
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP THỂ

LỜI NÓI ĐẦU

Toán học là một bộ môn khoa học đòi hỏi sự tư duy cao độ của người dạy, người học và cả người nghiên cứu. Qua việc dạy và học toán, con người được rèn luyện năng lực phân tích, tổng hợp, tư duy linh hoạt và khả năng sáng tạo, góp phần hình thành kỹ năng, nhân cách cần thiết của người lao động trong thời đại mới. Muốn học giỏi toán, học sinh phải luyện tập, thực hành nhiều, tức là phải học giải toán. Học giải toán là một cách tư duy sáng tạo về toán, đồng thời là một vấn đề trừu tượng và khá khó đối với học sinh, nhưng đó lại là điều cần thiết cho mỗi học sinh trong quá trình học toán ở trường THPT và nhất là học sinh ở các lớp chuyên của trường THPT chuyên. Vì vậy, để nâng cao chất lượng dạy và học toán, người thầy giáo cần truyền cho học sinh sự ham thích học toán và giải toán, bằng những phương pháp khác nhau.

Ngày nay trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế ta thường thấy xuất hiện bài toán về phương trình hàm. Thông thường đây là một dạng toán khó không chỉ với học sinh tỉnh ta mà với cả học sinh các tỉnh, thành phố lớn, các tỉnh có bề dày truyền thống trong các cuộc thi học sinh giỏi.

Với mục đích trang bị cho các em học sinh giỏi thêm một số kiến thức cơ bản về phương trình hàm nên trong bài viết này tôi xin trình bày “ **Chuyên đề : Giải phương trình hàm bằng phương pháp thể** ”. Tôi hy vọng nhận được nhiều sự phản hồi, đóng góp, trao đổi của quý thầy cô để chuyên đề này ngày một hoàn thiện hơn.

I. HIỆN TRẠNG

Trong chương trình Toán THPT dành cho học sinh lớp 10, 12 chuyên toán, tôi thấy các bài tập phương trình hàm là phần kiến thức khó, một trong những nội dung quan trọng là phải biết dùng phương pháp thể để giải phương trình hàm, vì đây là phần kiến thức đòi hỏi học sinh phải có kỹ năng toán học tốt. Chính vì vậy tôi biên soạn chuyên đề “ **Giải phương trình hàm bằng phương pháp thể** ” nhằm góp phần cung cấp kiến thức cơ bản, rèn luyện kỹ năng vận dụng phương pháp thể giá trị đặc biệt, thể biến trong việc giải các bài toán phương trình hàm cho học sinh chuẩn bị thi học sinh giỏi các cấp và đặc biệt là học sinh đội tuyển dự thi học sinh giỏi quốc gia.

Sau đây là nội dung của chuyên đề:

- Cơ sở lý thuyết.
- Các bài tập tổng hợp.

II. GIẢI PHÁP THAY THẾ

1. Cơ sở lý thuyết

1.1. Định nghĩa phương trình hàm.

Phương trình hàm là phương trình mà trong đó ẩn phải tìm là một hàm số. Mỗi một hàm số thỏa phương trình hàm được gọi là nghiệm của phương trình hàm.

Cấu trúc của một phương trình hàm gồm 3 phần:

- Tập xác định và tập giá trị của hàm số.

- Phương trình hàm hoặc bất phương trình hàm.
- Một số điều kiện bổ sung (đơn điệu, bị chặn, tuần hoàn, chẵn, lẻ...).

Không có một phương pháp chung nào để giải các phương trình hàm. Việc tìm ra lời giải phụ thuộc vào từng phương trình hàm cụ thể và một số kĩ thuật liên quan. Xin nêu ra đây một phương pháp thường sử dụng: Phương pháp thế biến, phương pháp quy nạp, phương pháp sử dụng các tính chất của hàm số, phương pháp đánh giá, phương pháp khảo sát tập hợp, phương pháp đối biến, phương pháp tìm nghiệm riêng, phương pháp sử dụng tính chất đối xứng của biến, phương pháp đưa về phương trình sai phân; phương pháp sử dụng chu trình, điểm bất động, không điểm.

Lời giải của bài toán giải phương trình hàm thường được bắt đầu bằng mệnh đề “Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn các yêu cầu của bài ra”. Khi tìm được biểu thức của hàm số nghiệm, ta phải kiểm tra vào phương trình đã cho rồi mới kết luận nghiệm.

1.2. Hàm đặc trưng của một số hàm sơ cấp

Những hàm đặc trưng của một số hàm số sơ cấp được xét trong chương trình phổ thông. Nhờ các hàm đặc trưng mà ta có thể dự đoán mà đáp số của các bài tập phương trình hàm.

1. Hàm bậc nhất $f(x) = ax + b$ (với $a, b \neq 0$) có hàm đặc trưng là:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{R}.$$

2. Hàm tuyến tính $f(x) = ax$ (với $a \neq 0$) có hàm đặc trưng là:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{R}.$$

3. Hàm mũ $f(x) = a^x$ (với $0 < a \neq 1$) có hàm đặc trưng là:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{R}.$$

4. Hàm logarit $f(x) = \log_a |x|$ (với $0 < a \neq 1$) có hàm đặc trưng là:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{R}^+$$

5. Hàm sin $f(x) = \sin x$ có hàm đặc trưng là:

$$f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x) \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}$$

6. Hàm sin $f(x) = \cos x$ có hàm đặc trưng là:

$$f(2x) = 2f^2(x) - 1 \text{ với mọi } x \in \mathbf{R} \text{ hoặc } f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{R}$$

...

1.3 Phương pháp thế biến

Phương pháp thế biến có lẽ là phương pháp thường được sử dụng nhất khi giải phương trình hàm. Ta có thể

- Hoặc cho các biến nhận các giá trị bằng số. Thường là các giá trị đặc biệt $0; \pm 1; \pm 2; \dots$
- Hoặc thế các biến bằng các biểu thức để làm xuất hiện các hằng số hoặc các biểu thức cần thiết. Chẳng hạn, nếu trong phương trình hàm có mặt $f(x+y)$ mà muốn có $f(0)$ thì ta thế y bởi $-x$; muốn có $f(x)$ thì ta cho $y=0$; muốn có $f(nx)$ thì ta thế y bởi $(n-1)x$

2. Giải pháp khả thi và hiệu quả khi giải phương trình hàm bằng phương pháp thế

Phương pháp thế là phương pháp thường hay sử dụng khi giải các phương trình hàm, đặc biệt là phương trình hàm với cặp biến tự do. Nội dung cơ bản của phương pháp này là ta thay các biến bởi các giá trị đặc biệt. Điều quan trọng lưu ý là giá trị các biến này phải thuộc tập xác định của hàm số và phải thỏa mãn các điều kiện ràng buộc giữa các biến nếu có. Trong phương pháp này khi thay biến $x, y, \dots$ bởi các giá trị đặc biệt thì việc chọn các giá trị đặc biệt đòi hỏi phải có sự nhạy cảm nhất định, nó giúp ta tìm được hàm $f(x)$ từ một phương trình đã cho.

III. VẤN ĐỀ NGUYÊN CỨU, GIẢ THUYẾT NGUYÊN CỨU

1. Các bài toán phương trình hàm

Bài toán 1. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn
 $f(x+y) = y + f(x), \forall x, y \in \mathbf{R}$ (1)

Giải.

Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Đặt $f(0) = C$.

Trong (1) cho $x = 0$ ta được $f(y) = y + C, \forall y \in \mathbf{R}$.

Vậy $f(x) = x + C, \forall x \in \mathbf{R}$ (với C là hằng số). (2)

Thử lại thấy (2) thỏa mãn (1).

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = x + C, \forall x \in \mathbf{R}$ (với C là hằng số).

Nhận xét: phương trình trên có 2 biến tự do là x, y nên ta cho $x = 0$ thì được $f(y) = y + f(0), \forall y \in \mathbf{R}$, lại đặt $f(0) = C$ ta được hàm số cần tìm.

Bài toán 2. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn $f(xy) = y^{2017} f(x), \forall x, y \in \mathbf{R}$

Giải.

Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Đặt $f(1) = C$. Trong (1) cho $x = 1$ ta được $f(y) = Cy^{2017}, \forall y \in \mathbf{R}$. Vậy $f(x)$ có dạng $f(x) = Cx^{2017}, \forall x \in \mathbf{R}$ (với C là hằng số). (2)

Thử lại thấy (2) thỏa mãn (1).

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = Cx^{2017}, \forall x \in \mathbf{R}$ (với C là hằng số).

Bài toán 3. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn

$f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 2f(y) + x^2, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

Giải.

Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Đặt $f(0) = C$. Trong (1) cho $y = 0$ ta được: $f(x) = x^2 + 2C, \forall x \in \mathbf{R}$. (2)

Thử lại: Thay (2) vào (1) ta được:

$$(x+y)^2 + 2C + (x-y)^2 + 2C = x^2 + 2C + 2y^2 + 4C + x^2, \forall x, y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow C = 0$$

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbf{R}$.

Bài toán 4. Cho hàm số $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2, \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Giải.

Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Trong (1) cho $y=0$ ta được: $f(0)=1$.

Trong (1) cho $x=0$ ta được: $-2f(-y) - f(y) = y - 3, \forall y \in \mathbf{R}. \quad (2)$

Trong (2) cho thay y bởi $-y$ ta được: $-2f(y) - f(-y) = -y - 3, \forall y \in \mathbf{R}. \quad (3)$

Từ (2) và (3) ta có: $f(y) = y + 1, \forall y \in \mathbf{R}$.

Hay $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$.

Thử lại đúng.

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$.

Bài toán 5. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn

$$f(2xy) + f(x - 2y) + f(x + 2y + 1) = 2xy + 2x + 1, \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Giải.

Đặt $f(0)=a$. Trong (1) thay $y = -\frac{1}{2}$ ta được :

$$f(-x) + f(x+1) + f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Trong (1) cho $y=0$ ta được:

$$a + f(x) + f(x+1) = 2x + 1, \forall x \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(-x) = a - x, \forall x \in \mathbf{R}$. Suy ra $f(x) = a + x, \forall x \in \mathbf{R}$.

Thử lại:

Thay $f(x) = a + x$ vào (1) ta được: $2xy + a + x - 2y + a + x + 2y + 1 + a = 2xy + 2x + 1 \Rightarrow a = 0$.

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$.

Nhận xét: các bài 2,3,4,5 có cách giải tương tự như bài 1 sau khi tìm được hàm ta thử lại bằng cách thay vào hàm đã cho để được hàm cần tìm.

Bài toán 6. (Estonian 2003-2004).

Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \forall x, y \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Giải

Giả sử f là hàm số thỏa yêu cầu đề bài.

Trong (1), chọn $y=1$ ta được: $f(x)f(1) = f(x) + \frac{1}{x} + 1, \forall x \in (0; +\infty) \quad (2)$

Từ (2) chọn $x=1$ ta được:

$$[f(1)]^2 = f(1) + 2 \Leftrightarrow [f(1)]^2 - f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 2 \text{ (do } f(1) > 0)$$

Thay $f(1)=2$ vào (2) ta được: $f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Thử lại với $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ thỏa (1). Vậy $f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \forall x \in (0; +\infty)$ là hàm số cần tìm

Nhận xét : Bài 6 này tập xác định và tập giá trị là $(0; +\infty)$ nên khi giải phải lưu ý lấy $x > 0; f(x) > 0, \forall x > 0$

Bài toán 7. (Japan Mathematical Olympiad Final – 2012)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Giải

Từ (1) cho $x=y=0$ ta được $f(f^2(0))=0$.

Từ (1) cho $x=0, y=f^2(0)$, kết hợp với kết quả $f(f^2(0))=0$ ta suy ra $f(0)=0$.

Từ (1) cho $x=y$ ta được: $x^2 - xf(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x, \forall x \neq 0$

Với $f(0)=0 \Rightarrow f(x)=x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại đúng.

Vậy $f(x)=x, \forall x \in \mathbb{R}$ là hàm số cần tìm

Bài toán 8. Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(x)f(y) = xf\left(\frac{y}{2}\right) + yf\left(\frac{x}{2}\right), \quad \forall x, y \in (0; +\infty)$$

Giải

Giả sử f là hàm số thỏa đề bài.

Trong (1) chọn $x=y$ ta được: $(f(x))^2 = 2xf\left(\frac{x}{2}\right), \quad \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{[f(x)]^2}{2x}$$

$$(1) \Rightarrow f(x)f(y) = x \frac{[f(y)]^2}{2y} + y \frac{[f(x)]^2}{2x}, \quad \forall x, y \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\sqrt{x}f(y)}{\sqrt{2y}} \right]^2 - f(x)f(y) + \left[\frac{\sqrt{y}f(x)}{\sqrt{2x}} \right]^2 \Leftrightarrow \left[\frac{\sqrt{x}f(y)}{\sqrt{2y}} - \frac{\sqrt{y}f(x)}{\sqrt{2x}} \right]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}f(y)}{\sqrt{2y}} = \frac{\sqrt{y}f(x)}{\sqrt{2x}} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}, \quad \forall x, y \in (0; +\infty)$$

Bởi vậy: $\frac{f(x)}{x}$ là hằng số, do đó: $f(x)=ax, \quad \forall x \in (0; +\infty)$ (a là hằng số).

Thay vào (1) ta được: $ax.ay = ax \frac{y}{2} + ay \frac{x}{2} = axy, \quad \forall x, y \in (0; +\infty)$. Hay $a \in \{0; 1\}$.

Thử lại thấy thỏa.

Vậy có hai số thỏa đề bài: $f(x)=0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(x)=x, \forall x \in (0; +\infty)$.

Bài toán 9. (Banglades MO – 2012)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^2 - y^2) = (x-y)[f(x)+f(y)], \forall x, y \in \mathbb{R}$. (1)

Giải

Từ (1) cho $x=y$ ta được $f(0)=0$.

Từ (1) cho $y=0$ ta được: $f(x^2) = x[f(x)+f(0)] = xf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đây ta có

$$f(x^2) = -xf(-x) \Rightarrow xf(x) = -xf(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \quad \forall x \neq 0.$$

Kết hợp với $f(0)=0$ ta được $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)[f(x) + f(y)] = xf(x) - yf(y) + xf(y) - yf(x) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f(x^2 - y^2) &= f(x^2 - (-y)^2) = (x + y)[f(x) + f(-y)] = (x + y)[f(x) - f(y)] \\ &= xf(x) - yf(y) + yf(x) - xf(y) \end{aligned} \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3), ta được: $xf(y) - yf(x) = yf(x) - xf(y)$

$$\Leftrightarrow xf(y) = yf(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}, \quad \forall x \neq 0, y \neq 0.$$

Suy ra $f(x) = cx$, $\forall x \neq 0$. Kết hợp với $f(0)=0$ ta được :

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } c \text{ là hằng số)}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn (1). Vậy $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là hàm số cần tìm

Bài toán 10. (Olympic toán Ostrâlylia-1995).

Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau đây

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ và } f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right), \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (1)$$

Giải.

Giả sử hàm f thỏa yêu cầu đề bài. Trong (1) cho $y=1$ ta được:

$$f(x) = f(x)f(3) + \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{x}\right), \quad \forall x \in (0; +\infty). \quad (2)$$

Trong (2) cho $x=3$ ta được $f(3) = [f(3)]^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow f(3) = \frac{1}{2}$. Thay vào (2) ta được

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{x}\right), \quad \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{3}{x}\right), \quad \forall x > 0.$$

$$\text{Do đó (1) trở thành } f(xy) = 2f(x)f(y), \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (3)$$

Trong (3) thay y bởi $\frac{3}{x}$ ta được $f(3) = 2f(x)f\left(\frac{3}{x}\right)$, $\forall x, y \in (0; +\infty)$. Do đó $[f(x)]^2 = \frac{1}{4}$.

Trong (3) thay y bởi x ta được: $f(x^2) = 2f(x)f(x) = 2[f(x)]^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Từ đây suy ra với $x > 0$ ta có $f(x) = \frac{1}{2}$.

Thử lại thấy thỏa mãn. Đó là hàm số duy nhất thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Bài toán 11. (HSG Quốc gia-2013).

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn $f(0)=0$, $f(1)=2013$ và

$$(x - y)[f(f^2(x)) - (f^2(y))] = [f(x) - f(y)][f^2(x) - f^2(y)], \quad \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Giải

Từ (1) cho $y=0$ ta được $xf(f^2(x)) = f^3(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

$$\text{Suy ra } f(f^2(x)) = \frac{f^3(x)}{x}, \quad \forall x \neq \mathbf{0}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), suy ra với mọi $x \neq 0$ và $y \neq 0$ ta có:

$$\begin{aligned}
 (x-y) \left[\frac{f^3(x)}{x} - \frac{f^3(y)}{y} \right] &= [f(x)-f(y)] [f^2(x)-f^2(y)] \\
 \Leftrightarrow \frac{xf^3(y)}{y} + \frac{yf^3(x)}{x} &= f(x)f^2(y) + f(y)f^2(x) \\
 \Leftrightarrow \frac{xf^3(y)}{y} - f(x)f^2(y) + \frac{yf^3(x)}{x} - f(y)f^2(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2f^3(y) - xyf(x)f^2(y) + y^2f^3(x) - xyf(y)f^2(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow [xf(y) - yf(x)] [xf^2(y) - yf^2(x)] &= 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (3) cho $y=1$, ta được

$$[2013x - f(x)] [2013^2x - f^2(x)] = 0, \quad \forall x \neq 0. \tag{4}$$

Từ (4) suy ra $f(x) = 2013x, \quad \forall x \leq 0$. Bởi vậy, từ (3) cho $y = -1$ ta được

$$[-2013x + f(x)] [2013^2x + f^2(x)] = 0, \quad \forall x \neq 0. \tag{5}$$

Từ (5) suy ra $f(x) = 2013x, \quad \forall x > 0$.

Như vậy $f(x) = 2013x, \quad \forall x \in \mathbf{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x) = 2013x, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Bài toán 12. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên $(0; +\infty)$, nhận giá trị trong $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}, \quad \forall x, y \in (0; +\infty)$.

Giải.

Trong (1) thay $(x; y)$ bởi $\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$ ta được :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right)f\left(\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{y}\right)\right) + xy, \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{2}$$

Đặt $f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$. Từ (2) ta có

$$g(x)g(y) = g(y)g\left(\frac{x}{g(y)}\right) + xy, \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{3}$$

Từ (3) thay x bởi $xg(y)$ ta được :

$$\begin{aligned}
 g(xg(y))g(y) &= g(y)g(x) + xyg(y), \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \\
 \Rightarrow g(xg(y)) &= g(x) + xy, \quad \forall x, y \in (0; +\infty) \quad (\text{do } g(y) > 0).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (4) cho $x=1$ ta được

$$\Rightarrow g(g(y)) = g(1) + y, \quad \forall y \in (0; +\infty). \tag{5}$$

Từ (4) thay x bởi $g(x)$ ta được

$$g(g(x)g(y)) = g(g(x)) + g(x)y, \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{6}$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$g(g(x)g(y)) = g(1) + x + g(x)y, \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (7)$$

Từ (7) thay x bởi y và thay y bởi x ta được

$$g(g(x)g(y)) = g(1) + y + g(y)x, \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (8)$$

Từ (7) và (8) suy ra

$$x + g(x)y = y + g(y)x, \quad \forall x, y \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow [g(x) - 1]y = [g(y) - 1]x, \quad \forall x, y \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x) - 1}{x} = \frac{g(y) - 1}{y}, \quad \forall x, y \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{g(x) - 1}{x} = C, \quad \forall x, y \in (0; +\infty) \quad (C \text{ là hằng số})$$

$$\Rightarrow g(x) = Cx + 1, \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (9)$$

Thay hàm g từ (9) vào (3) ta được

$$(1 + Cx)(1 + Cy) = (1 + Cy) \left(1 + C \frac{x}{1 + Cy} \right) = xy, \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (10)$$

Từ (10) cho $x = y = 1$ ta được

$$(1 + C)^2 = (1 + C) \left(1 + \frac{C}{1 + C} \right) + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2C + C^2 = 1 + C + C + 1 \Leftrightarrow C^2 = 1 \Leftrightarrow C = \pm 1.$$

Do $g(x) = 1 + Cx > 0, \quad \forall x, y \in (0; +\infty)$ nên ta chỉ lấy $C = 1$. Vậy $g(x) \equiv 1 + x$, suy ra

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \text{ Thử lại thấy thỏa mãn.}$$

Nhật xét: các bài từ 7,8,9,10,11,12 có các cách thể phức tạp, có tính kế thừa. Vì vậy người giải phải quan sát để lựa chọn cho thích hợp.

2. Giả thuyết nghiên cứu

Để giải quyết các bài toán trên, ta dùng phương pháp thế giá trị đặc biệt, thế biến.

Chẳng hạn, cho $x = 0, y = -1, x = y, x = \frac{1}{x}$... đặt $f(0) = a, \dots$, từ đó suy ra hàm cần tìm

IV. THIẾT KẾ

Trong các bài toán trên việc thay các biến bằng những giá trị đặc biệt cần lưu ý là các giá trị đó phải nằm trong tập xác định, việc thế giá trị phải có tính kế thừa.

Trong các bài toán trên đều được xây dựng trên tập số thực và được sắp xếp theo cấp độ tăng dần nhằm giúp cho các em làm quen với việc giải phương trình hàm

V. KẾT QUẢ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

Trong những năm dạy bồi dưỡng học sinh giỏi, giáo viên và học sinh đã cùng nhau tìm hiểu, nghiên cứu thật nhiều tài liệu tham khảo, sách bồi dưỡng chuyên môn, sách bài tập

nâng cao....Giáo viên đã chỉ những phương pháp, cách thức trình bày và hướng dẫn học sinh tự nghiên cứu tài liệu, gặp những trường hợp khó, nan giải thì giáo viên gợi ý, hướng dẫn giải tiếp học sinh.

Giáo viên đã giao cho học sinh nhiều dạng bài tập tương tự để học sinh nắm vững cách thực hiện, tiến trình giải bài tập, cách trình bày như thế nào cho phù hợp.

Ngoài những dạng bài tập trên, giáo viên sẽ giao tiếp các dạng bài tập nâng cao hơn, hoặc khác dạng hơn để học sinh sẽ linh hoạt hơn trong cách giải các bài tập.

Chính vì những điều trên, mà trong những năm qua học sinh đều đạt được những thành tích khá cao và đều được dự thi HSG cấp quốc gia

VI. TÍNH THỰC TIỄN CỦA CHUYÊN ĐỀ

Chuyên đề “ **Giải phương trình hàm bằng phương pháp thế** ” có thể nêu lên một số điểm chính sau đây:

1. Những điểm mới trong chuyên đề

- Giúp học sinh có cách nhìn và hướng giải tốt hơn đối với phương trình hàm.
- Định hướng cho học sinh biết phương pháp giải các bài tập về phương trình hàm bằng phương pháp thế đối với cặp biến là tự do.
- Học sinh có thể kết hợp các phương pháp khác để giải các bài toán phương trình hàm phức tạp.
- Chuyên đề này có thể áp dụng trong việc học của học sinh và việc dạy của giáo viên khi tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi dự thi cấp Quốc gia.

2. Đối với giáo viên

- Có thể sử dụng chuyên đề để thiết kế bài tập bồi dưỡng học sinh giỏi .
- Vận dụng sáng tạo chuyên đề để khai thác các kiến thức liên quan và phát triển chuyên đề có hiệu quả phù hợp với đối tượng học sinh.

3. Đối với học sinh

- Phát triển phương pháp , khả năng tư duy của học sinh trong quá trình học.
- Bồi dưỡng năng lực lao động, làm việc sáng tạo cho học sinh.
- Phát triển các kĩ năng, phương pháp và thái độ tự học của học sinh.

VII. KẾT LUẬN

Phương trình hàm là một phần kiến thức khó nên đối tượng áp dụng chủ yếu là các em học sinh giỏi tham gia các kì thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh và quốc gia.

Trong chuyên đề này chỉ đưa ra các dạng bài tập về “ **Phương pháp thế để giải phương trình hàm**” . Hi vọng với một số dạng toán đó sẽ giúp các em học sinh nâng cao khả năng tư duy, khả năng giải quyết vấn đề khi gặp một bài toán phương trình hàm trong các kì thi học sinh giỏi.

Mặc dù tôi đã cố gắng xây dựng các dạng bài tập, các cách giải đơn giản tuy nhiên trong quá trình thực hiện bài viết sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết. Hi vọng các thầy cô, các em học sinh tham khảo, đóng góp ý kiến để tìm ra lời giải hay hơn, có các dạng bài tập phong phú hơn nữa để bài viết được hoàn chỉnh hơn. Hi vọng các kiến thức tôi đã trình bày trong bài viết này sẽ là một hành trang của các em học sinh giỏi trong các kì thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh và cấp quốc gia.

Xin chân thành cảm ơn!

Châu Đốc, ngày 09 tháng 01 năm 2017
Người viết

Cao Bảo Đăng

T

PHỤ LỤC 2

An Giang, ngày 09 tháng 01 năm 2017

BÁO CÁO

KẾT QUẢ THỰC HIỆN SÁNG KIẾN

I. Sơ lược lý lịch tác giả:

- Họ và tên: Cao Bảo Đăng ; Nam
- Ngày tháng năm sinh: 11/08/1981
- Nơi thường trú: 455, Khóm Vĩnh Phú, Phường Châu Phú A, TP Châu Đốc , An Giang
- Đơn vị công tác: THPT chuyên Thủ Khoa Nghĩa
- Chức vụ hiện nay: Giáo viên giảng dạy
- Lĩnh vực công tác: Toán Học

II. Tên sáng kiến : Chuyên đề: “ Giải một số phương trình hàm bằng phương pháp thế “