2x-4)+\dfrac{\sqrt[3]{(x^3-20)^2}}{2}\right]^2+\dfrac{3\sqrt[3]{(x^3-20)^2}}{4}} < 0 \\ VP_{(1)} = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (1): VN_o.$

- Với $x < -3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-2-2\sqrt[3]{x^3-20} < 0 \\ \sqrt{x^3+x^2-8x-2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Bài 54: Giải phương trình: $(x^3+3x+5)\sqrt{2x^2+5x} = 3x^3+5x^2+2x+5$

Điều kiện: $2x^2+5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{2}$ hoặc $x \geq 0$.

Ta có: $(x^3+3x+5)\sqrt{2x^2+5x} = 3x^3+5x^2+2x+5$

$$\Leftrightarrow (x^3+3x+5)(\sqrt{2x^2+5x}-1) = 3x^3+5x^2+2x+5-(x^3+3x+5)$$

$$\Leftrightarrow (x^3+3x+5)\cdot\frac{2x^2+5x-1}{\sqrt{2x^2+5x}+1} = x\cdot(2x^2+5x-1)$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+5x-1)\left(\frac{x^3+3x+5}{\sqrt{2x^2+5x}+1}-x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^2+5x-1=0 & (1) \\ x^3+3x+5 = x(\sqrt{2x^2+5x}+1) & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}$ hoặc $x = \dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}$: thỏa mãn điều kiện.

$(2) \Leftrightarrow x^3+2x+5 = x\sqrt{2x^2+5x} \Leftrightarrow \left[x^3+(2x+5)\right]^2 = (x\sqrt{x}.\sqrt{2x+5})^2$

$$\Leftrightarrow (x^3)^2+2x^3(2x+5)+(2x+5)^2 = x^3(2x+5)$$

$$\Leftrightarrow (x^3)^2+x^3(2x+5)+(2x+5)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+\frac{2x+5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot(2x+5)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+2x+5=0 \\ 2x+5=0 \end{cases}$$: vô nghiệm.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là:

$x = \frac{-5+\sqrt{33}}{4}$, $x = \frac{-5-\sqrt{33}}{4}$.

Bài 56: Giải phương trình: $(3x^2-5x-6)\sqrt{2-x} = \sqrt{3x^2-6x-5}$

Điều kiện: $\begin{cases} 2-x \ge 0 \\ 3x^2-6x-5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le \frac{3-2\sqrt{6}}{3}$.

Ta có: $(3x^2-5x-6)\sqrt{2-x} = \sqrt{3x^2-6x-5}$

$$\Leftrightarrow (3x^2-5x-7)\sqrt{2-x} = \sqrt{3x^2-6x-5} - \sqrt{2-x} = \frac{3x^2-5x-7}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow (3x^2-5x-7)\cdot\left(\sqrt{2-x} - \frac{1}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-5x-7=0 \\ \sqrt{2-x} = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-5x-7=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5-\sqrt{109}}{6} \\ \sqrt{(2-x)(3x^2-6x-5)} = x-1 : VN_0 \end{array}\right.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{5-\sqrt{109}}{6}$.

Bài 57: Giải phương trình: $(x^2+3)\sqrt{x^2-x+1} = x^3+3x^2-4x+1$

(Đề thi đề Olympic 30/04/2014 – Trường Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên)

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} = \frac{x^3+3x^2-4x+1}{x^2+3} = (x+3) - \frac{7x+8}{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x+8}{x^2+3} + \left[\sqrt{x^2-x+1} - (x+3)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{7x+8}{x^2+3} - \frac{7x+8}{\sqrt{x^2-x+1}+x+3}$$

$$\Leftrightarrow (7x+8)\left(\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}+x+3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{8}{7} \\ \sqrt{x^2-x+1} = x^2-x \quad (1) \end{array}\right.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t^2 = x^2-x+1$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow t^2-t-1=0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2x^2-2x-1-\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Kết luận: Nghiệm cần tìm của phương trình là $x = -\frac{8}{7}$, $x = \frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$.

Bài 58: Giải bất phương trình: $\dfrac{6x^2}{(\sqrt{2x+1}+1)^2} > 2x + \sqrt{x-1} - 1$

(Đề thi thử Đại học năm 2013 – Trường Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An)

Điều kiện: $x \geq 1$, suy ra: $\sqrt{2x+1} - 1 \neq 0$.

Ta có: $\dfrac{6x^2}{(\sqrt{2x+1}+1)^2} > 2x + \sqrt{x-1} - 1$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2(\sqrt{2x+1}-1)^2}{4x^2} > 2x + \sqrt{x-1} - 1 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{2x+1} + 4 > \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1) - 3\sqrt{2x+1} + \frac{9}{4} > (x-1) + \sqrt{x-1} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1} - \frac{3}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - \frac{3}{2} > \sqrt{x-1} + \frac{1}{2}$$

$$\left(\text{do}: \sqrt{2x+1} - \frac{3}{2} > 0,\ \sqrt{x-1} + \frac{1}{2} > 0,\ \forall x \geq 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} > \sqrt{x-1} + 2 \Leftrightarrow 2x + 1 > x + 1 + 4\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} < x - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 20x + 20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 10 + 4\sqrt{5}.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm BPT là $x \in (10 + 4\sqrt{5}; +\infty)$.

Bài 59: Giải bất phương trình: $4(x+1)^2 < (2x+10)(1 - \sqrt{3+2x})^2$

(Đề thi thử Đại học năm 2013 – Trường Chuyên Thoại Ngọc *Hầu – An Giang)*

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{3}{2}$, suy ra: $1 + \sqrt{3+2x} \neq 0$.

Ta có: $4(x+1)^2 < (2x+10)(1 - \sqrt{3+2x})^2$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 < (2x+10) \cdot \frac{(1-\sqrt{3+2x})^2(1+\sqrt{3+2x})^2}{(1+\sqrt{3+2x})^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2(1+\sqrt{3+2x})^2 < 4(2x+10)(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (1+\sqrt{3+2x})^2 < 2x + 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 4 + 2x + 2\sqrt{3+2x} < 2x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \sqrt{3+2x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 3 \end{cases}.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm BPT là $x \in \left[-\dfrac{3}{2}; 3\right) \setminus \{-1\}$.

Bài 60: Giải bất phương trình: $\dfrac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \dfrac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Khi đó: $x+1+\sqrt{x+1} > 0$.

Ta có: $\dfrac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \dfrac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x+1+\sqrt{x+1})^2}{\left[(x+1)^2-(\sqrt{x+1})\right]^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2(x+1+\sqrt{x+1})^2}{(x^2+x)^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x+1+\sqrt{x+1})^2}{\left[x(x+1)\right]^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1+\sqrt{x+1})^2 < x^2+3x+18$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2+2(x+1)\sqrt{x+1} < x^2+3x+18 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+1} < 8$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 < 2^3 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < 2 \Leftrightarrow x+1 < 4 \Leftrightarrow x < 3.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm BPT là: $x \in (-1;3) \setminus \{0\}$.

Bài 61: Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}(\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}) \geq 2x-11$

Điều kiện: $3 \leq x \leq 8$. Khi đó: $\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x} > 0$.

Ta có: $\sqrt{x-1}(\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}) \geq 2x-11$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-11)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x}} \geq 2x-11 \Leftrightarrow (2x-11)\sqrt{x-1} \geq (2x-11)(\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x})$$

$$\Leftrightarrow (2x-11)(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}) \geq 0 \qquad (1)$$

Đặt: $f(x) = 2x-11$ và $g(x) = \sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}$.

Cho $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{2}$ và $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{x-3}+\sqrt{8-x}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(8-x)} = x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ -4x^2+43x-90=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{43+\sqrt{409}}{8}.$$

x	$-\infty$		3		$\frac{11}{2}$		$\frac{43+\sqrt{409}}{8}$		8		$+\infty$
$f(x)$		▨		−	0	+	|	+		▨	
$g(x)$		▨		−	|	−	0	+		▨	
$f(x).g(x)$		▨		+	0	−	0	+		▨	

***Kết luận**:* Dựa vào bản xét dấu, tập nghiệm là: $x\in\left[3;\frac{11}{2}\right]\cup\left[\frac{43+\sqrt{409}}{8};8\right]$.

Bài 62: Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2}+x^2-x-2\le\sqrt{3x-2}$

Điều kiện: $2x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{2}{3}$.

Ta có: $\sqrt{x+2}+x^2-x-2\le\sqrt{3x-2}$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2})+x^2-x-2\le 0\Leftrightarrow\frac{-2(x-2)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+(x+1)(x-2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1\right)\le 0 \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=-\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1$ trên $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ có:

$$f'(x)=\frac{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})'}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})^2}+1=\frac{\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{3}{\sqrt{3x-2}}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})^2}+1>0,\ \forall x>\frac{3}{2}.$$

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Suy ra: $x\ge\frac{2}{3}\Leftrightarrow f(x)\ge f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10-3\sqrt{6}}{6}>0$ nên $(1)\Leftrightarrow x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 2$.

***Kết luận**:* Giao với điều kiện, tập nghiệm của BPT là: $x\in\left[\frac{2}{3};2\right]$.

Bài 63: Giải bất phương trình:

$(2+\sqrt{x^2-2x+5})(x+1)+4x\sqrt{x^2+1}\le 2x\sqrt{x^2-2x+5}$

(Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Nguyễn Khuyến Tp. HCM)

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $(2+\sqrt{x^2-2x+5})(x+1)+4x\sqrt{x^2+1}\le 2x\sqrt{x^2-2x+5}$

$$\Leftrightarrow(x+1)(2+\sqrt{x^2-2x+5})+2x(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5})\le 0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)(2+\sqrt{x^2-2x+5})+2x\cdot\frac{3x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\le 0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)(2+\sqrt{x^2-2x+5})+\frac{2x(x+1)(3x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{6x^2-2x}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right)\le 0 \qquad (1)$$

Do: $2+\sqrt{x^2-2x+5}+\dfrac{6x^2-2x}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}$

$$=4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+5)}+(7x^2-4x+5)>0,\ \forall x.$$

Suy ra: $(1)\Leftrightarrow x+1\le 0\Leftrightarrow x\le -1$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $x\in(-\infty;-1]$.

Bài 64: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+35}<5x-4+\sqrt{x^2+24}$

Điều kiện: $5x-4>0\Leftrightarrow x>\dfrac{4}{5}\cdot$

Ta có: $\sqrt{x^2+35}<5x-4+\sqrt{x^2+24}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+35}-6)-5(x-1)-(\sqrt{x^2+24}-5)<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+35}+6}-5(x-1)-\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+24}+5}<0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+35}+6}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+24}+5}-5\right)<0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[(x-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+35}+6}-\frac{1}{\sqrt{x^2+24}+5}\right)-5\right]<0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\underbrace{\left[(x+1)\cdot\frac{(\sqrt{x^2+24}-\sqrt{x^2+35}-1)}{(\sqrt{x^2+35}+6)(\sqrt{x^2+24}+5)}-5\right]}_{f(x)}<0 \qquad (1)$$

Do $\forall x>\dfrac{4}{5}:\begin{cases}x+1>0\\ \sqrt{x^2+24}-\sqrt{x^2+35}<0\end{cases}$, suy ra $f(x)<0$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là: $x\in(1;+\infty)$.

Bài 65: Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x\le\sqrt{5x-1}+1$

Điều kiện: $5x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{5}\cdot$

Cách 1:

Ta có: $\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x\le\sqrt{5x-1}+1$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-9}+2)+(2-\sqrt{5x-1})+2x^2+3x-5\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x-9})^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}-\frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2}+(x-1)(2x+5)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+2x+5\right]\le 0 \qquad (1)$$

Với $x\ge\frac{1}{5}$, suy ra: $\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+2x+5\ge-\frac{5}{2}+\frac{2}{5}+5>0$ (2)

Từ (1), (2), suy ra: $x-1\le 0\Leftrightarrow x\le 1$.

Cách 2:

Ta có: $\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x\le\sqrt{5x-1}+1$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-9}-\sqrt{5x-1}+2x^2+3x-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{x-9}+2)+\sqrt{5x-1}(\sqrt{5x-1}-2)+4x^2+x-5\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x-9})^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}+\frac{5(x-1)\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(x-1)(4x+5)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}+\frac{5\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(4x+5)\right]}_{>0,\ \forall x\in D}\le 0\Leftrightarrow x-1\le 0\Leftrightarrow x\le 1.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x\in\left[\frac{1}{5};1\right]$.

Bài 66: Giải bất phương trình: $x^3+2x-(x^2+1)\sqrt{2x-1}\le\sqrt[3]{2x^2-x}$

Điều kiện: $2x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}$.

Ta có: $x^3+2x-(x^2+1)\sqrt{2x-1}\le\sqrt[3]{2x^2-x}$

$$\Leftrightarrow\left[x(x^2+1)-(x^2+1)\sqrt{2x-1}\right]+(x-\sqrt[3]{2x^2-x})\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(x-\sqrt{2x-1})+(x-\sqrt[3]{2x^2-x})\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)\cdot\frac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}}+\frac{x^3-2x^2+x}{x^2+x\sqrt[3]{2x^2-x}+\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{x^2+1}{x+\sqrt{2x-1}}+\frac{x}{x^2+x\sqrt[3]{2x^2-x}+\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}}\right)\le 0 \qquad (1)$$

Do: $\forall x\ge\frac{1}{2}$, suy ra: $\frac{x^2+1}{x+\sqrt{2x-1}}+\frac{x}{x^2+x\sqrt[3]{2x^2-x}+\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}}>0$.

Nên (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: So với điều kiện, bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 67: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x-11}-\sqrt{2x^2-16x+28} \ge 5-x$

Điều kiện: $\begin{cases} 2x-11 \ge 0 \\ 2x^2-16x+28 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{11}{2}$.

Ta có: $\sqrt{2x-11}-\sqrt{2x^2-16x+28} \ge 5-x$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2x-11}-(x-5)\right]+\left[(2x-10)-\sqrt{2x^2-16x+28}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-11-(x-5)^2}{\sqrt{2x-11}+x-5}+\frac{(2x-10)^2-(2x^2-16x+28)}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+12x-36}{\sqrt{2x-11}+x-5}+\frac{2x^2-24x+72}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-6)^2}{\sqrt{2x-11}+x-5}+\frac{2(x-6)^2}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 \cdot \left(\frac{2}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}}-\frac{1}{\sqrt{2x-11}+x-5}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 \cdot \frac{2\sqrt{2x-11}-\sqrt{2x^2-16x+28}}{\left[2(x-5)+\sqrt{2x^2-16x+28}\right].(\sqrt{2x-11}+x-5)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2(2\sqrt{2x-11}-\sqrt{2x^2-16x+28}) \ge 0$$

$$\left[\text{Do}: 2(x-5)+\sqrt{2x^2-16x+28}>0,\ \sqrt{2x-11}+x-5>0,\ \forall x \ge \frac{11}{2}=5,5\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-6)^2(-2x^2+24x-72)}{2\sqrt{2x-11}+\sqrt{2x^2-16x+28}} \ge 0 \Leftrightarrow -2(x-6)^4 \ge 0 \Leftrightarrow (x-6)^4 \le 0 \Leftrightarrow x=6.$$

Kết luận: Bất phương trình có nghiệm duy nhất là $x=6$.

Bài 68: Giải bất phương trình: $(x+1)\sqrt{3x+1}+x^3+2x^2+1 \ge 2\sqrt{x^2-x+1}+6x$

Cách 1:

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{3}$.

Ta có: $(x+1)\sqrt{3x+1}+x^3+2x^2+1 \ge 2\sqrt{x^2-x+1}+6x$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\sqrt{3x+1}-(x+1)\right]+2(1-\sqrt{x^2-x+1})+x^3+3x^2-4x \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x^2+x)}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2(-x^2+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+(x^2-x)(x+4)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+x)\left(\frac{x+1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}+1}-x-4\right)\ge 0 \qquad (1)$$

Do $\frac{x+1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}+1}-x-4<\frac{x+1}{x+1}+2-x-4=-x-1<0,\ \forall x\ge -\frac{1}{3}$.

$(1)\Leftrightarrow -x^2+x\le 0 \Leftrightarrow x\le 0$ hoặc $x\ge 1$.

Cách 2:

Ta có: $(x+1)\sqrt{3x+1}+x^3+2x^2+1\ge 2\sqrt{x^2-x+1}+6x$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+1}\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)+\sqrt{3x+1}\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+x^3-x\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-x)\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{(x^2-x)\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+(x^2-x)(x+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)\cdot\left(\frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1\right)\ge 0 \Leftrightarrow x^2-x\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0\\ x\ge 1\end{array}\right.$$

Do $\forall x\ge -\frac{1}{3}$, suy ra: $\frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1>0$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm BPT là $x\in\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup\left[1;+\infty\right)$.

Bài 69: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2+11x+15}+\sqrt{x^2+2x-3}\ge x+6$

Điều kiện: $x\le -3$ hoặc $x\ge 1$.

Ta có: $\sqrt{2x^2+11x+15}+\sqrt{x^2+2x-3}\ge x+6$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+11x+15}+2\sqrt{x^2+2x-3}\ge 2x+12$$

$$\Leftrightarrow \left[2\sqrt{2x^2+11x+15}-(2x+9)\right]+\left[2\sqrt{x^2+2x-3}-3\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+8x-21}{2\sqrt{2x^2+11x+15}+2x+9}+\frac{4x^2+8x-21}{2\sqrt{x^2+2x-3}+3}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2+8x-21)\left(\frac{1}{2\sqrt{2x^2+11x+15}+2x+9}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-3}+3}\right)\ge 0 \qquad (1)$$

Do $\frac{1}{2\sqrt{2x^2+11x+15}+2x+9}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-3}+3}>0$ nên $(1)\Leftrightarrow 4x^2+8x-21\ge 0$

$\Leftrightarrow x \le -\frac{7}{2}$ hoặc $x \ge \frac{3}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của BPT là $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Bài 70: Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3-x}}{2x-3} \ge \frac{1}{x^2-x-2}$

(Đề thi thử TN. THPT Quốc Gia 2015 – TT. Hoàng Gia, Tân Phú, Tp. HCM)

Tập xác định: $D = [0;3] \setminus \left\{\frac{3}{2}; 2\right\}$.

Ta có: $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3-x}}{2x-3} \ge \frac{1}{x^2-x-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{(2x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3-x})} \ge \frac{1}{x^2-x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}} \ge \frac{1}{x^2-x-2} \qquad (1)$$

Do $\sqrt{x}+\sqrt{3-x} > 0,\ \forall x \in [0;3]$, nhưng dấu x^2-x-2 chưa xác định được là dương hay âm trên đoạn $[0;3]$, nên ta chia ra hai trường hợp:

- **TH 1**. Nếu $\begin{cases} x^2-x-2<0 \\ x \in [0;3] \setminus \left\{\frac{3}{2}; 2\right\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1;2) \\ x \in [0;3] \setminus \left\{\frac{3}{2}; 2\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;2) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Lúc đó (1) luôn đúng do: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}} > 0,\ \frac{1}{x^2-x-2} < 0$.

- **TH 2**. Nếu $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ x \in [0;3] \setminus \left\{\frac{3}{2}; 2\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;3]$ thì $(1) \Leftrightarrow x^2-x-2 \ge \sqrt{x}+\sqrt{3-x}$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+1) + \left[(x-1)-\sqrt{x}\right] + \left[(x-2)-\sqrt{3-x}\right] > 0 \qquad (i)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+1) + \frac{x^2-3x+1}{x-1+\sqrt{x}} + \frac{x^2-3x+1}{x-2+\sqrt{3-x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+1)\underbrace{\left(1+\frac{1}{x-1+\sqrt{x}}+\frac{1}{x-2+\sqrt{3-x}}\right)}_{>0,\ \forall x \in (2;3]} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1>3x \\ x \in (2;3] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 3.$$

Kết luận: Tập nghiệm là $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right]$.

Bài 71: Giải bất phương trình: $6x\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+8x}\ge 6x^2-x-8$

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -8 \end{array}\right.$.

Ta có: $6x\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+8x}\ge 6x^2-x-8$

- TH 1. Nếu $x\le -8 \Rightarrow \begin{cases} VT_{(*)}=6x\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+8x}\le 6x\sqrt{x^2-1}<0 \\ VP_{(*)}=6x^2-x-8\ge 6x^2>0 \end{cases}$

Suy ra bất phương trình (*) vô nghiệm khi $x\le 8$.

- TH 2. Nếu $x\ge 1$, thì $(*)\Leftrightarrow 6x^2-x-8-6x\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+8x}\le 0$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}-x)+\sqrt{x^2+8x}-(x+2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{\sqrt{x^2+8x}+x+2}-\frac{6\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}+x}\le 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}\cdot\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+8x}+x+2}-\frac{3\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}+x}\right)\le 0 \qquad (1)$$

Do $\begin{cases} 3\sqrt{x+1}>2\sqrt{x-1}\ge 0 \\ \sqrt{x^2+8x}+x+2>\sqrt{x^2-1}+x>0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+8x}+x+2}-\frac{3\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}+x}\le 0, \forall x\ge 1.$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1.$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $x\in[1;+\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Giải phương trình $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$.

Bài 2: Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}=4$

Bài 3: Giải bất phương trình $3\sqrt{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x\le 6$.

Bài 4: Giải bất phương trình $\sqrt{3x+1}\ge(1-x)^3+2$.

Bài 5: Giải phương trình $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$.

Bài 6: Giải phương trình $\sqrt{3x^2+13}=4x-3+\sqrt{3x^2+6}$.

Bài 7: Giải phương trình $\sqrt{x-1}=-x^3+4x+1$.

Bài 8: Giải phương trình $2\sqrt{4x^2-x+1}+2x=3\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4}$.

Bài 9: Giải phương trình $\left(5x-6\right)^2-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}=x^2-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Bài 10: Giải phương trình $x^3+3x^2+4x+2=\left(3x+2\right)\sqrt{3x+1}$.

Bài 11: Giải phương trình $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$.

Bài 12: Giải phương trình $4x^3+x-\left(x+1\right)\sqrt{2x+1}=0$.

Bài 13: Giải phương trình $\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3}=\frac{1}{x+2}$.

Bài 14: Giải phương trình $-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^2}$.

Bài 15: Giải phương trình $9x^2-28x+21=\sqrt{x-1}$.

Bài 16: Giải phương trình $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+\left(4x+2\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$.

Bài 17: Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$.

Bài 18: Giải phương trình $\sqrt{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}-\sqrt{2x+\sqrt{4x^2-2x+1}}=x-1$.

Bài 19: Giải phương trình $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^2-x+1$.

Bài 20: Giải phương trình $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$.

Bài 21: Giải bất phương trình $\sqrt{x+2}+x^2-x-2\le\sqrt{3x-2}$.

Bài 22: Giải phương trình

$$\frac{1}{2}\log_2\left(x+2\right)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}.$$

Bài 23: Giải phương trình $\sqrt{x}=\left(1-x\right)^3+1$.

Bài 24: Giải phương trình $\left(x+2\right)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0$.

Bài 25: Giải phương trình $27x^3-27x^2+13x-2=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Bài 26: Giải phương trình $4x^3+18x^2+27x+14=\sqrt[3]{4x+5}$.

Bài 27: Giải phương trình $8x^3-17x^2+10x-2=2\sqrt[3]{5x^2-1}$.

Bài 28: Giải phương trình $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$.

Bài 29: Giải phương trình $\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-\left(x-5\right)\sqrt{x-8}-3x+31=0$.

Bài 30: Giải phương trình $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$.

Bài 31: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-4\sqrt{3x-2}-2y=-10 \\ y^2-6\sqrt{4y-3}-x=-11 \end{cases}$

Bài 32: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{5-y^2}+y\sqrt{5-x^2}=5 \\ x^4-y^4=3\left(x^2-y^2\right)+6 \end{cases}$

Bài 33: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{25-y^2}+y\sqrt{25-x^2}=25 \\ x^4+y^4=3\left(x^2-y^2\right)+316 \end{cases}$

Bài 34: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12 \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} \end{cases}$

Bài 35: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{3-y}+\sqrt{y\left(3-x^2\right)}=3 \\ x^3-3x^2+x+3=\sqrt[3]{5-3y} \end{cases}$

Bài 36: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x\left(y-x\right)+1}+\sqrt{y\left(x-y\right)+1}=2-\dfrac{1}{2}\left(x-y\right)^2 \\ x^2+y^2+xy\left(x+y-1\right)=3 \end{cases}$

Bài 37: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x+y\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=2\left(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2y}\right) \\ x^2+y^2-7xy+1=0 \end{cases}$

Bài 38: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\left(4y^3+3y+\sqrt{5y^2-x^2}\right)=y^2\left(x^2+4y^2+8\right) \\ x+\sqrt{12-2x}=2y^2-2\sqrt{y}-4 \end{cases}$

Bài 39: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2\left(x^2+2y^2+2\right)+2x^2=2y\left(2x+2xy^2+\sqrt{x^2-3y^2}\right) \\ \left(x^3+x+1\right)^3=27\left(4y-1\right) \end{cases}$$

Bài 40: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=3\left(x+y\right) \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y+3}+2\sqrt{\left(x-1\right)\left(x^2-3y+5\right)}=4-2y \end{cases}$$

GIẢI BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ
ĐỀ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA 2015

Đề bài: Giải phương trình: $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$

Phân tích:

Đây là một bài toán rất hay và sâu sắc hội tụ rất nhiều các yếu tố như sau:

- Bài toán có chứa một căn thức không quá lớn.
- Bài toán có chứa một phân thức, nếu như vội vàng biến đổi tương đương bằng cách đưa mẫu số sang vế phải, học sinh sẽ rất dễ mắc sai lầm trong quá trình tính toán bởi khi đó phương trình sẽ khá cồng kềnh.

Để có thể tiếp cận tốt bài toán trên, trước hết chúng ta cần định hướng bài toán với một công cụ quen thuộc đó là sử dụng chức năng TABLE trong máy tính CASIO:

Sử dụng công cụ TABLE (Mode 7) trong máy tính CASIO:

Xét

$$F(X)=\frac{X^2+2X-8}{X^2-2X+3}-(X+1)\left(\sqrt{X+2}-2\right)$$

Với điều kiện $x\geq -2$, ta chọn các giá trị:

- START = -2.
- END = 5.
- STEP = 0.5.

Dựa vào bảng giá trị trên TABLE ta nhận thấyn hững điều sau:

- Phương trình có một nghiệm hữu tỷ $x=2$.
- Phương trình có một nghiệm nằm trong $(3;3.5)$.
- Phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.
- Hàm số không đơn điệu.

X	$F(X)$
−2	−2.727
−1.5	−1.707
−1	−1.5
−0.5	−1.671
0	−2.08
0.5	−2.371
1	−1.964
1.5	−0.899
2	0
2.5	0.34
3	0.2223
3.5	−0.189
4	−0.792
4.5	−1.531
5	−2.374

- Đồ thị hàm số có một khoảng đồng biến là $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ đồng thời trong khoảng này phương trình có 2 nghiệm phân biệt và đó là hai nghiệm duy nhất của phương trình nên định hướng điều kiện của bài toán cần chỉ ra không phải chỉ là $x \geq -2$ mà là $x \geq \frac{1}{2}$.

Nhẩm nghiệm:

SHIFT CALC với $x = 3.2$ ta được nghiệm $x \approx 3.302775638$.

Thay giá trị $x \approx 3.302775638$ vào căn thức ta được:

$$\sqrt{x+2} \approx 2.302775638 \approx x-1 \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

Định hướng giải bài:

Bước 1: Chú ý với $x = 2$ thì $\begin{cases}\sqrt{x+2}-2=0\\ x^2+2x-8=0\end{cases}$ do đó ta sẽ nhân liên hợp cho nhóm biểu thức $\left(\sqrt{x+2}-2\right)$ đồng thời phân tích nhân tử cho nhóm biểu thức $\left(x^2+2x-8\right)$ để tạo ra nghiệm $x = 2$ trước.

Bước 2: Sau khi đã tháo gỡ nghiệm $x = 2$ ta sẽ có một phương trình vô tỷ mới và tại phương trình này nghiệm cần chỉ ra là $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Để làm xuất hiện nghiệm $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ta cần chú ý tới đánh giá: $x-1=\sqrt{x+2}$ hay nhân tử có thể tạo ra là $\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)$ hoặc $\left(x^2-3x-1\right)$. Ta có các cách sau:

- **Cách 1:** Sử dụng nhân biểu thức liên hợp với nhân tử tìm được chính là $\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)$.
- **Cách 2:** Sử dụng phương pháp phân tích thành nhân tử với phương pháp liên hợp ngược: $\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(x-1+\sqrt{x+2}\right)=x^2-3x-1$.
- **Cách 3:** Sử dụng phương pháp nâng lũy thừa và định lý Viet đảo với nhân tử đã tạo có là $\left(x^2-3x-1\right)$.
- **Cách 4:** Sử dụng phương pháp tạo ra hàm đặc trưng với đánh giá

$x-1=\sqrt{x+2}$ cho nên muốn dễ dàng nhận ra hàm đặc trưng ta có thể đặt ẩn phụ $a=x-1, b=\sqrt{x+2}$.

- **Cách 5:** Vì có hai nhân tử $\left(\sqrt{x+2}-2\right)$ và $\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)$ nên ta có thể phân tích nhân tử ngay từ bước đầu để tạo ra để biến đổi phương trình ban đầu thành: $\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right).A(x)$

Bên cạnh những cách trên, độc giả có thể sử dụng những kỹ thuật đã học trong Phần I: Các kỹ thuật cơ bản, để tiếp tục phân tích và tìm tòi những lời giải hay và đẹp. Mọi chi tiết đóng góp ý kiến và phản hồi xin vui lòng gửi về địa chỉ Email: dungdoan.math@gmail.com.

Cách 1: Sử dụng phương pháp nhân liên hợp.

Điều kiện: $x \ge -2$.

Ta có: $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right) \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=(x+1)\dfrac{(x+2)-4}{\sqrt{x+2}+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=\frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{x+2}+2} \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+4}{x^2-2x+3}-\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\frac{(x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)-(x+1)\left(x^2-2x+3\right)}{\left(x^2-2x+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)-(x+1)\left(x^2-2x+3\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\sqrt{x+2}+2x+8-x^3+x^2-x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\sqrt{x+2}-x^3+x^2+x+5\right)=0$$

Trường hợp 1: $x=2$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2: $(x+4)\sqrt{x+2}-x^3+x^2+x+5$

$$\Leftrightarrow (x+4)\sqrt{x+2}=x^3-x^2-x-5$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2-x-5-(x+4)\sqrt{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2-x-5-(x+4)(x-1)+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2-x-5-x^2-3x+4+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1+(x+4)\frac{(x-1)^2-(x+2)}{x-1+\sqrt{x+2}}=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Vì phương trình có chứa nhân tử $\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)$ hoặc $\left(x^2-3x-1\right)$ do đó chắc chắn biểu thức $\left(x^3-2x^2-4x-1\right)$ sẽ chia hết cho $\left(x^2-3x-1\right)$.

Bấm máy tính: $\frac{x^3-2x^2-4x-1}{x^2-3x-1}$ và bấm CALC 100 (Hay còn gọi là gán giá trị của $x=100$) ta được kết quả là 101.

Chú ý rằng $101=100+1$ và $x=100$ do đó:

$$\frac{x^3-2x^2-4x-1}{x^2-3x-1}=101=100+1=x+1$$

Vậy $x^3-2x^2-4x-1=(x+1)\left(x^2-3x-1\right)$.

Ta có: $x^3-2x^2-4x-1+(x+4)\frac{(x-1)^2-(x+2)}{x-1+\sqrt{x+2}}=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-3x-1\right)+(x+4)\frac{x^2-3x-1}{x-1+\sqrt{x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x-1\right)\left(x+1+(x+4)\frac{1}{x-1+\sqrt{x+2}}\right)=0 \text{ (*)}$$

Ở tình huống này ta nhận thấy như sau:

$$\text{Vì } \begin{cases}(x+4)\sqrt{x+2}=x^3-x^2-x-5\\ x\ge -2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^3-x^2-x-5\ge 0\\ x\ge -2\end{cases}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Vì bất phương trình $x^3-x^2-x-5\ge 0$ chỉ có nghiệm lẻ của phương trình bậc 3, tuy nhiên trong chương trình Trung học phổ thông, ta không nên sử dụng phương pháp Cardano để xử lý phương trình bậc ba này.

Vậy làm thế nào để hóa giải được bất phương trình trên?

Chú ý rằng bất phương trình $x^3-x^2-x-5\ge 0$ có nghiệm lẻ như sau: $x\ge 2.34025083$

Do đó chúng ta có thể khẳng định chắc chắn tại đây ta sẽ có $x>2$.

Chỉ cần điều kiện $x>2$ là đủ ta có thể chứng minh được phương trình:

$x+1+(x+4)\frac{1}{x-1+\sqrt{x+2}}=0$ là phương trình vô nghiệm.

Vậy làm sao để chỉ ra được $x>2$?

Ta sử dụng xét $f(X)=X^3-X^2-X$. Bấm CALC 2 ta được kết quả là 2.

Như vậy phương trình $x^3-x^2-x-2\geq 0$ có thể chỉ ra được nghiệm là 2.

Thật vậy, ta có: $x^3-x^2-x-2>x^3-x^2-x-5\geq 0$.

Do đó bằng cách đánh giá này ta đã có được điều kiện quan trọng cần tìm.

Ta có: $\begin{cases}x^3-x^2-x-5\geq 0\\ x\geq -2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^3-x^2-x-2>x^3-x^2-x-5\geq 0\\ x\geq -2\end{cases}$

Do đó: $\begin{cases}x^3-x^2-x-2>0\\ x\geq -2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-2)(x^2+x+1)>0\\ x\geq -2\end{cases}$.

Vì $x^2+x+1>0\forall x\in\mathbb{R}$ do đó ta có điều kiện cần tìm là $x\in(2;+\infty)$.

Với điều kiện $x\in(2;+\infty)$ ta có $x+1+(x+4)\frac{1}{x-1+\sqrt{x+2}}>0$.

Như vậy phương trình $x+1+(x+4)\frac{1}{x-1+\sqrt{x+2}}=0$ vô nghiệm.

Vậy (*) $\Rightarrow\begin{cases}x^2-3x-1=0\\ x>2\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}, x=2$.

Bình luận: Việc đánh giá điều kiện $x\in(2;+\infty)$ là vô cùng quan trọng bởi nếu không đánh giá đúng thực chất của điều kiện thì việc giải bài toán sẽ trở nên vô cùng khó khăn. Đây chính là điểm khó nhất trong bài toán này. Một số đánh giá điều kiện quan trọng học sinh cần ghi nhớ:

- $A=\sqrt{B}\Rightarrow A\geq 0, B\geq 0$
- $\sqrt{A}=\sqrt{B}\Rightarrow A\geq 0, B\geq 0$
- $A+B\sqrt{C}=0\Rightarrow C\geq 0, A.B\leq 0$
- $A=B\sqrt{C}\Rightarrow C\geq 0, A.B\geq 0$
- $A+B=C+D\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A\geq C, B\leq D\\ A\leq C, B\geq D\end{array}\right.$

Cách 2: Sử dụng phương phân tích nhân tử bằng liên hợp ngược.

Điều kiện: $x \geq -2$.

Ta có: $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3} = (x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right) \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3} = (x+1)\frac{(x+2)-4}{\sqrt{x+2}+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3} = \frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{x+2}+2} \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+4}{x^2-2x+3} - \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\frac{(x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)-(x+1)\left(x^2-2x+3\right)}{\left(x^2-2x+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)-(x+1)\left(x^2-2x+3\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\sqrt{x+2}+2x+8-x^3+x^2-x-3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\sqrt{x+2}-x^3+x^2+x+5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^3-x^2-x-5-(x+4)(x-1)+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^3-x^2-x-5-x^2-3x+4+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^3-2x^2-4x-1+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\right) = 0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Vì phương trình có chứa nhân tử $\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)$ hoặc $\left(x^2-3x-1\right)$ do đó chắc chắn biểu thức $\left(x^3-2x^2-4x-1\right)$ sẽ chia hết cho $\left(x^2-3x-1\right)$.

Bấm máy tính: $\frac{x^3-2x^2-4x-1}{x^2-3x-1}$ và bấm CALC 100 (Hay còn gọi là gán giá trị của $x=100$) ta được kết quả là 101.

Chú ý rằng $101 = 100+1$ và $x = 100$ do đó:

$$\frac{x^3-2x^2-4x-1}{x^2-3x-1} = 101 = 100+1 = x+1$$

Vậy $x^3-2x^2-4x-1 = (x+1)\left(x^2-3x-1\right)$.

Mặt khác, xét liên hợp: $\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(x-1+\sqrt{x+2}\right) = x^2-3x-1$

Do đó ta viết lại: $x^3-2x^2-4x-1 = (x+1)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(x-1+\sqrt{x+2}\right)$

Ta có: $\left(x-2\right)\left(x^3-2x^2-4x-1+\left(x+4\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(\left(x+1\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(x-1+\sqrt{x+2}\right)+\left(x+4\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(\left(x+1\right)\left(x-1+\sqrt{x+2}\right)+x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(x^2-1+\left(x+1\right)\sqrt{x+2}+x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+x+3+\left(x+1\right)\sqrt{x+2}\right)=0$ (*)

Đến đây để chứng minh $x^2+x+3+\left(x+1\right)\sqrt{x+2}=0$ vô nghiệm ta có thể sử dụng hằng đẳng thức để ghép thành các bình phương:

Ta có: $\left(x-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+x+3+\left(x+1\right)\sqrt{x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(2x^2+2x+6+2\left(x+1\right)\sqrt{x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(\left(x^2+2x+1+2\left(x+1\right)\sqrt{x+2}+x+2\right)+x^2-x+3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)^2+x^2-x+3\right)=0$

Vì $\begin{cases}x^2-x+3>0\forall x\in\mathbb{R}\\\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)^2\geq0\end{cases}$ do đó $\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)^2+x^2-x+3>0$

Như vậy phương trình $\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)^2+x^2-x+3=0$ vô nghiệm.

Vậy (*) $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=\sqrt{x+2}\\x>2\end{cases}\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\vee x=2$ (Thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2},x=2$.

Bình luận: Cũng là bài toán phân tích liên hợp nhưng trong bài toán này, chúng ta đề cập đến một cách chứng minh phương trình vô nghiệm theo một hướng khác là tạo hằng đẳng thức. Để tạo hằng đẳng thức ta chỉ cần tập trung quan sát biểu thức tích nào ta chọn là $2ab$, khi đó ta tạo thêm các biểu thức khác để nhóm thành $a^2+2ab+b^2=\left(a+b\right)^2$.

Độc giả có thể sử dụng phương pháp trên để đánh giá phương trình vô nghiệm trong Cách 1.

Phần này, để dành cho bạn đọc tự chứng minh.

Cách 3: Phương pháp nâng lũy thừa và định lý Viet đảo.

Điều kiện: $x \geq -2$.

Ta có: $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right) \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=(x+1)\frac{(x+2)-4}{\sqrt{x+2}+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=\frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{x+2}+2} \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+4}{x^2-2x+3}-\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\frac{(x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)-(x+1)\left(x^2-2x+3\right)}{\left(x^2-2x+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)-(x+1)\left(x^2-2x+3\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\sqrt{x+2}+2x+8-x^3+x^2-x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\sqrt{x+2}-x^3+x^2+x+5\right)=0$$

Trường hợp 1: $x=2$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2:

$$(x+4)\sqrt{x+2}-x^3+x^2+x+5 \Leftrightarrow (x+4)\sqrt{x+2}=x^3-x^2-x-5$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2} \ (*)$$

Ta có: $\begin{cases} x^3-x^2-x-5 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3-x^2-x-2 > x^3-x^2-x-5 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} x^3-x^2-x-2 > 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)\left(x^2+x+1\right) > 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$.

Vì $x^2+x+1>0 \forall x \in \mathbb{R}$ do đó ta có điều kiện cần tìm là $x \in (2;+\infty)$.

Bình phương 2 vế của (*) ta được: $\left(x^3-x^2-x-5\right)^2=(x+4)^2(x+2)$

$$\Leftrightarrow x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7=0$$

PHÂN TÍCH CASIO

Vì phương trình có chứa nhân tử $\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)$ hoặc $\left(x^2-3x-1\right)$ do đó chắc chắn biểu thức $\left(x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7\right)$ sẽ chia hết cho biểu thức $\left(x^2-3x-1\right)$.

Bấm máy tính: $\frac{x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7}{x^2-3x-1}$ và bấm CALC 100 (Hay còn gọi là gán giá trị của $x=100$) ta được kết quả là 101030107.

Chú ý rằng $101030107=100^4+100^3+3.100^2+100+7$ và $x=100$ do đó:

$$\frac{x^3-2x^2-4x-1}{x^2-3x-1}=100^4+100^3+3.100^2+100+7=x^4+x^3+3x^2+x+7$$

Vậy $x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7=\left(x^4+x^3+3x^2+x+7\right)\left(x^2-3x-1\right)$.

Ta có: $x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x-1\right)\left(x^4+x^3+3x^2+x+7\right)=0$$

Với $x>2$ ta có: $x^4+x^3+3x^2+x+7>0$. Vậy $\begin{cases}x^2-3x-1=0\\ x>2\end{cases} \Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}, x=2$.

<u>Bình luận:</u> Đôi khi trong các bài toán phương trình vô tỷ, đặc biệt bài toán chứa duy nhất một căn thức, phương pháp nâng lũy thừa lại tỏ ra vô cùng hiệu quả.

Cách 4: Phương pháp sử dụng hàm đặc trưng.

Điều kiện: $x\ge -2$.

Ta có: $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right) \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=(x+1)\frac{(x+2)-4}{\sqrt{x+2}+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=\frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{x+2}+2} \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+4}{x^2-2x+3}-\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\frac{(x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)-(x+1)\left(x^2-2x+3\right)}{\left(x^2-2x+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)-(x+1)\left(x^2-2x+3\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\sqrt{x+2}+2x+8-x^3+x^2-x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+4)\sqrt{x+2}-x^3+x^2+x+5\right)=0$$

Trường hợp 1: $x=2$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2:

$$(x+4)\sqrt{x+2}-x^3+x^2+x+5 \Leftrightarrow (x+4)\sqrt{x+2}=x^3-x^2-x-5$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2}$$

PHÂN TÍCH CASIO

Trong phần trên ta đã đánh giá được khi $x \approx 3.302775638$ thì:

$\sqrt{x+2}=x-1$

Với việc đánh giá như trên, phương trình $x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2}$ có thể sẽ chứa một hàm đặc trưng. Để có thể nhận diện hàm đặc trưng đó ta có thể đặt $a=\sqrt{x+2}, b=x-1$. Do bậc cao nhất là 3 nên hàm đặc trưng sẽ có dạng $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\delta x$.

Như vậy: $x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \alpha(x-1)^3+\beta(x-1)^2+\delta(x-1)=\alpha\left(\sqrt{x+2}\right)^3+\beta\left(\sqrt{x+2}\right)^2+\delta\left(\sqrt{x+2}\right)$$

Do đó ta có đồng nhất hệ số như sau: $x^3-x^2-x-5-(x+4)\sqrt{x+2}$

$$=\alpha(x-1)^3+\beta(x-1)^2+\delta(x-1)-\alpha\left(\sqrt{x+2}\right)^3-\beta\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\delta\left(\sqrt{x+2}\right)$$

$$\text{Thay }\begin{cases} x=-2 \Rightarrow -15=-27\alpha+9\beta-3\delta \\ x=2 \Rightarrow -15=-7\alpha-3\beta-\delta \\ x=7 \Rightarrow 249=189\alpha+27\beta+3\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2 \\ \delta=2 \end{cases}$$

Vậy ta có: $x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3+2(x-1)^2+2(x-1)=\left(\sqrt{x+2}\right)^3+2\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\left(\sqrt{x+2}\right)$$

Ta có: $x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3+2(x-1)^2+2(x-1)=\left(\sqrt{x+2}\right)^3+2\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\left(\sqrt{x+2}\right)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+2t^2+2t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+4t+2>0\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục với $t\in\mathbb{R}$. Vậy:

$$f(x-1)=f\left(\sqrt{x+2}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=x+2\\ x\ge 1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

Kết luận: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2},x=2$.

Bình luận: Kỹ năng sử dụng hàm đặc trưng là vô cùng quan trọng. Nếu một biến x có bậc cao nhất là n thì hàm đặc trưng có dạng:

$f\left(x\right)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$

Thông thường một bài toán sẽ bao gồm 2 biến khác nhau, do đó ta tạo hàm đặc trưng hai vế rồi đồng nhất hệ số, hàm đặc trưng bậc n ta cần thay đủ n giá trị khác nhau để tìm ra các hệ số $a_1,a_2,a_3,...,a_n$.

Chú ý: $\left(x+3\right)\sqrt{x-1}$ thì biến $\sqrt{x-1}$ có bậc 3 vì ta hiểu như sau:

$$\left(x+3\right)\sqrt{x-1}=\left(x-1\right)\sqrt{x-1}+4\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}\right)^3+4\sqrt{x-1}$$

Trên đây là những lý thuyết vô cùng quan trọng để giúp các em học sinh nắm vững tư duy giải các bài toán hàm đặc trưng. Bạn đọc có thể vận dụng cách tư duy trên giải các bài toán sau:

Bài 1: Giải phương trình: $x^3-6x^2+10x-16=3\sqrt[3]{5x+2}$

Bài 2: Giải bất phương trình: $2x^2-11x+21\geq 3\sqrt[3]{4x-4}$

Bài 3: Giải phương trình: $54x^3-54x^2+25x-19=3\sqrt[3]{x+7}$

Bài 4: Giải phương trình: $\left(x+5\right)\sqrt{x+1}-6x=7+\sqrt[3]{3x+2}$

Bài 5: Giải phương trình: $x^3+\sqrt{x}=\left(x+1\right)\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}$

Cách 5: Phân tích nhân tử liên tục.

Điều kiện: $x\geq -2$.

Ta có: $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=\left(x+1\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$

$\Leftrightarrow x^2+2x-8=\left(x^2-2x+3\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x+4\right)=\left(x^2-2x+3\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(x+4\right)=\left(x^3-x^2+x+3\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x^3-x^2+x+3-\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(x+4\right)\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x^3-x^2-x-5-(x+4)\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x^3-x^2-x-5-(x+4)(x-1)+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x^3-2x^2-4x-1+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left((x+1)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(x-1+\sqrt{x+2}\right)+(x+4)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left((x+1)\left(x-1+\sqrt{x+2}\right)+x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(x^2-1+(x+1)\sqrt{x+2}+x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+x+3+(x+1)\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(2x^2+2x+6+2(x+1)\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x-1-\sqrt{x+2}\right)\left(\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)^2+x^2-x+3\right)=0$$

Vì $\begin{cases}x^2-x+3>0\forall x\in\mathbb{R}\\\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)^2\ge 0\end{cases}$ do đó $\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)^2+x^2-x+3>0$

Như vậy phương trình $\left(x+1+\sqrt{x+2}\right)^2+x^2-x+3=0$ vô nghiệm.

Vậy (*) $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=\sqrt{x+2}\\x>2\end{cases}\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\vee x=2$ (Thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2},x=2$.

Bình luận: Phân tích nhân tử chính là một phương pháp vô cùng hữu hiệu khi sử dụng quy tắc liên hợp ngược để liên tục nhóm ra các nhân tử chung. Để làm tốt phương pháp này học sinh cần nắm vững bản chất của nhân tử trong một phương trình.

LỜI KẾT

Qua rất nhiều ngày tháng chuẩn bị tư liệu, bài tập và phương pháp, cuối cùng cuốn sách "Phương pháp sử dụng máy tính CASIO trong bài toán Phương trình – Bất phương trình – Hệ phương trình" đã ra mắt bạn đọc. Với những phương pháp đi sâu vào bản chất và đặt bạn đọc làm vị trí trọng tâm, tác giả hy vọng cuốn sách này sẽ là một cuốn cẩm nang cho những ai đam mê chiếc máy tính CASIO cầm tay ứng dụng trong giải Phương trình – Bất phương trình – Hệ phương trình.

Một tác phẩm dù xuất sắc đến đâu cũng không thể tránh được sai sót, rất mong bạn đọc thông cảm và tiếp tục ủng hộ.

Nhóm tác giả

Đoàn Trí Dũng (Casio man) – Bùi Thế Việt (Alexander Việt)

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
280 An Dương Vương, Phường 4, Quận 5, TP Hồ Chí Minh
Điện thoại: *(08) 38 301 303* – Fax: *(08) 39 381 382*
Email: *nxb@hcmup.edu.vn*
Website: *http://nxb.hcmup.edu.vn*

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO TRONG GIẢI TOÁN: PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

ĐOÀN TRÍ DŨNG, BÙI THẾ VIỆT

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc
ThS. LÊ THANH HÀ

Chịu trách nhiệm nội dung

Tổng biên tập
PGS. TS. NGUYỄN KIM HỒNG
Biên tập
HỒ LỘC THUẬN

Trình bày bìa:

CÔNG TY KHANG VIỆT
Sửa bản in:
CÔNG TY KHANG VIỆT
Mã số sách tiêu chuẩn quốc tế - ISBN: 978-604-918-985-2

Liên kết xuất bản:

CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P.Đa Kao - Q.1 - TP.HCM
Điện thoại: 08.39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: 08.3911 0880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.khangvietbook.com.vn
www.nhasachkhangviet.vn

In 1000 cuốn khổ 16×24 cm tại Cty TNHH MTV IN ẤN MAI THỊNH ĐỨC;
Website: www.inanmaithinhduc.com
Địa chỉ: 71, Kha Vạn Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Q. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh
Xác nhận đăng ký xuất bản số 2750-2015/CXBIPH/01-146/ĐHSPTPHCM.
Quyết định xuất bản số 423/QĐ-NXBĐHSP ký ngày 29 tháng 9 năm 2015
In xong và nộp lưu chiểu quí IV năm 2015